Svatopluk Fučík; Alois Kufner

O Schauderových bázích a jejich aplikacích

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 19 (1974), No. 1, 11--21

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139116`

O Schauderových bázích a jejich aplikacích

Svatopluk Fučík, Alois Kufner,
Praha

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie vykonávají jistě záslužnou činnost, když své čtenáře systematicky seznamují se současným stavem bádání o problémech, které v roce 1900 zformuloval David Hilbert. Hilbert tehdy projevil vskutku geniální předvídavost; rozsáhlá literatura věnovaná Hilbertovým problémům to jen potvrzuje. Nelze však zapomínat, že Hilbert formuloval své problémy na přelomu století; za uplynulých sedm desetiletí vznikly jistě problémy alespoň stejně aktuální jako problémy Hilbertovy, ne-li ještě aktuálnější.

Tzv. problém *existence Schauderovy báze*, s nímž bychom chtěli čtenáře seznámit, se neodvažujeme srovnávat s Hilbertovými problémy, a nechceme ho vydávat za „24. Hilbertův problém". Domníváme se ovšem, že je dobré o jeho řešení něco vědět — vždyť jeho význam není omezen jen na funkcionální analýzu, v níž vznikl. A pozoruhodné na jeho (negativním) vyřešení je mj. i to, že se v „moderní" teorii (= funkcionální analýza) výrazně uplatnily i zcela „klasické" výsledky (= teorie čísel).

1. „Rovina je určena třemi různými body neležícími na přímce", říká jedna ze základních pouček elementární matematiky. Označíme-li zmíněné tři body písmeny A, B, C, bude rovina určena dvojicí vektorů $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$: Každý bod X roviny je jednoznačně určen dvojicí čísel a_1, a_2, neboť vektor $\overrightarrow{\mathrm{AX}}$ lze vyjádřit jediným způsobem ve tvaru

$$\overrightarrow{\mathrm{AX}} = a_1\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + a_2\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,.$$

Jinými slovy: Vektory $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ tvoří bázi dvourozměrného eukleidovského prostoru $\boldsymbol{R}^2$. Zvlášť jednoduché to je v případě, kdy vektory $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ jsou kolmé – pak hovoříme o *ortogonální bázi.* Tu tvoří v $\boldsymbol{R}^2$ např. vektory $e_1 = [1, 0]$ a $e_2 = [0, 1]$ a jednoznačné přiřazení mezi bodem (vektorem) x a uspořádanou dvojicí reálných čísel (jeho souřadnic) x_1, x_2 je zcela zřejmé:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2\,.$$

Analogicky je tomu v N-rozměrném eukleidovském prostoru $\boldsymbol{R}^N$: bázi (jednu z mnoha možných) zde tvoří vektory $e_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0]$, $\ldots$, $e_N = [0, 0, \ldots, 0, 1]$ a pro bod x z $\boldsymbol{R}^N$ existuje jednoznačné vyjádření

$$x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i\,,$$

jímž je dáno vzájemně jednoznačné přiřazení mezi bodem x a N-ticí $[x_1, x_2, \ldots, x_N]$ jeho souřadnic.

2. Lineární algebra přenáší pojem báze přirozeným způsobem do abstraktních prostorů konečné dimenze, takže ani tam nejsou problémy: báze vždy existuje. Vzniká ovšem přirozená otázka: *Do jaké míry je podstatné, že dimenze příslušného lineárního prostoru je konečná, neboli co se stane, bude-li prostor nekonečně rozměrný?*

Vlastně by neměly vzniknout potíže. Pro konečnou dimenzi je univerzálním modelem eukleidovský prostor $\boldsymbol{R}^N$, a přirozeným nekonečně rozměrným analogem eukleidovského prostoru je prostor l_2, jehož prvky x jsou posloupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ reálných čísel x_i, a to takové posloupnosti, pro něž řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$$

konverguje. Výraz $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2)^{1/2}$ definuje *normu* prvku $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ z l_2 a je zobecněním pojmu velikosti vektoru. V prostoru l_2 tvoří bázi (opět jednu z mnohých) prvky $e_{(j)} = \{0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$ s jedničkou na j-tém místě ($j = 1, 2, \ldots$) – tedy $e_{(j)} = \{\delta_{ij}\}_{i=1}^{\infty}$: je pak totiž

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i ,$$

kde konvergenci řady vpravo chápeme takto:

$$\lim_{n\to\infty} \|\sum_{i=n}^{\infty} x_i e_i\| = 0 .$$

3. V prostoru l_2 (nekonečně rozměrném eukleidovském prostoru) tedy opět existuje báze, a to dokonce báze velmi názorná, ortogonální. A pomocí prostoru l_2 je problém existence báze vyřešen i pro širokou třídu abstraktních *Hilbertových prostorů*: Každý Hilbertův prostor H (tj. separabilní úplný lineární prostor se skalárním součinem) je izomorfní s prostorem l_2 (tj. existuje izomorfismus mezi H a l_2 – lineární spojité a prosté zobrazení prostoru l_2 na prostor H). Z tohoto tvrzení plyne, že bázi v prostoru H tvoří právě ty prvky h_j z H, které jsou pomocí zmíněného izomorfismu přiřazeny výše definovaným prvkům $e_{(j)}$ z l_2 ($j = 1, 2, \ldots$) – viz např. [16].

