Stanislav Trávníček

Faktorové prostory

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 14 (1969), No. 6, 254--265

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139300`

Literatura

[1] VAJDA J.: *Modelování ve vědě a technice*, Pokroky MFA *14* (1969) 123—131.

[2] ČULÍK K.: *On Mathematical Models and the Role of the Mathematics in Knowledge of Reality*, Kybernetika *2* (1966), 1—13.

[3] ČULÍK K.: *On Simulation Methods and on some Characteristics of Simulation Languages*, Proceedings of the IFIP Working Conference on Simulation Programming Languages in Oslo 1967, North-Holland, Amsterdam, 1968, 234—247.

[4] ČULÍK K.: *Jazyky pro empirii a teorii*, Kybernetika *4* (1968), 538—547.

FAKTOROVÉ PROSTORY

STANISLAV TRÁVNÍČEK, Olomouc

Tento článek se zabývá přenesením základních pojmů teorie faktorových grup (viz [1]) do teorie lineárních prostorů (viz např. [5]) a studiem některých vlastností faktorových prostorů. První část článku je rázu teoretického, ve druhé části je uvedeno praktické použití pojmu faktorový prostor v některých matematických disciplínách.

FAKTOROVÉ PROSTORY

Uvažujme lineární prostor $\mathfrak{L}$ nad číselným tělesem T koeficientů a zvolme libovolný jeho podprostor $\mathfrak{A}$. Na $\mathfrak{L}$ nyní definujeme relaci R.

Definice 1. Dva prvky $x, y \in \mathfrak{L}$ jsou v relaci R, jestliže $(x - y) \in \mathfrak{A}$, tj. $xRy \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - y) \in \mathfrak{A}$.

Lemma 1. Relace R je ekvivalencí, tj. je reflexívní, symetrická a tranzitivní.

Důkaz: (R): $(x - x) = 0$ (nulový prvek prostoru $\mathfrak{L}$) $\in \mathfrak{A} \Rightarrow xRx$ pro každé x;
(S): je-li xRy, pak $(x - y) \in \mathfrak{A}$, ale poněvadž $\mathfrak{A}$ je lineární prostor, je rovněž $(y - x) \in \mathfrak{A}$, tj. yRx;
(T): je-li xRy, yRz, pak $(x - y) \in \mathfrak{A}$, $(y - z) \in \mathfrak{A}$, tedy $(x - z) = [(x - $ $- y) + (y - z)] \in \mathfrak{A}$, takže xRz.

Definice 2. Dva prvky $x, y \in \mathfrak{L}$, které jsou v relaci R podle definice 1, nazýváme *ekvivalentní vzhledem k podprostoru* $\mathfrak{A}$.

Lemma 2. Ekvivalence prvků vzhledem k podprostoru $\mathfrak{A}$ definuje rozklad prostoru $\mathfrak{L}$ na třídy vzájemně ekvivalentních prvků.

Důkaz: Množinu všech těch prvků $z \in \mathfrak{L}$, pro něž zRx, nazveme třídou prvku

$x \in \mathfrak{L}$ a označíme ji X. Z reflexívnosti relace R plyne $x \in X$, tedy systém všech tříd má tu vlastnost, že každý prvek $x \in \mathfrak{L}$ je obsažen v některé třídě tohoto systému. Nechť X, Y jsou třídy prvků x, y. Je-li $y \in X$, pak z tranzitivnosti plyne pro každé $z \in Y$, že $z \in X$, tj. $Y \subset X$; je-li $z \in X$, pak ze symetrie máme $x \in Y$ (neboť $y \in X$) a z tranzitivnosti plyne $z \in Y$, tj. $X \subset Y$. Pro libovolný prvek $y \in X$ tedy platí $X = Y$, tj. třída X je definována libovolným svým prvkem. Jsou-li X, Y incidentní, tj. existuje prvek $z \in \mathfrak{L}$ tak, že $z \in X$, $z \in Y$, pak podle toho je $X = Z$, $Y = Z$, tedy $X = Y$. Různé třídy jsou tedy disjunktní.

Množinu tříd $X, Y, \ldots \subset \mathfrak{L}$ z lemmatu 2 označme $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$.

Lemma 3. Zvolme $x \in X$, kde $X \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$. Pak třída X je množinou všech prvků tvaru $x + a$, kde $a \in \mathfrak{A}$.

Důkaz: Je-li $x' \in X$, pak $a = (x' - x) \in \mathfrak{A}$, takže $x' = x + a$. Je-li naopak $a \in \mathfrak{A}$, pak $(x + a - x) = a \in \mathfrak{A}$, takže $(x + a) \in X$.

Definice 3. V množině $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ zavádíme lineární operace takto:

a) pro X, $Y \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ je součtem $X + Y$ tříd X, Y ta třída množiny $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, která obsahuje prvek $(x + y) \in \mathfrak{L}$, kde x (y) je libovolně zvolený prvek třídy X (Y);

b) pro $\alpha \in T$, $X \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ je součinem αX čísla α s třídou X ta třída množiny $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, která obsahuje prvek $\alpha x \in \mathfrak{L}$, kde x je libovolně zvolený prvek třídy X.

Lemma 4. Součet $X + Y$ tříd X, Y ani součin αX čísla α s třídou X nejsou závislé na volbě prvků x, y v třídách X, Y.

