Miroslav Ouhrabka; Ivo Volf

Fyzikální meta olympiáda

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 18 (1973), No. 6, 344--350

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139544

[5] *Lehrplan für Physik, Klasse 9 und 10.* Volk und Wissen, Berlin 1969.
[6] *Physics* (*P.S.S.C.*). D.C. Heath and Comp., Boston 1960.
[7] *Harvard Project Physics. A Progress Report.* The Phys. Teacher, *5* (1967), č. 5, s. 198.
[8] Šachmajev, N. N., *Někotoryje voprosy metodiky prepodavanija razděla „Kolebanija i volny"*. Fizika v škole, *31* (1971), č. 3, s. 57.

Fyzikální metaolympiáda

Uplynul příliš krátký čas od publikování prvních úloh fyzikální metaolympiády v Pokrocích, abychom mohli provádět hodnocení. Přesto však je patrné, že ne všichni účastníci pochopili účel řešení zařazených úloh. Domníváme se, zejména pokud jde o úlohy označené D, že hlavním úkolem řešitele je zaměřit se na didaktickou stránku problematiky, poukázat na uzlové body v procesu řešení, stanovit podmínky řešitelnosti, míru zjednodušení problémové situace a snažit se o systematický zápis procesu řešení. Učitelé by tedy měli být úlohami vyprovokováni k bohatší metodické činnosti. Stručně řečeno: hlavní není úlohu vyřešit, ale řešit ji. Chtěli bychom na stručném zápisu řešení úlohy D 1 ukázat, jak by se dal náš záměr realizovat.

Úloha: Stanovte podmínky, za nichž dosáhne koulař hranice 20 m. Víme, že koule opustí ruku sportovce ve výšce $h = 2$ m nad zemí. Problém ze skutečnosti zjednodušte potřebným způsobem.

Řešení:

Text úlohy popisuje fyzikální stránku jedné ze sportovních činností – vrh koulí. Popis pohybu tělesa zaměníme popisem pohybu hmotného středu koule, neboť její průměr lze zanedbat vzhledem k dalším rozměrům. Budeme uvažovat pohyb v homogenním tíhovém poli bez odporu vzduchu, který má na tvar dráhy a na dostřel nepatrný vliv. Potom lze považovat tento pohyb koule za šikmý vrh vzhůru. Zavedeme označení podle obr. 1. V grafickém popisu situace vyznačíme znakem $[0; h]$ bod, v němž koule opustí ruku koulaře a místo dopadu koule bude $[d; 0]$. Potom platí pro libovolný bod $[x; y]$ dráhy

$$x = vt \cos \varphi \tag{1}$$

$$y = vt \sin \varphi - \tfrac{1}{2} gt^2 + h \tag{2}$$

Ze vztahu (1) je $t = x/v \cos \varphi$, což dosadíme do (2):

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - gx^2/2v^2 \cos^2 \varphi + h\,. \tag{3}$$

Dráha koule je tedy za uvedených podmínek částí paraboly. K řešení úlohy nelze použít vědomostí známých žákům o vrhu šikmém vzhůru z I. ročníku gymnasia (viz učebnice [1]). Jak je vidět z obr. 2, maximálního dostřelu d_{max} dosáhneme pro menší úhel, než je $\alpha' = 45°$. Zdánlivý paradox, odporující dosavadním vědomostem žáků, vysvětlíme tím, že místo, v němž koule opouští ruku koulaře, a místo dopadu nejsou ve stejné výškové úrovni. Popis situace blíže rozvádí článek [2]. Tam se ukazuje, že řešení úlohy o maximálním dostřelu je po matematické stránce dosti náročné. Proto budeme danou problematiku řešit jinak.

Uvažovanou část parabolické dráhy můžeme realizovat tímto způsobem: Představme si, že koule byla vržena z určitého místa na zemi jistou počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$ pod jistým úhlem α tak, že v místě $[0; h]$, ze kterého vrhal sportovec kouli skutečně, měla právě rychlost $\mathbf{v}$. Pro jistou čtveřici veličin h, d, $|\mathbf{v}|$, φ existuje taková parabola právě jedna.