Dodejme pro úplnost, že problematika báze v Hilbertově prostoru H úzce souvisí s teorií abstraktních Fourierových řad v těchto prostorech.

4. Hilbertovy prostory jsou přirozeným zobecněním eukleidovských prostorů – zobecněním, které zdůrazňuje jistý rys vektorů, totiž to, že můžeme definovat úhel, který svírají, že pracujeme se skalárním součinem. Zobecníme-li jen metrické (a lineární) vlastnosti eukleidovských prostorů, dostaneme širší třídy prostorů. My se zde omezíme na *Banachovy prostory*, tj. na úplné lineární normované prostory.

Definice. *Posloupnost $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ prvků Banachova prostoru B nazveme bazí tohoto prostoru, jestliže každý prvek x z B lze právě jedním způsobem vyjádřit ve tvaru*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i , \tag{1}$$

kde a_i jsou reálná čísla. Je-li $\| \, . \, \|$ norma v prostoru B, chápeme rovnost (1) takto:

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| = 0 .$$

K pojmu báze jsme dospěli logickým procesem zobecňování jednoduchého a názorného geometrického faktu. Zvolili jsme tento postup z metodických důvodů, abychom čtenáři přiblížili problematiku rychle a názorně. Náš postup ovšem neodpovídá historické skutečnosti – cesta vedoucí k pojmu báze v Banachově prostoru byla podstatně složitější a prapůvodní motiv jeho zavedení nebylo zobecňování, které jsme zde naznačili. K tomuto pojmu dospěl J. SCHAUDER ([20]) v roce 1927 z důvodů ryze utilitárních: je to vlastně „vedlejší produkt" dokazování jistých výsledků v prostorech nekonečné dimenze (při němž Schauder postupoval metodou „přenášení" výsledků z prostorů konečné dimenze). J. Schauder se o studium tohoto pojmu a jeho souvislostí velmi zasloužil, a proto hovoříme o Schauderově bázi.

Budiž B Banachův prostor, v němž existuje Schauderova báze $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Pak množina R všech konečných lineárních kombinací

$$\sum_{i=1}^{k} r_i e_i ,$$

kde r_i jsou racionální čísla, tvoří spočetnou a hustou podmnožinu v B. Takový Banachův prostor je tedy *separabilní*. Tím vznikl přirozený problém, který je vlastně tématem tohoto článku:

(P) *Má každý separabilní Banachův prostor B Schauderovu bázi?*

5. Poprvé tento problém explicitně formuloval v roce 1932 S. BANACH ve své knize [2]; trvalo 40 let, než bylo možno dát jednoznačnou (a to negativní) odpověď na výše položenou otázku.

A protože odpověď byla dlouho velkou neznámou, kráčela většina řešitelů tohoto problému cestou hledání parciálních odpovědí – cestou konstruování báze alespoň pro některé speciální Banachovy prostory, především pak pro prostory, které jsou důležité z hlediska aplikací. O některých takových speciálních prostorech (a o bázích na nich) zde pojednáme. Budou to především prostory posloupností c_0, l_p a l_∞ a prostory funkcí $C(\bar{\Omega})$, $L_p(\Omega)$ a $W_p^k(\Omega)$. Podejme proto nejprve stručný popis těchto prostorů:

c_0 (resp. l_p, resp. l_∞) označuje množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, pro něž platí $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ [resp. $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p} < \infty$, resp. $\|x\| = \sup_i |x_i| < \infty$].

Symbolem $C(\bar{\Omega})$, kde Ω je oblast v $\mathbf{R}^N$, označujeme množinu všech reálných funkcí $f(x)$ spojitých na uzávěru $\bar{\Omega}$ oblasti Ω; norma je dána vztahem

$$\|f\| = \max_{x\in\bar{\Omega}} |f(x)| .$$

$L_p(\Omega)$ je prostor všech měřitelných funkcí $f(x)$ definovaných na $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, pro něž je

$$\|f\| = (\int_\Omega |f(x)|^p \, dx)^{1/p} < \infty \qquad (1 \leqq p < \infty) .$$

$W_p^k(\Omega)$ – tzv. *Sobolevův prostor* – je (zhruba řečeno) prostor všech funkcí $f(x)$ definovaných na Ω, jejichž derivace až do řádu k včetně jsou prvky prostorů $L_p(\Omega)$. (Podrobnější popis a vlastnosti těchto prostorů najde čtenář např. v [17].)

6. Proč nás vlastně zajímají právě tyto speciální prostory a proč je vůbec třeba hledat odpověď na problém (P)?

Připomeňme si abstraktní formulaci *základní úlohy teorie aproximace*: Je-li B Banachův prostor s normou $\| \cdot \|$ a V podprostor prostoru B, jest nalézt pro daný prvek x z B prvek $u \in V$ tak, aby „vzdálenost x od u" byla minimální, tj. aby platilo

$$\|x - u\| \leqq \|x - v\| \qquad \text{pro všechny prvky } v \in V .$$

A zde je velmi výhodné, máme-li zaručenu existenci báze. Má-li např. prostor V konečnou dimenzi N, lze úlohu převést na úlohu hledání minima funkce

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \|x - \sum_{i=1}^{N} a_i e_i\| .$$

Zcela přirozené řešení má tento problém v Hilbertově prostoru: Tvoří-li prvky $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ bázi v Hilbertově prostoru B a prvky $\{e_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ (kde $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost vybraná z posloupnosti $\{i\}_{i=1}^{\infty}$) bázi ve V, je hledaná nejlepší aproximace u ihned známá – je

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} e_{k_i} ,$$

kde $\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost vybraná z posloupnosti $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ čísel přiřazených jednoznačně prvku x vzorcem $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$.