Důkaz: a) Nechť $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$, Z je třída obsahující $x' + y'$. Máme $(x - x') \in \mathfrak{A}$, $(y - y') \in \mathfrak{A}$ a rovněž $[(x + y) - (x' + y')] \in \mathfrak{A}$, takže $(x + y)\, R(x' + y')$, $Z = X + Y$.

b) Nechť $x, x' \in X$, Z je třída obsahující $\alpha x'$. Máme $(x - x') \in \mathfrak{A}$ a rovněž $(\alpha x - \alpha x') = \alpha(x - x') \in \mathfrak{A}$, takže $(\alpha x)\, R(\alpha x')$, $Z = \alpha X$.

Věta 1. Množina $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ s lineárními operacemi podle definice 3 je lineárním prostorem.

Důkaz plyne z definice 3 a axiómů lineárního prostoru. Nulovým prvkem je třída $\mathfrak{A}$, prvkem opačným k třídě X je třída $-X = (-1)\, X$.

Definice 4. Lineární prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ nazýváme *faktorový prostor* prostoru $\mathfrak{L}$ podle jeho podprostoru $\mathfrak{A}$.

Definice 5. Nechť $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou dva podprostory prostoru $\mathfrak{L}$ a $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ jsou příslušné faktorové prostory. Jestliže ke každému prvku $X \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ existuje prvek $Y \in \mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ tak, že $X \subset Y$, pak prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{L}/\mathfrak{B})$ nazýváme *zjemnění* (*zákryt*) prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A})$ a píšeme $\mathfrak{L}/\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ $(\mathfrak{L}/\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{L}/\mathfrak{A})$.

Poznámka 1. Snadno vidíme, že faktorový prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}$ $(\mathfrak{L}/\{0\} = \mathfrak{L})$ je zákrytem (zjemněním) každého faktorového prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$; nazveme jej největší (nejmenší) faktorový prostor.

Věta 2. Faktorový prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ je zjemněním prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ tehdy a jen tehdy, je-li $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$.

Důkaz: Nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, $X \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$. Zvolme libovolné dva prvky $x, x' \in X$, tedy $(x - x') \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$. Prvky x, x' jsou tedy ekvivalentní i vzhledem k podprostoru $\mathfrak{B}$.

Nechť nyní naopak je $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ zjemněním prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$. Označme $\mathfrak{B}'$ ten prvek prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$, jenž obsahuje $\mathfrak{A}$, tj. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}'$. Ovšem $0 \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}'$, tj. $\mathfrak{B}'$ obsahuje nulový prvek prostoru $\mathfrak{L}$. Poněvadž též $0 \in \mathfrak{B}$, máme $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$, tj. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$.

Definice 6. Společným zjemněním (zákrytem) faktorových prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ nazýváme faktorový prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{C}$ takový, který je zjemněním (zákrytem) současně obou prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$.

Definice 7. Největší společné zjemnění $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{B})$ faktorových prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ je faktorový prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{C}$ takový, že každé zjemnění obou prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ je současně i jeho zjemněním.

Věta 3. Největším společným zjemněním faktorových prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ je faktorový prostor $\mathfrak{L}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$.

Důkaz: Protože $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$ je faktorový prostor $\mathfrak{L}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ podle věty 2 zjemněním prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$.

Jestliže faktorový prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{C}'$ je zjemněním prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$, pak podle věty 2 je $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{B}$, tedy $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, takže $\mathfrak{L}/\mathfrak{C}'$ je rovněž zjemněním prostoru $\mathfrak{L}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$.

Definice 8. Nejmenší společný zákryt $[\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{B}]$ faktorových prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ je faktorový prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{C}$ takový, že každý zákryt obou prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ je současně i jeho zákrytem.

Věta 4. Nejmenším společným zákrytem faktorových prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ je faktorový prostor $\mathfrak{L}/(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ ($\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ je součet – nikoli sjednocení – podprostorů $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$).

Důkaz: Protože $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, je faktorový prostor $\mathfrak{L}/(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ podle věty 2 zákrytem prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$.

Jestliže faktorový prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{C}'$ je zákrytem prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$, pak podle věty 2 je $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}'$, tedy $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{C}'$, takže $\mathfrak{L}/\mathfrak{C}'$ je rovněž zákrytem prostoru $\mathfrak{L}/(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$.

Věta 5. Každý prvek Z největšího společného zjemnění prostorů $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ je průnikem $X \cap Y$ dvou vhodných tříd $X \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $Y \in \mathfrak{L}/\mathfrak{B}$.

Důkaz: Nechť Z je prvkem největšího společného zjemnění a $X \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $Y \in \mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ jsou ty třídy, pro něž podle definice zákrytu platí $Z \subset X$, $Z \subset Y$; pak ovšem $Z \subset \subset X \cap Y$.

Nechť nyní x, y jsou prvky množiny $X \cap Y$, tedy $(x - y) \in \mathfrak{A}$, $(x - y) \in \mathfrak{B}$, odkud $(x - y) \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Prvky x, y leží tedy v téže třídě Z prostoru $\mathfrak{L}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$, takže podle věty 3 máme $X \cap Y \subset Z$; proto $Z = X \cap Y$.

Věta 6. Každý prvek X prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ je incidentní se všemi těmi prvky prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$, které jsou spolu s X částí téhož prvku nejmenšího společného zákrytu.