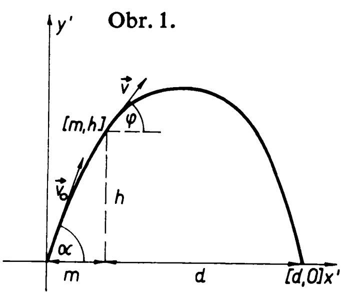
Pro různé body $[x; y]$ paraboly lze určit $\operatorname{tg} \varphi = \Delta y / \Delta x$. Funkce $z = \operatorname{tg} \varphi(x)$ je podle obr. 1 funkcí klesající; potom je $\operatorname{tg} \varphi < \operatorname{tg} \alpha$. Předpokládáme-li, že jde o šikmý vrh vzhůru, bude $0° < \alpha < 90°$ a $0° < \varphi < 90°$. Potom platí $\varphi < \alpha$.

Uvažme předpoklad, že maximální dostřel nastává pro úhel $\varphi < \alpha = 45°$. Budeme-li znát v_0, zjistíme i v a φ.

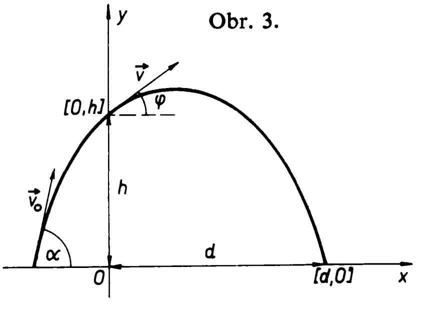
K řešení úlohy zavedeme novou soustavu souřadnic (x', y') podle obr. 3. Potom platí pro každý bod paraboly

$$x' = v_0 t \cos \alpha \tag{4}$$

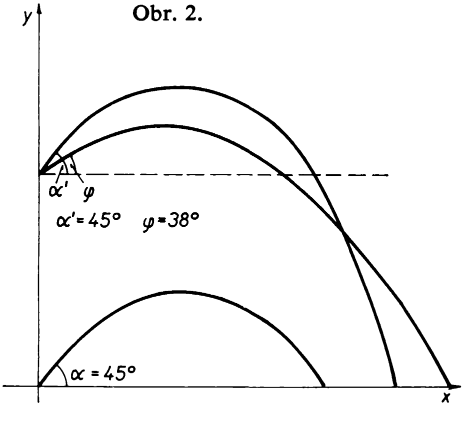
$$y' = v_0 t \sin \alpha - \tfrac{1}{2} g t^2 . \tag{5}$$



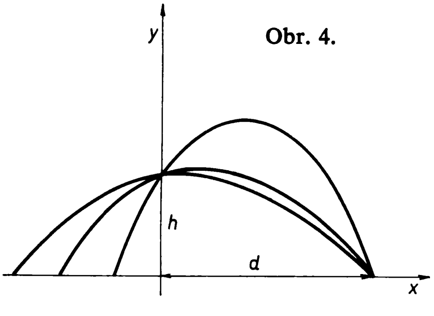
Obr. 1.



Obr. 3.



Obr. 2.



Obr. 4.

Maximální vzdálenost vrhu je dána podmínkou $y' = 0$, tedy

$$v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2 = 0 . \tag{6}$$

Odtud kořen $t_1 = 0$ nevyhovuje podmínkám úlohy, $t_2 = 2v_0 \sin\alpha / g$. Vzdálenost $m + d$ se určí

$$m + d = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} . \tag{7}$$

Podle podmínky v textu úlohy lze usoudit, že pro $x' = m$ platí $y' = h$. Abychom se vyhnuli derivování, užijeme tohoto postupu:

$$m = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - d . \tag{8}$$

Z rovnice (4) lze určit čas T pro $x' = m$:

$$T = \frac{m}{v_0 \cos\alpha} . \tag{9}$$

Zapíšeme další podmínku: v čase T je $y = h$, takže

$$h = v_0 T \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g T^2 ,$$

$$h = m \operatorname{tg}\alpha - \frac{g m^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} .$$

Do tohoto výrazu dosadíme za m z rovnice (8) a po algebraických úpravách získáme vztah

$$v_0 = \sqrt{\frac{g d^2}{(d \sin 2\alpha - 2h \cos^2\alpha)}} . \tag{10}$$

Tím je úloha vyřešena obecně; můžeme volit kterýkoli z parametrů d, α za podmínky, že výraz pod odmocnítkem bude nezáporný a přitom $v_0 \geqq 0$. Dále postupujeme takto:

Zdá se být logické, že má-li vzdálenost d představovat „maximální sportovní výkon" koulaře, volíme optimální dráhu koule pro $\alpha = 45°$. Proto

$$v_0 = \sqrt{\frac{g d^2}{(d - h)}} \text{ a se značnou přesností } v = \sqrt{\frac{g d^2}{d + h}} .$$

Protože $d = 20$ m, $h = 2$ m, budou číselné výsledky pro dané hodnoty (rozměrovou zkoušku není potřeba provádět písemně): $v_0^2 = 218 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$; tedy $v_0 \doteq 14{,}8 \text{ m s}^{-1}$ podle vztahu (10). Dále $v_x = v_0 \cos\alpha \doteq 10{,}5 \text{ m s}^{-1}$.

Podle vztahu (8) je $m \doteq 2{,}2$ m. Podle (9) je $T = m/v_x = 0{,}21$ s.

Určíme ještě složku v_y v bodě $[m; h]$: $v_y = v_0 \sin\alpha - gT \doteq 8{,}4 \text{ m s}^{-1}$. Velikost rychlosti v bodě $[m; h]$ $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} \doteq 13{,}4 \text{ m s}^{-1}$.

Úhel φ stanovíme ze vztahu $\operatorname{tg} \varphi = v_y : v_x \doteq 0{,}8$, tedy $\varphi \doteq 38°40'$.

Uvážíme-li podmínky dané v úloze i zjednodušující předpoklady uvedené v rámci fyzikální analýzy úlohy, dosáhne sportovec hranice 20 m v případě, že koule opustí jeho ruku ve výšce $h = 2$ m nad zemí rychlosti $v = 13{,}4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ pod úhlem $\varphi = 38°40'$ k horizontu. Obecný výpočet počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}$ vrhu koule vychází ze vztahu (10), takže $\boldsymbol{v}$ závisí jak na počáteční výšce koule nad zemí, tak na vzdálenosti, jíž se má dosáhnout.

Diskuse řešení: V průběhu řešení jsme učinili některé předpoklady, jež podstatně ovlivnily nejen způsob matematického zpracování, ale i fyzikální oprávněnost řešení daného vztahem (10). Obr. 4 ukazuje, že existuje více než jedna parabola, která prochází body $[0; h]$, $[d; 0]$; ke každé parabole přísluší jiná počáteční rychlost v_0, úhel α a odpovídající vzdálenost m. Při řešení jsme dále předpokládali, že je-li výraz $(m + d)$ maximální, bude též dostřel d maximální. To však platí jen pro $h \to 0_+$ (neboli pro $m \to 0_+$), tj. řešení je přípustné pouze pro $h \ll d$. Lze také ukázat, že pro $h = d$ neexistuje žádná parabola taková, aby úhel $\alpha = 45°$. Proto je uvedené řešení pouze přibližné; přesnost výsledku pro $h \ll d$ však postačuje.

K dosažení přesnějšího řešení se vraťme k obr. 1 a vztahům (1) a (2). Platí

$$x = vt \cos \varphi \tag{1}$$

$$y = vt \sin \varphi - \tfrac{1}{2} g t^2 + h\,. \tag{2}$$

Z počátečních podmínek plyne: $t = 0$, pak $x = 0$, $y = h$, dále pro $x = d$ je $y = 0$. Ze vztahu (1) dosadíme za čas t do (2) a dostaneme

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v^2 \cos^2 \varphi} + h\,. \tag{3}$$

Pro místo dopadu je $y = 0$, $x = d$:

$$0 = d \operatorname{tg} \varphi - \frac{g d^2}{2 v^2 \cos^2 \varphi} + h\,.$$

Existuje tedy při daných hodnotách d, h jednoznačný vztah mezi v a φ. Cílem řešení je zvolit rychlost v co možná nejmenší, jíž odpovídá minimální kinetická energie $W_k = \frac{1}{2} m v^2$, v tom případě se koulař „namáhá“ co nejméně a koule dopadne právě do vzdálenosti d od něho. Odtud

$$v^2 = \frac{g d^2}{2(h + d \operatorname{tg} \varphi) \cos^2 \varphi}\,, \tag{11}$$

$$v = \sqrt{\frac{g d^2}{2(h + d \operatorname{tg} \varphi) \cos^2 \varphi}}\,. \tag{12}$$