Teorie aproximace má široké aplikace a znalost existence báze její užití podstatně usnadní. S aproximacemi úzce souvisejí *numerické metody*. Existuje např. celá řada postupů přibližného řešení různých rovnic, založených na tom, že máme k dispozici bázi (říká se jí „soustava souřadnicových funkcí" i jinak); konkrétní realizace těchto metod však přináší řadu problémů spočívajících mj. v tom, že teoretický předpoklad existence báze se nedá ověřit (buď vůbec nevíme, zda báze existuje, nebo ji neumíme sestrojit).

Toto úskalí – rozpor mezi teorií a praxí – můžeme ilustrovat na příkladu řešení parciální diferenciální rovnice. Většina učebnic uvádí jako jednu ze základních metod řešení tzv. *Fourierovu metodu* (metodu rozdělení proměnných), která je ve své podstatě metodou konstrukce báze pro jistý prostor funkcí více proměnných na základě znalosti báze v prostoru funkcí jedné proměnné. Tato metoda se však hodí jen pro funkce definované na velmi jednoduchých oborech – např. pro dvě proměnné jsou to obdélníky a kruhy či mezikruží, ale už pro nejjednodušší mnohoúhelník ztrácí tato metoda na účinnosti.

7. I když víme, že prostor má bázi, může být problémem její sestrojení. Uvažujme např. prostor $C(\langle 0, 1\rangle)$ [za Ω volíme interval $(0, 1)$]: Podle klasické Weierstrassovy věty lze každou spojitou funkci aproximovat polynomem; nabízí se tedy možnost volit za prvky báze funkce $e_n(t) = t^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Je ovšem ihned vidět, že tyto funkce – přestože spojitou funkci aproximují s libovolnou přesností – bázi netvoří. Kdyby ji totiž tvořily, byla by každá spojitá funkce na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ dána konvergentní mocninnou řadou, a byla by tedy analytická.

Podívejme se nyní, jak vypadalo hledání odpovědi na otázku o existenci Schauderovy báze v obecném Banachově prostoru a jak je to s její konstrukcí pro speciální prostory.

Někteří matematici se domnívali, že Schauderova báze existuje v každém separabilním Banachově prostoru. Ve svých výsledcích tohoto předpokladu mlčky používali a problém existence báze třeba v prostoru $W_p^k(\Omega)$ pro ně byl tak jasný, že nestál za zmínku (je třeba říci, že pro konkrétní prostory, v nichž tohoto výsledku používali, byl jejich předpoklad správný; nikdy však výsledek tohoto typu nepublikovali a není jasné, zda se spoléhali na intuici či zda sice tento částečný problém vyřešili, ale nepovažovali ho za tak významný, aby stál za uveřejnění). Jiní byli skeptičtější — např. I. Singer vyslovil ve své monografii [19] z roku 1970 domněnku, že bude existovat separabilní Banachův prostor bez báze.

Je ještě třeba říci, že do té doby byly známy pouze *pozitivní* výsledky. Tak už Schauder dokázal ve výše citované práci [20], že prostor $C(\langle 0, 1\rangle)$ má bázi: zkonstruoval soustavu po částech lineárních funkcí $e_i(t)$, které tuto bázi tvořily. Ve stejné práci dokázal, že soustava posloupností $e_{(j)} = \{\delta_{ij}\}_{i=1}^{\infty}$, s níž jsme se setkali u prostoru l_2, tvoří bázi v prostoru c_0 i v prostoru l_p $(1 \leqq p < \infty)$.

Týž autor dokázal ([21]), že báze existuje i v prostoru $L_p(0, 1)$: tvoří ji soustava Haarových funkcí $e_{2^n}(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, definovaných na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ takto:

$$e_1(t) \equiv 1\,,$$

$$e_{2^k+l}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^k} & \text{pro} \quad t \in \langle (2l-2)/2^{k+1}, (2l-1)/2^{k+1}\rangle\,, \\ -\sqrt{2^k} & \text{pro} \quad t \in \langle (2l-1)/2^{k+1}, 2l/2^{k+1}\rangle\,, \\ 0 & \text{pro ostatní } t \text{ z } \langle 0, 1\rangle\,. \end{cases}$$

8. Tyto konkrétní výsledky mají svou důležitost, jak ihned uvidíme; ovšem obecná odpověď stále nebyla známa. K řešení problému (P) se nabízely zhruba dvě cesty:

(a) Vyřešit problém (P_1): Ukázat, že každý podprostor prostoru B se Schauderovou bází má sám také Schauderovu bázi.

(b) Pokusit se o nějaké „porovnání" našeho (obecného) prostoru B s prostorem, o němž víme, že už Schauderovu bázi má (např. dokázat existenci izomorfismu mezi těmito prostory).

Ad (a): Kladnou odpovědí na problém (P_1) by byla dána i kladná odpověď na obecný problém (P). Plyne to z tzv. Banachovy-Mazurovy věty o univerzalitě prostoru $C(\langle 0, 1\rangle)$ (která říká toto: Je-li B separabilní Banachův prostor, pak existuje takové spojité prosté a lineární zobrazení T z prostoru B do $C(\langle 0, 1\rangle)$, že $T(B)$ už je podprostorem prostoru $C(\langle 0, 1\rangle)$; viz [17]) a z faktu, že izomorfismus zachovává vlastnost „mít Schauderovu bázi".