Důkaz: Zvolme $Z \in [\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{B}]$ a v Z zvolme libovolné prvky $X \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $Y \in \mathfrak{L}/\mathfrak{B}$, tedy

$$X \subset Z\,, \quad Y \subset Z\,. \tag{1}$$

Zvolme dále $x \in X$, $y \in Y$; podle (1) je rovněž $x, y \in Z$. Podle věty 4 existuje prvek $c \in (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ tak, že $x - y = c$. Přitom $c = a + b$, kde $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$, tj. $x - y = a + b$, odkud

$$x - a = y + b\,. \tag{2}$$

Podle lemmatu 3 je $(x - a) \in X$, $(y + b) \in Y$, tedy (2) značí, že třídy $X \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $Y \in \mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ jsou incidentní.

Poznámka 2. Vlastnost popsanou ve větě 6 lze formulovat také takto: Faktorové prostory $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ jsou doplňkové.

Věta 7. Systém Λ všech faktorových prostorů prostoru $\mathfrak{L}$ podle jeho podprostorů je vzhledem k operacím ( ), [ ] uzavřený a spolu s těmito operacemi tvoří modulární svaz s krajními prvky, jimiž jsou největší a nejmenší faktorový prostor.

Důkaz: Lehce ověříme splnění axiómů modulárního svazu ([1]; 18, 6):

a) $[\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{B}] = [\mathfrak{L}/\mathfrak{B}, \mathfrak{L}/\mathfrak{A}]$;
b) $[\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{A}] = \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$;
c) $[\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, [\mathfrak{L}/\mathfrak{B}, \mathfrak{L}/\mathfrak{C}]] = [[\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{B}], \mathfrak{L}/\mathfrak{C}]\ (= \mathfrak{L}/(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}))$;
d) $[\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, (\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{B})] = \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ (neboť $\mathfrak{A} + \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$);
a′) $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{B}) = (\mathfrak{L}/\mathfrak{B}, \mathfrak{L}/\mathfrak{A})$;
b′) $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{A}) = \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$;
c′) $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, (\mathfrak{L}/\mathfrak{B}, \mathfrak{L}/\mathfrak{C})) = ((\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{B}), \mathfrak{L}/\mathfrak{C})\ (= \mathfrak{L}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}))$;
d′) $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, [\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{B}]) = \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ (neboť $\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$);

dále pro $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}$ je

m) $[\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, (\mathfrak{L}/\mathfrak{B}, \mathfrak{L}/\mathfrak{C})] = ([\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{B}], \mathfrak{L}/\mathfrak{C})$ (neboť $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cap \mathfrak{C}$)

a pro $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ je

m′) $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, [\mathfrak{L}/\mathfrak{B}, \mathfrak{L}/\mathfrak{C}]) = [(\mathfrak{L}/\mathfrak{A}, \mathfrak{L}/\mathfrak{B}), \mathfrak{L}/\mathfrak{C}]$ (neboť $\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$).

Definice 9. Nechť $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ jsou podprostory prostoru $\mathfrak{L}$.

Průsekem podprostoru $\mathfrak{C}$ s faktorovým prostorem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nazýváme faktorový prostor $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$; označujeme jej $(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}) \sqcap \mathfrak{C}$. Je-li $\mathfrak{C}$ pouze podmnožinou prostoru $\mathfrak{L}$, pak jejím průsekem s faktorovým prostorem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ rozumíme množinu všech průniků jednotlivých tříd prostoru $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ s množinou $\mathfrak{C}$.

Obalem podprostoru $\mathfrak{C}$ ve faktorovém prostoru $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nazýváme faktorový prostor $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} + \mathfrak{B})/\mathfrak{B}$; označujeme jej $\mathfrak{C} \sqsubset (\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$. Je-li $\mathfrak{C}$ pouze podmnožinou prostoru $\mathfrak{L}$, pak jejím obalem ve faktorovém prostoru $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ rozumíme množinu všech těch tříd faktorového prostoru $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, které jsou incidentní s množinou $\mathfrak{C}$.

Poznámka 3 (o vynucených zákrytech faktorových prostorů). Nechť $\mathfrak{B}$ je podprostor prostoru $\mathfrak{L}$ a nechť $\mathfrak{B}_0$ je podprostor prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$. Prvky podprostoru $\mathfrak{B}_0$ jsou tedy třídy prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$, mezi nimiž je ovšem i třída $\mathfrak{B}$ (nulový prvek). Podprostor $\mathfrak{B}_0$ definuje na $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ faktorový prostor $(\mathfrak{L}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_0$. Tento faktorový prostor vynucuje jistý zákryt faktorového prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ takto: Zákryt faktorového prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ vynucený faktorovým prostorem $(\mathfrak{L}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_0$ je faktorový prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, přičemž podprostor $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{L}$ je sjednocením všech prvků prostoru $\mathfrak{L}$, které jsou v těch prvcích (třídách) prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$, z nichž je složen podprostor $\mathfrak{B}_0$ v $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$. Podprostor $\mathfrak{B}_0$ je faktorovým prostorem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Dále budeme uvažovat podprostory $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{L}$.