Lze psát

$$v = C[(h + d \operatorname{tg} \varphi) \cos^2 \varphi]^{-1/2}\,.$$

kde $C = \sqrt{g d^2/2}$. Hledáme minimální hodnotu v a k ní odpovídající úhel φ:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = -\tfrac{1}{2} C[(h + d \operatorname{tg} \varphi)\cos^2 \varphi]^{-3/2} \,.$$

$$.\left[2\cos\varphi(-\sin\varphi)(h + d \operatorname{tg}\varphi) + \cos^2\varphi \frac{d}{\cos^2\varphi}\right].$$

Podmínka pro existenci extrému je $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\varphi = 0$, tedy

(13) $$d - h \sin 2\varphi - d \sin 2\varphi \operatorname{tg} \varphi = 0$$

a odtud

(14) $$\operatorname{tg} 2\varphi = \mathrm{d}/h \,.$$

Tedy

(15) $$\varphi_{\min} = \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} d/h \,.$$

Důkaz, že pro φ dané vztahem (15) nastává minimum, provedeme pomocí druhé derivace $\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}\varphi^2$.

Dále platí

(16) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-h + \sqrt{(h^2 + d^2)}}{d},$$

(17) $$\cos^2\varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi},$$

(18) $$\cos^2\varphi = \frac{d^2}{2h^2 - 2h\sqrt{(h^2 + d^2)} + 2d^2}.$$

Po dosazení ze vztahů (16) a (18) do vztahu (12) vychází po úpravě

(19) $$v_{\min} = \sqrt{g}\sqrt{[\sqrt{(h^2 + d^2)} - h]} \,.$$

a po další úpravě

(20) $$v_{\min} = \sqrt{\left[\frac{g d^2}{\mathrm{d}\sqrt{(1 + h^2/d^2)} + h}\right]}.$$

Obecně je tedy odpověď na problém úlohy dána vztahy (15) a (20). Kontrolu výsledků provedeme limitními případy. Pro $h \to 0_+$ platí

$$\lim_{h\to 0_+} \operatorname{tg} 2\varphi = \lim_{h\to 0_+} \frac{d}{h} = +\infty \,.$$

Potom $2\varphi = \pi/2$, $\varphi = 45°$.

Současně pro $h \to 0_+$ je

$$\lim_{h\to 0_+} v_{\min} = \lim_{h\to 0_+} \sqrt{[\sqrt{(h^2 + d^2)} - h]}\sqrt{g} = \sqrt{(g d)} \,.$$

Pro parabolu s úhlem vrhu $\alpha = 45°$ a dálkou dostřelu d platí $x_{max} = v^2/g = d$, tedy $v = \sqrt{(gd)}$, tj. $\lim_{h \to 0_+} v_{min} = v$. Vztah $v_{min} = \sqrt{[gd^2/(d + h)]}$ je platný pro $h \ll d$, takže dřívější řešení s úvahou, že parabola pro počáteční úhel vrhu $\alpha = 45°$ je energeticky nejvýhodnější, představuje pouze přiblížení skutečnému výsledku.

Pro dané hodnoty $h = 2$ m, $d = 20$ m je $\operatorname{tg} 2\varphi = 10$; $\varphi = 42°10'$. Minimální počáteční rychlost, kterou je třeba kouli pod tímto úhlem hodit, aby dopadla právě do vzdálenosti d_1, je $v_{min} \doteq 13{,}3 \text{ m s}^{-1}$.

Poznámka: Obvykle se dosažení dvacetimetrové hranice označuje v obecném jazyce jako „sportovní výkon", ačkoliv jde o jistou vzdálenost. Pro uvedení koule z klidu do pohybu s rychlostí $\boldsymbol{v}$ za čas Δt je potřeba vykonat určitou práci a lze odhadnout výkon sportovce. Předpokládejme, že se koule pohybovala v ruce sprotovce rovnoměrně zrychleně se zrychlením $a = v/\Delta t$, tj. koulař uvádí kouli do pohybu konstantní silou $F = ma = mv/\Delta t$. Dráhu koule v ruce sportovce zvolíme $s = 2$ m, proto výkon

$$P = \frac{A}{\Delta t} = \frac{Fs}{\Delta t}.$$

Na druhé straně lze výkon stanovit z velikosti kinetické energie

$$P = \frac{W_k}{\Delta t},$$

kde $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ je kinetická energie koule v okamžiku, kdy opouští ruku sportovce. Srovnáním obou vztahů pro výkon lze stanovit odhadem dobu pohybu koule v ruce sportovce $\Delta t = 2s/v$, kde za s dosadíme velikost dráhy pohybu koule v ruce sportovce. Tedy výkon

$$P = \frac{mv^2}{4s} v = \frac{mv^3}{4s}.$$

Rozměrová zkouška:

$$[P] = \frac{\text{kg m}^3\ \text{s}^{-3}}{\text{m}} = \text{kg m}^2\ \text{s}^{-3} = \text{W}.$$