Problém (P_1) se nepodařilo kladně vyřešit (dnes už víme, že z principiálních důvodů). Podařilo se však dokázat, že „téměř každý" podprostor prostoru $L_p(0, 1)$ má Schauderovu bázi ([13]). Využitím tohoto faktu a jistých vět z teorie tzv. *interpolačních prostorů* dokázali S. Fučík, O. John a J. Nečas ([10]) existenci Schauderovy báze v Sobolevových prostorech $W_p^k(\Omega)$ a v jistých jejich podprostorech, které hrají důležitou roli právě při zkoumání parciálních diferenciálních rovnic.

Ad (b): Při tomto postupu je vlastně třeba dokázat, že jisté dva Banachovy prostory jsou izomorfní. (Jsou-li B_1 a B_2 separabilní prostory, neplatí obecně, že jsou izomorfní, platí však, že existuje spojité a prosté zobrazení T z B_1 na B_2 takové, že T^{-1} je spojité; viz [14].) Protože se podařilo dokázat, že prostor $L_p(\Omega)$ je izomorfní s $L_p(0, 1)$, je tím dokázána existence Schauderovy báze v prostorech $L_p(\Omega)$ pro každou omezenou oblast Ω v $\boldsymbol{R}^N$. Tento výsledek spolu s existencí Schauderovy báze v separabilních *Orliczových prostorech* (které jsou zobecněním prostorů L_p) je dokázán v knize [15]. Čtenář se o metodě důkazu může dočíst též ve skriptech [11].

Existenci takového izomorfismu a tím existenci Schauderovy báze pro širokou třídu Banachových prostorů, které mají úzký vztah k teorii parciálních diferenciálních rovnic (různé prostory, které zobecňují prostory Sobolevovy), dokázal H. Triebel ([24]); rozšířil tak v jistém smyslu výsledky dosažené v práci [10].

9. Ani tyto metody však nevedly k rozřešení problému (P). Nejobecnějším pozitivním výsledkem v tomto směru je tvrzení obsažené v knize [6], podle něhož *v libovolném Banachově prostoru existuje separabilní nekonečně rozměrný podprostor, který má Schauderovu bázi.*

Definitivně vyřešil problém (P) až v roce 1972 Per Enflo ([7]), který sestrojil separabilní Banachův prostor bez Schauderovy báze. Jeho zajímavý protipříklad je příliš komplikovaný na to, abychom ho mohli uvést byť alespoň ve zkrácené formě. Hlavním výsledkem Enfloovy práce je toto tvrzení:

Věta. *Existuje separabilní reflexivní Banachův prostor B o těchto vlastnostech: Existuje posloupnost $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ konečně rozměrných podprostorů prostoru B takových, že* $\dim M_n \to \infty$ *pro* $n \to \infty$ *a že pro každý operátor T z B do B, jehož obor hodnot má konečnou dimenzi a pro který je* $\|T - I\| < 0{,}1$ *na* M_n, *je* $\|T\| \geqq (\log \dim M_n)^{0{,}1}$. ($\dim M_n$ zde značí rozměr podprostoru M_n, I je identický operátor; $\|T - I\|$, resp. $\|T\|$ značí supremum výrazů $\|Tx - x\|$, resp. $\|Tx\|$ pro všechna $x \in M_n$ taková, že $\|x\| \leqq 1$.)

Z této věty už plyne, že v prostoru B nemůže existovat Schauderova báze $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Kdyby totiž existovala, stačilo by volit n tak velké, aby platilo $(\log \dim M_n)^{0{,}1} \geqq 1{,}1$, a za T volit operátor T_N, přiřazující prvku x N-tý částečný součet jeho rozvoje v řadu podle prvků báze: $T_N x = \sum_{i=1}^{N} a_i e_i$. Protože $\|T_N x - x\| \to 0$ pro $N \to \infty$, bude na M_n $\|T_N - I\| < 0{,}1$, zvolíme-li číslo N dostatečně velké; nerovnost $\|T_N\| \leqq \|T_N - I\| + \|I\| < 0{,}1 + 1 = 1{,}1$ je pak ve sporu s tím, že $\|T_N\| \geqq (\log \dim M_n)^{0{,}1} \geqq 1{,}1$.

Je třeba se zmínit o tom, že Enfloova konstrukce je podstatným způsobem založena na výsledcích o rozložení prvočísel. Jeho příklad je znám pouze z „ústního podání" (je k dispozici preprint připravovaného článku), ale přesto se už objevilo několik dalších výsledků (zatím opět ve formě preprintů), které metodu P. Enfloa zobecňují a zjednodušují. Tak např. T. Figiel a A. Pełczyński ([9]) dokázali, že existuje podprostor prostoru l_∞, který nemá Schauderovu bázi. Stejný výsledek dokázali A. M. Davie ([5]) a T. Figiel ([8]) pro prostory l_p $(p > 2)$.*)

---

*) Dodáno při korektuře: Článek vznikl před rokem, a proto část prací, které jsme tehdy měli k disposici ve formě preprintů, už vyšla (popř. s drobnými úpravami proti „preprintové" verzi). Proto jsou v seznamu literatury uvedeny práce [7] a [9] už v definitivní formě.