Definice 10. Faktorové prostory $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$ se nazývají *spřažené*, jestliže každý prvek $X \in \mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$ je incidentní právě s jedním prvkem prostoru $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$ a současně každý prvek $Y \in \mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$ je incidentní právě s jedním prvkem prostoru $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$.

Lemma 5. Faktorové prostory $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$ jsou spřažené právě tehdy, platí-li současně

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{L}_1\,, \tag{3}$$

$$\mathfrak{L}_1 = \bigcup(\mathfrak{L}_2 \sqsubset \mathfrak{L}_1/\mathfrak{A})\,, \quad \mathfrak{L}_2 = \bigcup(\mathfrak{L}_1 \sqsubset \mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}) \tag{4}$$

(v (4) je $\mathfrak{L}_1$ sjednocením prvků obalu prostoru $\mathfrak{L}_2$ ve faktorovém prostoru $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$ a podobně $\mathfrak{L}_2$).

Důkaz: Nechť prostory $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$ jsou spřažené. Poněvadž $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou incidentní (obsahují nulový prvek), je $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}$, takže platí (3). Protože každý prvek faktorového prostoru $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$ je incidentní s některým prvkem prostoru $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$, tedy i s prostorem $\mathfrak{L}_2$, platí ve (4) první rovnost. Podobně každý prvek faktorového prostoru $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$ je incidentní s některým prvkem prostoru $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$, tedy i s prostorem $\mathfrak{L}_1$, takže ve (4) platí i druhá rovnost.

Nechť nyní naopak platí (3), (4). Z (3) plyne $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{B}$, tedy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ a rovněž $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{A}$, tedy $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$; poněvadž ovšem $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B} \cap \mathfrak{L}_1$, máme

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}\,. \tag{5}$$

Z první rovnosti (4) plyne, že každý prvek $X \in \mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$ je incidentní s $\mathfrak{L}_2$, tedy s některými prvky prostoru $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$; podobně z druhé rovnosti (4) plyne, že každý prvek $Y \in \mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$ je incidentní s $\mathfrak{L}_1$, tedy s některými prvky prostoru $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$. Nechť $X \in \mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$ je incidentní se dvěma různými prvky $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$. Existují tedy $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$ tak, že $y_1, y_2 \in X$, tj. $(y_1 - y_2) \in \mathfrak{A}$, přitom $(y_1 - y_2) \bar{\in} \mathfrak{B}$, přičemž ovšem $(y_1 - - y_2) \in \mathfrak{L}_2$. Tedy $(y_1 - y_2) \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{L}_2$, ale $(y_1 - y_2) \bar{\in} \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, což je spor s (5). Dané faktorové prostory jsou tedy spřažené.

Poznámka 4. Podmínka (3) je ekvivalentní s podmínkou

$$\mathfrak{L}_1/\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_2/\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{L}_1 , \tag{6}$$

jak plyne z definice průseku.

Věta 8. Nechť $\mathfrak{L} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{C}$ (symbol $\oplus$ značí přímý součet podprostorů, tj. $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} = \{0\}$). Faktorový prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ je izomorfní s prostorem $\mathfrak{C}$, přičemž izomorfismus je dán takto: Každému prvku $X \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ je přiřazen právě ten prvek $x \in \mathfrak{C}$, pro nějž $x \in X$.

Důkaz: Předně ukážeme, že v každé třídě $X \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ leží právě jeden prvek podprostoru $\mathfrak{C}$. Každý prvek $x \in X$ lze psát ve tvaru $x = a + c$, kde $a \in \mathfrak{A}$, $c \in \mathfrak{C}$. Podle lemmatu 3 platí $c \in X$, tj. každá třída X obsahuje alespoň jeden prvek podprostoru $\mathfrak{C}$. Kdyby obsahovala dva různé prvky x, y podprostoru $\mathfrak{C}$, pak by platilo $0 \neq (x - y) \in \mathfrak{A}$, $(x - y) \in \mathfrak{C}$, což je spor. Izomorfismus pak plyne z definice 3 a lemmatu 4. Přitom zřejmě prvku $0 \in \mathfrak{C}$ odpovídá třída $\mathfrak{A} \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$.

Věta 9. Nechť $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{D}$ jsou podprostory prostoru $\mathfrak{L}$ a platí

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{A}' , \quad & \mathfrak{C} &= \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{C}' , \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{B}' , \quad & \mathfrak{D} &= \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}' . \end{aligned} \tag{7}$$

Faktorové prostory $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$ jsou spřažené právě tehdy, je-li $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

Důkaz: 1. Nechť platí $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$. Poněvadž $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = \{0\}$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \{0\}$, platí (3). Dále zřejmě $\bigcup(\mathfrak{L}_2 \sqsubset \mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{L}_1$. Zvolme nyní $x \in \mathfrak{L}_1$, a nechť $X \in \mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$ je ten prvek faktorového prostoru, pro nějž $x \in X$. Podle věty 8 leží v X právě jeden prvek $c \in \mathfrak{C}$, ovšem $c \in \mathfrak{D}$, takže $c \in \mathfrak{L}_2$. Je tedy $X \in \mathfrak{L}_2 \sqsubset \mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$, tj. $x \in \bigcup(\mathfrak{L}_2 \sqsubset \mathfrak{L}_1/\mathfrak{A})$, proto $\mathfrak{L}_1 \subset \bigcup(\mathfrak{L}_2 \sqsubset \mathfrak{L}_1/\mathfrak{A})$. Platí tedy první rovnost (4). Podobně dostaneme i platnost druhé rovnosti (4), takže podle lemmatu 5 jsou faktorové prostory $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$ spřažené.