Pro dané hodnoty $m = 7{,}25$ kg, $s = 2$ m, $v \doteq 13{,}3 \text{ m s}^{-1}$ je $P = 2{,}2 \cdot 10^3$ W. Výkon sportovce je asi 2,2 kW.

Didaktické závěry

Úlohu je možno řešit několika způsoby, jež závisí na stupni zjednodušení problémové situace. Zvolenému způsobu řešení odpovídá i míra přesnosti výsledku.

a) Na základě analýzy podle obr. 2 je možno usoudit, že koule musí opustit ruku koulaře pod úhlem $\varphi < 45°$. Jestliže žák pochopí tuto skutečnost, dostává se nad rámec poznatků o šikmém vrhu, předepsaných osnovami fyziky na gymnasiu.

b) Realizace vrhu koule z fiktivního bodu na povrchu země je dalším přiblížením k vyřešení problému. Ukazuje se, že lze úlohu řešit prostředky středoškolské matematiky. Předpoklad $\alpha = 45°$ je však nesprávný a řešení platí pouze pro $h \ll d$.

c) Úplné řešení vyžaduje znalost matematické analýzy; přesto i zde bylo nutno učinit řadu zjednodušujících předpokladů. Toto řešení je vhodné pro žáky vyšších ročníků gymnasia.

Poznámka: Řešení úloh se sportovními náměty je vhodnou motivací pro uvedení i poměrně náročných fyzikálních problémových situací do vyučování fyzice, popř. i do práce žáků mimo školu. Proto je třeba uvítat např. práce [3].

Literatura:

[1] *Fyzika pro I. ročník SVVŠ. Praha*, 1964, 221 s.

[2] Volf, I.: *Vrh koulí očima fyziky*. Fyzika ve škole, *3* (1965), č. 7, s. 325—329.

[3] Bednařík, M. - Malečková, R.: *Sportovní tematika ve fyzikálních úlohách*. Matematika a fyzika ve škole, *2* (1972), č. 5, s. 310—316.

Miroslav Ouhrabka, Ivo Volf

---

jubilea & zprávy

K PÄŤDESIATINÁM PROFESORA JÁNA JAKUBÍKA

Dňa 8. októbra 1973 oslávil svoje päťdesiate narodeniny jeden z najvýznamnejších slovenských matematikov, profesor RNDr. Ján Jakubík, DrSc. Roky, ktoré zostávajú za ním, sú vyplnené tvorivou prácou — vedeckou, pedagogickou i organizačnou. Po absolvovaní Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského začínal profesor Jakubík ako asistent na Slovenskej vysokej škole technickej v Bratislave. Keď sa v päťdesiatych rokoch znovu zakladalo v Košiciach vysoké technické školstvo, prišiel do Košíc ako jeden z prvých učiteľov a počas dvadsiatich rokov doterajšej existencie Vysokej školy technickej venoval jej výstavbe a rozvoju nemálo svojich síl a schopností. Na tejto škole pôsobí vo funkcii profesora doteraz.

Ťažiskom vedeckej práce profesora Jakubíka je abstraktná algebra. Venuje sa predovšetkým algebraickým štruktúram s usporiadaním. Výsledky, ktoré v tejto oblasti dosiahol, sú predmetom záujmu popredných matematikov celého sveta. Profesor Jakubík netvorí izolovane; naopak, je v stálom styku s našimi i zahraničnými matematikmi pracujúcimi v rovnakom alebo v príbuzných oboroch. Jeho práce sú často riešeniami aktuálnych problémov, ktoré sú v popredí záujmu výskumných pracovníkov; práve preto majú široký ohlas v matematickej verejnosti.

Okrem vedeckej práce si hlboké uznanie zaslúži vedecko-organizačná činnosť profesora Jakubíka. Vyvíja ju vo vedeckých kolégiách matematiky SAV a ČSAV, pôsobí tiež v re-