10. Tím je tedy dána odpověď na problém (P). Odpověď nepříliš uspokojující, neboť vyvolává nutnost zkoumat „skoro každý" konkrétní prostor odděleně. Přitom existují další velmi důležité prostory funkcí, o kterých není známo, zda mají nebo nemají Schauderovu bázi. Pro ilustraci: i když prostor $C(\langle 0,1\rangle)$ byl jeden z prvních, pro který byla báze sestrojena, nepodařilo se zatím tento výsledek uspokojivě rozšířit na prostory $C^k(\bar{\Omega})$ (tj. na prostory všech funkcí, jejichž derivace až do řádu k včetně jsou spojité na $\bar{\Omega}$). Pro prostor $C^1(\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle)$ byla existence báze dokázána S. SCHONEFELDEM ([22]) a Z. CIESIELSKIM ([3]); zobecnění pro prostory $C^m(\bar{I}^d)$ a $W_p^m(I^d)$ (I^d je kartézský součin d intervalů $(0,1)$) provedli Z. Ciesielski a J. DOMSTA ([4]); pro prostory $C^k(T^q)$, kde T je torus, dokázal existenci báze opět S. Schonefeld ([23]). Potíže zde vznikají proto, že žádné vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\bar{\Omega}$ na interval $\langle 0,1\rangle$ (které existuje v důsledku stejné mohutnosti uvedených množin) není spojité (a nelze tedy pro tyto prostory „napodobit" postup, jímž se pomocí obdobného zobrazení dokazuje izomorfismus prostorů $L_p(\Omega)$ a $L_p(0,1)$).

Dalším důležitým prostorem je Sobolevův prostor $W_p^k(\Omega)$, kde Ω je obecná otevřená a omezená množina v $\mathbf{R}^N$; všechny zatím dosažené výsledky předpokládají buď speciální tvar množiny Ω ([4]), nebo jistou hladkost hranice množiny Ω ([10], [24]).

Téměř klasickým problémem je problém existence Schauderovy báze v prostoru H^1 (tj. v prostoru všech komplexních integrovatelných funkcí f na jednotkové kružnici takových, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\vartheta} f(\vartheta)\, d\vartheta = 0 \qquad \text{pro } n = 1, 2, \ldots).$$

Tento problém zformuloval již S. Banach [2]; E. AKUTOWICZ [1] podal sice jeho řešení, později se však ukázalo, že jeho důkaz obsahuje chybu ([19]).

11. Vyřešení problému (P) situaci nijak nezjednodušilo, jak je patrno z odst. 10. A tak zůstává stále v souvislosti s bázemi celá řada (i teoretických) problémů otevřená. Jsou to problémy velice aktuální a užitečné pro praxi. Uveďme pro ilustraci jeden z nich: Při zkoumání existence řešení nelineárních rovnic definovali někteří autoři třídy separabilních prostorů, které mají jenom část vlastností Banachových prostorů se Schauderovými bázemi (viz např. W. V. PETRYSHYN [18], S. Fučík a J. Nečas [12]). Studium vztahů mezi těmito širšími třídami prostorů, třídou separabilních prostorů a třídou prostorů se Schauderovou bází představuje široké pole působnosti.

12. Závěrem chceme poděkovat doc. RNDr. B. NOVÁKOVI, CSc., který během svého studijního pobytu v USA obstaral (a laskavě nám zapůjčil) preprinty citované v odst. 9.

Článek vznikl na základě referátu, který přednesl S. Fučík v semináři z funkcionálních prostorů na katedře matematické analýzy MFF UK v březnu 1973.

Poznámka:

Když byl tento článek v tisku, dostal se autorům do ruky časopis Wiadomości matematyczne XV (1972), v němž je otištěn text referátu, který přednesl A. Pełczyński v roce 1972 ve Varšavě u příležitosti podpisu smlouvy o založení Mezinárodního matematického centra Stefana Banacha. Část této odborně pojaté přednášky je věnována problému existence Schauderovy báze a svědčí o aktuálnosti problému, o němž zde pojednáváme.

Literatura

[1] E. AKUTOWICZ: *Construction of a Schauder basis in some space of holomorphic functions in the unit disk.* Colloq. Math. *15*, 287—296 (1966).

[2] S. BANACH: *Théorie des opérations linéaires.* Warszawa 1932.

[3] Z. CIESIELSKI: *A construction of a basis in $C^1(I^2)$.* Studia Math. *33*, 243—247 (1969).

[4] Z. CIESIELSKI, J. DOMSTA: *Construction of an orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p^m(I^d)$.* Studia Math. *41*, 211—224 (1972).

[5] A. M. DAVIE: *The approximation problem for Banach spaces.* Preprint.

[6] M. M. DAY: *Normed linear spaces.* Springer-Verlag 1958. (Existuje též ruský překlad.)

[7] P. ENFLO: *A counterexample to the approximation problem.* Acta Math. *130*, 309—317 (1973).

[8] T. FIGIEL: *Further counterexamples to the approximation problem.* Preprint.

[9] T. FIGIEL, A. PEŁCZYŃSKI: *On Enflo's method of construction of Banach spaces without approximation property.* Uspechi mat. nauk. *28*, 95—108 (1973).

[10] S. FUČÍK, O. JOHN, J. NEČAS: *On the existence of Schauder bases in Sobolev spaces.* CMUC *13*, 163—175 (1972).