2. Nechť nyní naopak jsou faktorové prostory $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$ spřažené. Pak podle lemmatu 5 platí (5).

Zvolme $c \in \mathfrak{C}$, a nechť $X \in \mathfrak{L}_1/\mathfrak{A}$ je ta třída, pro kterou je $c \in X$. Podle předpokladu je tato třída incidentní právě s jednou třídou $Y \in \mathfrak{L}_2/\mathfrak{B}$, tedy existuje $x \in X$, $y \in Y$ tak, že $x = y$. Ve třídě Y je právě jeden prvek $d \in \mathfrak{D}$. Máme $x = c + a$, $y = d + b$, kde $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$. Prvky a, b, c, d rozložme ještě podle (7) a rovnost $x = y$ pak dává

$$a_0 + a' + c_0 + c' = b_0 + b' + d_0 + d' , \tag{8}$$

kde $a_0, b_0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, $c_0, d_0 \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}$, $a' \in \mathfrak{A}'$, $b' \in \mathfrak{B}'$, $c' \in \mathfrak{C}'$, $d' \in \mathfrak{D}'$. Prostor $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$ lze vyjádřit takto ($\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = \{0\}$):

$$\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{A}' \oplus \mathfrak{B}' \oplus \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{C}' \oplus \mathfrak{D}' ;$$

platí v něm podle (8)

$$0 = (a_0 - b_0) + a' - b' + (c_0 - d_0) + c' - d',$$

tedy $a_0 = b_0$, $c_0 = d_0$, $a' = b' = c' = d' = 0$. Pro každé $c \in \mathfrak{C}$ je tedy $c' = 0$, takže podle (7) je $\mathfrak{C}' = \{0\}$, $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$. Vyjdeme-li naopak od libovolného prvku $d \in \mathfrak{D}$, dostaneme analogickým postupem $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}$, tedy $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$, *c . b . d.*

Poznámka 5. Dva různé faktorové prostory prostoru $\mathfrak{L}$ nejsou spřažené.

Definice 11. Konečnou klesající posloupnost podprostorů prostoru $\mathfrak{L}$

$$((\mathfrak{A}) =)\, \mathfrak{A}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_\alpha$$

nazveme *řada podprostorů*, konečnou posloupnost příslušných faktorových prostorů

$$((\mathfrak{L}/\mathfrak{A}) =)\, \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\alpha$$

nazveme *řada faktorových prostorů.*

Mějme nyní řadu $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A})$ faktorových prostorů; nechť $X_\alpha \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\alpha$ a nechť $X_\gamma \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\gamma$ je právě ten prvek, pro nějž $X_\gamma \supset X_\alpha$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$. Platí tedy $X_1 \supset \ldots \supset X_\alpha$. Označme

$$\text{(9)} \qquad \overline{K}_\gamma X_\alpha = X_\gamma \sqcap \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_{\gamma+1}\ (\mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{A}_\alpha)\,.$$

Definice 12. Posloupnost rozkladů

$$([\overline{K}X_\alpha] =)\, \overline{K}_1 X_\alpha \to \ldots \to \overline{K}_\alpha X_\alpha$$

definovaných vztahem (9) nazveme *lokální řetězec* řady $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A})$ příslušný k prvku $X_\alpha \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\alpha$; prvek $X_\alpha \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\alpha$ nazveme *báze řetězce* $[\overline{K}X_\alpha]$. Množina $\tilde{A}$ skládající se z lokálních řetězců, jejichž báze jsou jednotlivé prvky prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\alpha$, se nazývá *varieta lokálních řetězců* příslušná k řadě $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A})$.

Věta 10. Varieta lokálních řetězců $\tilde{A}$ s lineárními operacemi

$$\text{(10)} \qquad [\overline{K}X_\alpha] + [\overline{K}X'_\alpha] = [\overline{K}(X_\alpha + X'_\alpha)]\,,$$

$$\text{(11)} \qquad \lambda[\overline{K}X_\alpha] = [\overline{K}(\lambda X_\alpha)]\ (\lambda \in T)$$

tvoří lineární prostor.

D ů k a z nechť si čtenář provede sám podle (10), (11) a axiómů lineárního prostoru. Nulovým prvkem je lokální řetězec $[\overline{K}\mathfrak{A}_\alpha]$, prvkem opačným k $[\overline{K}X_\alpha]$ je lokální řetězec $[\overline{K}(-X_\alpha)]$.

Lemma 6. Lokální řetězec $[\overline{K}(X_\alpha + X'_\alpha)]$ $([\overline{K}(\lambda X_\alpha)])$ má γ-tý člen $(X_\gamma + X'_\gamma) \sqcap \sqcap\, \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_{\gamma+1}(\lambda X_\gamma \sqcap \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_{\gamma+1})$, kde $X_\gamma \supset X_\alpha$, $X'_\gamma \supset X'_\alpha$ jsou prvky prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\gamma$.

Důkaz: Zvolme $(x_\alpha + x'_\alpha) \in (X_\alpha + X'_\alpha)$. Poněvadž $X_\alpha \subset X_\gamma$, $X'_\alpha \subset X'_\gamma$, platí $(x_\alpha + x'_\alpha) \in (X_\gamma + X'_\gamma)$, tj. $(X_\alpha + X'_\alpha) \subset (X_\gamma + X'_\gamma)$, tedy vzhledem k (9) dostáváme první část tvrzení. Podobně se dokáže i druhá část.

Definice 13. Nechť $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}' \leqq \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\alpha$. Zobrazení, které každému $X' \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}'$ přiřazuje lokální řetězec $[\bar{K}X_\alpha]$ s bází $X_\alpha \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\alpha$, kde $X' \subset X_\alpha$, nazveme *přirozené.*

Věta 11. Přirozené zobrazení prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\alpha$ na prostor $\tilde{A}$ je izomorfismus.

Důkaz plyne z věty 10 a ponechává se čtenáři.

Uvažujme nyní dvě řady faktorových prostorů

$$((\mathfrak{L}/\mathfrak{A}) =)\ \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\alpha$$

$$((\mathfrak{L}/\mathfrak{B}) =)\ \mathfrak{L}/\mathfrak{B}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{L}/\mathfrak{B}_\beta \ (\alpha, \beta \geqq 1)\,.$$

Podle věty 6 a poznámky 2 je každý faktorový prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\gamma$ doplňkový s každým faktorovým prostorem $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}_\delta$ $(\gamma = 1, \ldots, \alpha;\ \delta = 1, \ldots, \beta)$. Řekneme, že řady $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{L}/\mathfrak{B})$ jsou doplňkové.

Nechť dále $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{B}_\beta$; k řadám $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{L}/\mathfrak{B})$ utvořme variety lokálních řetězců $\tilde{A}$, $\tilde{B}$.

Definice 14. Jestliže ke každému prvku $[\bar{K}X_\alpha] \in \tilde{A}$ přiřadíme lokální řetězec $\bar{L}X_\alpha] \in \tilde{B}$ s touž bází $X_\alpha \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{L}/\mathfrak{B}_\beta$, pak toto zobrazení nazveme *kobaziální zobrazení* variety $\tilde{A}$ na varietu $\tilde{B}$.

Zřejmě platí:

Věta 12. Kobaziální zobrazení variety $\tilde{A}$ na varietu $\tilde{B}$ je izomorfismus.

Lineární prostory n-rozměrné

Nechť nyní $\mathfrak{L}$ je n-rozměrný lineární prostor, $\mathfrak{A}$ je jeho p-rozměrný podprostor $(0 \leqq p \leqq n$; pro $p = 0$ je $\mathfrak{A} = \{0\}$, pro $p = n$ je $\mathfrak{A} = \mathfrak{L})$.

Věta 13. Faktorový prostor $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ je $(n - p)$ – rozměrný.

Důkaz plyne z věty 8.

Poznámka 6. Nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$, p, q jsou rozměry podprostorů $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, tj. $p \leqq q \leqq n$, přičemž pro vlastní podprostory platí ostrá nerovnost. Podle věty 2 a věty 13 dostáváme, že rozměr libovolného zákrytu (zjemnění) faktorového prostoru není větší (není menší) než rozměr tohoto faktorového prostoru, přičemž pro vlastní zákryt (zjemnění) platí ostrá nerovnost.

Poznámka 7. Jestliže p, q, r jsou rozměry podprostorů $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ lineárního prostoru $\mathfrak{L}$, pak rozměr průseku $(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}) \sqcap \mathfrak{C}$ i obalu $\mathfrak{C} \sqsubset (\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ je nejvýše min $(p - q, r)$.

Poznámka 8. Je-li v řadě $(\mathfrak{L}/\mathfrak{A})$ rozměr posledního členu $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}_\alpha$ roven m, pak varieta lokálních řetězců $\tilde{A}$ je m-rozměrný lineární prostor.

Normované faktorové prostory

Nechť nyní $\mathfrak{L}$ je normovaný lineární prostor, tedy ke každému prvku $x \in \mathfrak{L}$ je přiřazeno nezáporné číslo $\|x\|$ (*norma* prvku x) tak, že pro všechna $x, y \in \mathfrak{L}$, $\lambda \in T$ platí

(n1) $\|x\| > 0$ pro $x \neq 0$, $\|x\| = 0$ pro $x = 0$,

(n2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, . \, \|x\|$,

(n3) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost).

Lemma 7. Je-li $\mathfrak{A}$ uzavřený podprostor prostoru $\mathfrak{L}$, lze ve faktorovém prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ definovat normu takto:

$$\|X\| = \inf_{x \in X} \|x\| \tag{12}$$

(viz [6], kap. II, § 8,4).

Důkaz: 1. Předně $\|\mathfrak{A}\| = 0$, neboť nulový prvek $0 \in \mathfrak{A}$. Kdyby pro některou třídu $X \neq \mathfrak{A}$ prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ platilo $\|X\| = 0$, pak by vzhledem ke (12) existovala posloupnost $\{x_n\}$ prvků $x_n \in X$ tak, že $\|x_n\| \to 0$, tj. $x_n \to 0$. Zvolme $x \in X$, pak $(x - x_n) \in \mathfrak{A}$, $x - x_n \to x$. Poněvadž $\mathfrak{A}$ je množina uzavřená, máme $x \in \mathfrak{A}$, tj. $X = \mathfrak{A}$, což je spor. Pro $X \neq \mathfrak{A}$ je tedy $\|X\| > 0$.