[11] S. FUČÍK, O. JOHN, A. KUFNER: *Prostory funkcí. I. Integrovatelné funkce.* SPN, Praha 1974 (skripta MFF KU).

[12] S. FUČÍK, J. NEČAS: *Ljusternik-Schnirelmann theorem and nonlinear eigenvalue problems.* Math. Nachr. *53*, 277—289 (1972).

[13] W. B. JOHNSON, H. P. ROSENTHAL, M. ZIPPIN: *On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces.* Israel J. Math. *9*, 488—506 (1971).

[14] M. I. KADEC: *Dokazatelstvo topologičeskoj ekvivalentnosti vsech separabel'nych beskonečnomernych prostranstv Banacha.* Funkc. anal. i prilož. *1*, 61—70 (1967).

[15] M. A. KRASNOSEL'SKIJ, J. B. RUTICKIJ: *Vypuklyje funkcii i prostranstva Orliča.* Moskva 1958.

[16] A. KUFNER: *Geometrie Hilbertova prostoru.* SNTL, Praha 1973.

[17] L. A. LJUSTERNIK, V. I. SOBOLEV: *Elementy funkcional'nogo analiza.* Moskva 1965.

[18] W. V. PETRYSHYN: *On a fixed point theorem for nonlinear P-compact operators in Banach space.* Bull. Amer. Math. Soc. *72*, 329—334 (1966).

[19] I. SINGER: *Bases in Banach spaces I.* Springer-Verlag 1970.

[20] J. SCHAUDER: *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen.* Math. Zeitschr. *26*, 47—65 (1927).

[21] J. SCHAUDER: *Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems.* Math. Zeitschr. *28*, 317—320 (1928).

[22] S. SCHONEFELD: *Schauder bases in spaces of differentiable functions.* Bull. Amer. Math. Soc. *75*, 586—590 (1969).

[23] S. SCHONEFELD: *Schauder bases in the Banach space $C^k(T^q)$.* Trans. Amer. Math. Soc. *165*, 309—318 (1972).

[24] H. TRIEBEL: Sborník *Theory of nonlinear operators.* Academia, Praha 1973. 135—191.

Paul Ehrenfest (1880—1933).

Ehrenfestovo jméno nemizí z učebnic teoretické fyziky, především v partiích o termodynamice a kvantové mechanice (o speciálních knihách z příslušných oborů ani nemluvě), i když od jeho tragického skonu uplynulo již 40 let. Z jeho zásluh o tuto, jím tak milovanou vědu, si připomeňme řadu zpřesnění jak Boltzmannových tak Gibbsových tvrzení o termodynamice a statistické fyzice, základní práce v termodynamice termoelektrických jevů a po něm pojmenovaných rovnic pro fázové přechody druhého druhu, dále hypotézu adiabatických invariantů (resp. teorii adiabatických transformací) při formování problematiky kvantování v „primitivní" kvantové teorii (jde o r. 1916) a Ehrenfestovy relace (z r. 1927), s jejich charakterem klasických kanonických rovnic pro středované hodnoty souřadnic a hybností v operátorové formulaci kvantové mechaniky. Přitom většinou současných vedoucích teoretických fyziků byla zvláště vysoko hodnocena jeho logičnost a kritičnost, dále jeho nevšední schopnost vyjasňovat problémy a vyhmatávat jejich podstatu a v neposlední míře i jeho zápal pro vše nové ve fyzice; četnými svými kolegy byl často označován „za svědomí" (tehdejší) moderní fyziky.

P. Ehrenfest se narodil 18. ledna 1880 ve Vídni, kam se jeho rodiče asi před 20 lety přestěhovali z jejich domova „in Loschwitz, a little Jewish village in Moravia", jak uvádí jeho životopisec M. J. Klein v knize *Paul Ehrenfest* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London 1970); patrně jde o moravskou vesničku z okolí Boskovic. R. 1899 se zapisuje na chemické fakultě Vysoké školy technické ve Vídni, ale navštěvuje současně i řadu přednášek na vídeňské universitě, kde zřejmě Boltzmannovy přednášky, především o mechanické teorii tepla, přivodily jeho rozhodnutí stát se teoretickým fyzikem. To pro něho znamená získat co nejhlubší vzdělání v matematice a fyzice, což jej přivádí k tomu, že po dvou letech studia ve Vídni přesídluje do jednoho z tehdejších světových center těchto dvou oborů, totiž do Göttingen, kde působí osobnosti jako Klein, Hilbert, Voigt, Abraham, Stark aj. Odtud se po dvou letech vrací do Vídně, aby zde r. 1904 získal doktorát; krátce nato se zde i oženil s ruskou matematičkou Taťanou Alexejevnou Afanasjevovou, s kterou se seznámil v Göttingen. (Nebyl jednoduchou záležitostí v rakousko-uherské monarchii sňatek žida s příslušnicí ortodoxní pravoslavné církve — oba se museli prohlásit za bezkonfesijní.) S manželkou publikoval Ehrenfest řadu článků; zřejmě to byl i kongeniální druh jeho vědecké práce.