2. Platí

$$\|\lambda X\| = \inf_{z \in \lambda X} \|z\| = \inf_{x \in X} \|\lambda x\| = |\lambda| \inf_{x \in X} \|x\| = |\lambda| \, . \, \|X\| \, .$$

3. Platí

$$\|X + Y\| = \inf_{z \in (X+Y)} \|z\| = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \|x + y\| \leqq \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} (\|x\| + \|y\|) =$$

$$= \inf_{x \in X} \|x\| + \inf_{y \in Y} \|y\| = \|X\| + \|Y\|, \text{ c. b. d.}$$

Nechť je nyní v prostoru $\mathfrak{L}$ ke každému $x \in \mathfrak{L}$ definována *polonorma* $\|x\|'$, tedy nezáporné číslo takové, že pro všechna $x, y \in \mathfrak{L}$, $\lambda \in T$ platí (n2), (n3).

Lemma 8. Množina $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{L}$ všech prvků $r \in \mathfrak{L}$, pro něž $\|r\|' = 0$, je podprostorem prostoru $\mathfrak{L}$ (viz [6], tamtéž).

Důkaz: Nechť $r, s \in \mathfrak{A}$, $\lambda, \mu \in T$; užitím (n2), (n3) máme

$$\|\lambda r + \mu s\|' \leqq \|\lambda r\|' + \|\mu s\|' = |\lambda| \, . \, \|r\|' + |\mu| \, . \, \|s\|' = 0 \, .$$

Lemma 9. Je-li $\mathfrak{L}$ lineární prostor s polonormou a $\mathfrak{A}$ je podprostor všech prvků, jejichž polonorma je rovna nule, pak ve faktorovém prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ je definována norma

$$\|X\| = \|x\|' , \tag{13}$$

kde x je libovolný prvek třídy X (viz [6], tamtéž).

Důkaz: Nejprve dokážeme, že všechny prvky téže třídy $X \in \mathfrak{L}/\mathfrak{A}$ mají tutéž polonormu. Pro třídu $\mathfrak{A}$ je to zřejmé podle její definice. Uvažujme nyní třídu X a dva různé její prvky x, y (předpokládáme ovšem, že daná polonorma není normou, tedy $\mathfrak{A}$ i každá třída obsahuje alespoň dva různé prvky). Pak existuje prvek $r \in \mathfrak{A}$ tak, že

$$y = x + r\,, \quad x = y - r\,.$$

Odsud užitím (n3), (n2) máme jednak $\|y\|' \leqq \|x\|'$, jednak $\|x\|' \leqq \|y\|'$, tj. $\|x\|' = \|y\|'$; v (13) je tedy $\|X\|$ definována jednoznačně.

Máme tedy $\|\mathfrak{A}\| = 0$ a pro $X \neq \mathfrak{A}$ pak $\|X\| = \|x\|' > 0$, protože všechny prvky s nulovou polonormou jsou v $\mathfrak{A}$. Vlastnosti (n2), (n3) zůstávají zřejmě v platnosti i ve faktorovém prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$.

APLIKACE

Uvedeme nyní použití pojmu faktorový prostor v některých matematických disciplínách. Omezíme se však jen na zavedení faktorových prostorů a objasnění jejich konkrétního významu. Čtenář nechť se sám pokusí provést a realizovat i zde (zejména v následujících dvou částech) některé hlubší úvahy, jež byly naznačeny v první části tohoto článku pro libovolné faktorové prostory.

Řešení soustavy algebraických rovnic

Mějme homogenní soustavu lineárních rovnic

$$(14) \qquad f_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

hodnosti h nad tělesem T. Podle [2], kap. IV, věty 28,2 tvoří všechna řešení této soustavy (v tělese T) lineární prostor rozměru $n - h$ nad tělesem T.

Množinu všech n-tic čísel z tělesa T označme $\mathfrak{L}$; je to n-rozměrný lineární prostor. Množina $\mathfrak{A}$ všech řešení soustavy (14) je tedy podprostorem prostoru $\mathfrak{L}$.

Uvažujme dále nehomogenní soustavu

$$(15) \qquad f_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = c_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

příslušnou k téže homogenní soustavě (14).

Věta 14. Má-li soustava (15) řešení, pak množina X všech jejích řešení je třídou faktorového prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$. Všechna řešení soustavy (15) tedy dostaneme tak, že k libovolně zvolenému (vypočtenému) řešení nehomogenní soustavy připočteme všechna řešení příslušné homogenní soustavy. (Srovnej [2], kap. IV, věta 28,6.)

Důkaz: Je-li $p, q \in X$, je $f_i(p - q) = f_i(p) - f_i(q) = c_i - c_i = 0$, tedy $(p - q) \in \mathfrak{A}$. Patří proto p, q do téže třídy faktorového prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$. Nechť nyní naopak

$p \in X$ a q patří do téže třídy faktorového prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$, tj. $(q - p) \in \mathfrak{A}$. Pak $f_i(q) = f_i(q - p + p) = f_i(q - p) + f_i(p) = 0 + c_i = c_i$, tj. $q \in X$. Druhá část tvrzení této věty plyne z lemmatu 3.