Zdá se, že novomanželé od svých rodin, resp. z dědictví ap. měli dostatek prostředků pro relativně slušné živobytí, takže v letech 1904 až 1912 nemá Ehrenfest trvalé zaměstnání. Nějaký čas žijí (a pilně vědecky pracují) v Göttingen, posledních pět let tohoto období pak v Petrohradě v carském Rusku, tedy v domově manželky (z té doby se také datuje trvalé přátelství k řadě ruských fyziků, především s A. F. Joffem). Když však mu nekyne sebemenší naděje na možnost trvalého působení na některé vysoké škole v Rusku, zahájí Ehrenfest r. 1911 intenzívní kroky, aby se stal soukromým docentem (s vyhlídkou na profesuru) na některé vysoké škole mimo carské Rusko. Určitý čas se i zdálo, že by se mohl stát Einsteinovým nástupcem v Praze (ten odcházel do Curychu), zde však působila komplikace jeho bezkonfesijnost. (Krátký Ehrenfestův pobyt r. 1912 u Einsteina v Praze stačil k tomu, aby uzavřeli upřímné přátelství na celý život.) Když se již zdálo, že nikde neuspěje, přichází nabídka od H. A. Lorentze, aby se stal jeho nástupcem na universitě v Leydenu v Holandsku. Od prosince 1912 nalézá Ehrenfest v Leydenu relativně klidný přístav pro následujících 20 let úspěšné vědecké práce. V r. 1922 na pozvání JČMF měl v Praze přednášku o aktuálních problémech moderní fyziky. V posledních dnech svého života trpěl Ehrenfest značnou melancholií, jistě k ní přispíval i vývoj poměrů v sousedním Německu, která byla asi příčinou i jeho dobrovolného odchodu ze života v rodné Vídni dne 25. září 1933.

V letech 1919—1920 studoval v Leydenu u Ehrenfesta prof. dr. V. Trkal a z té doby je i společná jejich práce o entropické konstantě víceatomových plynů, která byla hojně a stále ještě je citována v základních učebnicích termodynamiky. Z vyprávění prof. Trkala o tomto pobytu nemohu si odpustit, abych neuvedl krátkou typickou historku. Do Leydenu přijížděval přednášet z Berlína tehdy již velmi slavný Einstein. Nebylo výjimečnou událostí, že proud Einsteinova výkladu byl přerušen Ehrenfestovým „Unsinn", pak následovala krátká klidná výměna názorů a přednáška pokračovala dále. A po takových přednáškách oba vynikající fyzikové a přitom velcí přátelé (Einstein byl o necelý rok starší) dlouho do noci se věnovali muzicírování a vychutnávali půvaby např. Brahmsových sonát pro housle a klavír.

Miroslav Brdička

Užíváte správné fráze?

(Fejeton)

Považujeme za nutné upozornit eventuálního čtenáře tohoto článku na drobnou, ale originální práci, kterou pod názvem *A Brief dictionary of phrases used in mathematical writing**) uveřejnil nedávno prof. H. PÉTARD. Zdálo se nám vhodné poskytnout českému čtenáři materiál v takové formě, aby se nejen seznámil s nejzávažnějšími výsledky zmíněného článku, ale také získal trvalou praktickou pomůcku pro přípravu matematických publikací v českém jazyce. Zájemcům, kteří publikují v angličtině, vřele doporučujeme studium práce prof. Pétarda.

V jednotlivých odstavcích jsou seskupeny fráze příbuzného charakteru s popisem situace, ve které se jich zpravidla užívá; na některých místech jsou připojeny upřesňující údaje. Čtenář snadno nahlédne, že jsme se úmyslně vyhnuli komentáři k některým velmi frekventovaným frázím (např. *Čtenář snadno nahlédne*...; ... *triviálně vyplývá* ... apod.), jejichž použitelnost je takřka univerzální a mohou znamenat opravdu cokoliv.

První výrazy a věty musí autor článku vybírat uvážlivě, a to i tehdy, mají-li pro článek malý nebo vůbec žádný význam, neboť velká část čtenářů (včetně některých recenzentů) věnuje zvýšenou pozornost právě úvodu. Za osvědčené lze považovat tyto úvodní věty: *V praxi se často setkáváme s problémem*...; *V poslední době jsou soustředěně studovány*...; *Problém vyšetřovaný v této práci byl již zkoumán X v* [...] *a Y v* [...]. (Nejlépe, když X a Y jsou slavní matematici.) Pokud by se problematiky našeho článku mohla týkat práce pana X, jejíž význam a obsah jsme nepochopili, konstatujeme suše: *Výsledky publikované X jsou v této souvislosti velmi zajímavé.*

Uvádíme dále příklady úvodních obratů, užívaných pro přechod „k věci". Vybere-li si autor např. obrat: *Je přirozené začít touto úvahou*..., má zpravidla na mysli fakt, že někde se začít musí. Často se setkáme s frází: *Zavedeme následující označení*... (signalizuje seriózní přístup a umožňuje částečné prodloužení článku), nebo: *Uvedeme nejprve několik triviálních tvrzení známých z literatury*... (sem se uvádí zejména ta, o jejichž platnosti je autor alespoň částečně přesvědčen, neumí je jednoduše dokázat a nezná vhodný odkaz; některá z nich ovšem v dalším textu použije). Snadno se najdou fráze typu: *Abychom nekomplikovali základní myšlenku důkazu hlavního tvrzení, omezíme se v dalším*... (tohoto úvodu lze užít v případě, jsme-li schopni prezentovat jenom zmíněný jednodušší případ nebo obecný případ vyžaduje zcela jiný přístup). Tím se ovšem může článek zkrátit, což lze však kompenzovat jinak, např. užitím fráze: *Toto tvrzení je známé, ale pro úplnost* [*pro pohodlí čtenáře*] *zde uvedeme jeho důkaz.* Obratu: *Ze vzorce* ... *snadno vyplývá*... se někdy užívá ve spojení s formulí značně nepřehlednou a komplikovanou. Autor ji jakožto úvodní volí (vědomě či nevědomě) k varování, popřípadě k úplnému odmrštění eventuálního čtenáře.