Řešení lineárních diferenciálních rovnic

I když tu jde o dosti odlišnou tematiku vzhledem k předchozí aplikaci, nacházíme zde těsnou analogii, založenou ovšem právě na obecných vlastnostech faktorových prostorů.

Mějme homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\, y' + a_n(t)\, y = 0\,, \tag{16}$$

kde koeficienty $a_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ jsou reálné funkce spojité na intervalu j. Z teorie diferenciálních rovnic je známo, že řešení rovnice (16) tvoří n-rozměrný lineární prostor, jehož bází je soustava lineárně nezávislých partikulárních řešení $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (viz [4], kap. II, § 1) definovaných na j ([4], kap. I, § 3,4). Obecné řešení je tedy $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, kde C_i jsou libovolné reálné konstanty.

Označme $\mathfrak{L}$ množinu všech funkcí majících na j spojitou n-tou derivaci a nechť $\mathfrak{A}$ je množina všech řešení rovnice (16); je tedy $\mathfrak{A}$ podprostorem prostoru $\mathfrak{L}$.

Uvažujme nyní nehomogenní rovnici

$$L[y] = f(t) \tag{17}$$

s touž levou stranou jako (16), přičemž $f(t)$ je funkce spojitá na j.

Věta 15. Množina X všech řešení rovnice (17) je třídou faktorového prostoru $\mathfrak{L}/\mathfrak{A}$. Obecné řešení nehomogenní rovnice (17) dostaneme tedy tak, že k libovolnému (jednomu) řešení nehomogenní rovnice (17) připočteme obecné řešení příslušné homogenní rovnice (16). (Srovnej [4], kap. II, § 1,5*v*.)

Důkaz je analogický jako u věty 14.

Příklad z teorie míry

V teorii míry není zcela snadné sestrojit množiny, které nejsou měřitelné podle Lebesguea. Podáme zde konstrukci jisté množiny A, ovšem důkaz její neměřitelnosti si musí čtenář vyhledat v citované literatuře.

Uvažujme množinu Z všech reálných čísel jako lineární prostor nad tělesem R všech racionálních čísel. Množina R je ovšem sama podprostorem prostoru Z (nad R). Vytvořme faktorový prostor Z/R.

Lemma 10. Každá třída $X \in Z/R$ je incidentní s libovolným intervalem $\langle a, b \rangle$ s kladnou délkou.

Důkaz: Zvolme číslo $x \in X$ a nechť nejprve $x < a$. Zvolme racionální číslo $r \in (0, b - a)$. Pak některé z čísel $x + mr$, kde m je vhodné přirozené číslo, leží v $\langle a, b \rangle$ a též $(x + mr) \in X$. Podobně pro $x > b$.

Zvolme nyní v každé třídě faktorového prostoru Z/R číslo x tak, aby $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$; množinu všech těchto čísel x označme A, zřejmě $A \subset \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

Množina A není měřitelná podle Lebesguea. (Viz [3], kap. III, § 6.)

Lebesgueův prostor

Nechť L je množina všech funkcí integrace schopných podle Lebesguea na intervalu $\langle a, b \rangle$. Víme, že L je lineární prostor s polonormou: je-li $\varphi \in L$, pak $\|\varphi\|' = \mathrm{I}|\varphi|$. Přitom $\mathrm{I}|\varphi| = 0$ právě tehdy, je-li $\varphi = 0$ skoro všude na intervalu $\langle a, b \rangle$ (tj. nejvýše s výjimkou množiny nulové míry). Označme L_0 prostor všech funkcí, které jsou skoro všude rovny nule.

Podle lemmatu 9 je faktorový prostor L/L_0 prostorem s normou. Jsou-li φ, ψ dvě funkce z téže třídy $X \in L/L_0$, platí $\varphi = \psi$ skoro všude a $\mathrm{I}\varphi = \mathrm{I}\psi$. Prakticky to znamená, že z hlediska Lebesgueova integrálu není třeba vzájemně odlišovat funkce, které jsou si rovny skoro všude, a každou funkci je třeba považovat za reprezentanta celé třídy faktorového prostoru L/L_0. Tento prostor se nazývá *Lebesgueův*. ([6], kap. IV, § 3,6.)

Literatura

[1] Borůvka O.: *Základy teorie grupoidů a grup*, ČSAV, Praha 1962.

[2] Kořínek V.: *Základy algebry*, ČSAV, 2. vyd., Praha 1956.

[3] Natanson I. P.: *Teorija funkcij veščestvennoj peremennoj*, GITTL, 2. vyd. Moskva 1957.

[4] Sansone G.: *Equazioni differenziali nel campo reale* I, IL, rus. vyd., Moskva 1953.

[5] Šilov G. E.: *Vvedenije v teoriju linejnych prostranstv*, GITTL, Moskva 1952 Leningrad.

[6] Šilov G. E.: *Matematičeskij analiz* (specialnyj kurs), GIFML, Moskva 1961.

TEPLOTA A REALIZACE JEJÍ STUPNICE PLYNOVÝM TEPLOMĚREM

Jiří Hrbek, Praha

POJEM TEPLOTY

Teplota je jeden z nejdůležitějších fyzikálních pojmů, který je v naší představě sice zdánlivě jasný, protože máme fyziologickou schopnost pociťovat změny teploty, ale přesnou její definici lze podat teprve na základě vlastností termodynamické rovnováhy [1] [2].