Není-li autor práce schopen dokončit důkaz nějakého tvrzení, je možné se uchýlit k osvědčeným slovním spojením: *Odtud obdržíme snadným výpočtem*...; *Detailní dokončení důkazu ponecháváme čtenáři*...; ... *z čehož užitím X-ovy věty plynou dokazovaná tvrzení*; také lze situaci vyřešit jemně a prostě: *Důkaz je dokončen.* Při obtížích na jiném místě než na konci důkazu se užívají obraty jako: ... *Odtud triviálně vyplývá*...; *Standardní úvahy vedou k*...; *Čtenář ihned vidí, že*...; *Podobně jako nahoře se odvodí*...; *Z uvedených výsledků snadno plyne*... apod. Lze též užít obratů: ... *po snadné námaze čtenář zjistí, že*...; ... *přímým výpočtem se zjistí, že*..., a to např. v případě, že jsme při výpočtu dospěli několikrát k různým výsledkům (a je čas se pro některý rozhodnout), nebo v případě, že jsme své poznámky s výpočty ztratili.

Pro zvýšení dojmu a zdůraznění důležitosti svého oboru se hodí skromně prohlásit např.: *Ačkoliv vyšetřování případu*... *je prakticky uzavřeno, většina otázek z naznačené problematiky stále odolává úsilí matematiků. Cílem této práce je* ...

Je-li pouze z ústního podání z vyšších kruhů známo, že nějaké tvrzení je triviální, můžeme ho v práci dokázat — šiřitel této informace konečně získá pramen k odkazu a často i přesnou formulaci tvrzení.

V práci je též žádoucí uvést i problémy, které se studovanou problematikou úzce či vzdáleně souvisejí. Pro uvedení problému, jehož řešení neznáme, je vhodný obrat: ..., *přičemž je pravděpodobné, že tento problém není dosud řešen a, jak se zdá, náleží k obtížnějším.* Dříve

---

*) Amer. Math. Monthly, *73* (1966), 196—197.

rozřešené problémy komentujeme slovy: ..., *což jednoduše ovšem plyne ze známých tvrzení...*, nebo konkrétněji: ..., *který obdržíme triviálně jako důsledek jedné X-ovy věty.* Položíme-li např. X = S. Banach, stěží nám někdo bude oponovat.

Závažnost práce lze zvýšit bez většího úsilí užitím těchto slovních spojení: *Platnost odvozeného tvrzení se snadno rozšíří i na případ...*; *V případě... se uvedené úvahy pouze zjednoduší...*; *Bez újmy na obecnosti rozřešíme případ pro...* Složitější problém stačí pak jen formulovat. Užití těchto frází však vyžaduje od autora dostatečný talent, aby se vystříhal očividných chyb, resp. žádá méně pozorného čtenáře.

Věříme, že tento příspěvek obrátí pozornost k zajímavé problematice a alespoň některým bude stimulem k dalšímu studiu v této oblasti.

Doufáme, že jsme se vyhnuli příliš striktnímu rozboru jednotlivých frází, neboť by mohl přispět k nezdravé unifikaci českých matematických textů, čímž by utrpěla jejich jazyková čistota a krása. Ostatně čtenář, který se jen letmo seznámil s touto problematikou, snadno vyluští význam frází typu: *Důkazy uvedených tvrzení budou uveřejněny později* [návod: třeba se na to zapomene] ... (*Pokračování*) [návod: nikdo netvrdí kdy] apod.

Proslýchá se, že by bylo možné zřídit speciální sekci pro mluvený a psaný matematický jazyk — zájemcům by bylo možno pak z prostředků sekce pořídit či zapůjčit speciální drilová cvičení, zaměřená např. ke správnému užití elementárních vazeb se slovy *triviálně*, *snadno*, *zřejmě* apod.

Zpracováno podle citovaného pramenu

Hilbertovy problémy

O jedenáctém a dvanáctém Hilbertově problému

Jedenáctý a dvanáctý Hilbertův problém náležejí svým původem do teorie čísel současný stav bádání v této problematice je však staví do souvislosti s dalšími matematickými disciplínami, např. s teorií funkcí komplexní proměnné a s algebraickou geometrií.

Jedenáctý Hilbertův problém byl ve své době motivován tím, že tehdy již existovala dobře rozvinutá teorie kvadratických forem nad tělesem racionálních čísel. Hilbert doporučuje věnovat pozornost teorii kvadratických forem nad libovolným algebraickým číselným tělesem, zejména pak tomuto problému: Je dána kvadratická rovnice s libovolným počtem proměnných, jejíž koeficienty jsou prvky některého algebraického číselného tělesa. Mají se zkoumat řešení této rovnice v celých nebo zlomkových algebraických číslech patřících do základního tělesa.

Dvanáctý Hilbertův problém vychází z tzv. Kroneckerovy věty. Číselné těleso K se nazývá abelovským rozšířením tělesa racionálních čísel Q, jestliže je jeho normálním