Marcel Berger

Konvexita (1. část)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 38 (1993), No. 3, 129--146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139564

Konvexita

(1. část)

Marcel Berger

Marcel Berger: Narozen v Paříži (1927). Po získání doktorátu na základě disertace *Holonomní grupy Riemannových variet* (pod vedením A. Lichnerowicze) působil v letech 1955–1974 jako profesor na univerzitách ve Strasbourgu, Nice a v Paříži. V letech 1974–1985 byl ředitelem výzkumu v CNRS (Státní středisko vědeckého výzkumu). Od r. 1985 je ředitelem IHES (Ústav pro vyšší vědecká studia). Působil také na MIT (1956–57) a na University of California v Berkeley (1961–62). V r. 1981 přednášel na University of Pennsylvania v rámci Rademacherovy profesury. V letech 1979–81 byl prezidentem Francouzské matematické společnosti. Od r. 1982 je členem korespondentem Francouzské akademie věd. Je redaktorem a výkonným redaktorem řady matematických časopisů, výkonným redaktorem žluté série *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, vydávané nakladatelstvím Springer. Publikoval na 45 článků z riemannovské geometrie a tři knihy (Springer-Verlag): *Geometrie I* a *II*, *Diferenciální geometrie: variety, křivky a plochy* (společně s Gostiaux) a *Problémy z geometrie* (spoluautoři: Berry, Pansu a St. Raymond).

Jak uvidíme, konvexita je velmi stará disciplína s kořeny sahajícími přinejmenším k Archimedovi. Víceméně se těšila stálé přízni a nyní zaznamenává vítězný návrat na scénu. Ten částečně souvisí se vznikem lineárního programování a s počátky počítačové éry v šedesátých letech. Mezi skvělé výsledky, které přinesla geometrická metoda do analýzy, spadají také atraktivní poznatky o konvexních tělesech.

Konvexita je přitom mimořádně jednoduchý a přirozený pojem. Věříme proto, že čtenář ochotně přijme následující výklad. Je sám o sobě zajímavý: ilustruje určitá — víceméně klasická — matematická fakta, která je však důležité si uvědomit, jakkoli se nám mohou jevit jako paradoxní. První z nich je, že existují snadno formulovatelné otázky a problémy (jako v teorii čísel), na něž je odpověď stále neznámá nebo byla získána až v nedávné době, často za pomoci velice náročných postupů z jiných částí matematiky. Druhým takovým faktem je, že k řešení elementárních geometrických problémů formulovaných v našem obyčejném dvourozměrném či třírozměrném prostoru jsme nuceni užívat abstrakci a mimo jiné „přejít do nekonečna“ či do prostoru vyšší dimenze. A konečně, že intuice je někdy zavádějící.

S ohledem na omezenou délku článku nemohu vyčerpat všechno. Vlastně jsem musel zvolit pouze několik oblastí. Výběr byl založen na přirozenosti, jednoduchosti, osobním vkusu a na ilustraci právě uvedených faktů. Standardní partie, které jsem opravdu nemohl zařadit, okrajově komentuji v poslední části článku.

Marcel Berger: *Convexity.* American Mathematical Monthly *97* (1990), 650-678. Přeložili Ivan Netuka a Jiří Veselý. Obrázky podle originálních náčrtů narýsovala Alena Šarounová.

Materiál je uspořádán takto:

1. Konvexita je přirozený pojem; historické příklady
2. Přesné definice; příklady
3. Johnův-Loewnerův elipsoid; aplikace
4. Konvexní funkce; příklady a aplikace
5. Mnohostěny: čtyři „elementární" problémy
6. Dvě algebraické operace na množině konvexních těles: dualita a sčítání
7. Topologie na množině všech konvexních těles: intuice je nebezpečná
8. Stručný přehled dalších důležitých partií konvexity

Při přípravě tohoto textu mi mj. pomáhali Peter Gruber a Vitali Milman. S potěšením jim na tomto místě děkuji.

1. Konvexita je přirozený pojem; historické příklady

Slova *konvexní* a *konkávní* se v umění užívají běžně, jak ukazuje tato poznámka o moderním sochařství:

> *Tato socha odráží vliv kubismu vzájemnou optickou provázaností* konkávních *a* konvexních *tvarů a ve využití prázdna k vyjádření hmoty. (Z publikace* Poklady Izraelského muzea v Jeruzalémě, *Ženeva, 1985.)*

Totéž platí o učebnicích anatomie:

> Menisky neboli poloměsíčité vazivové chrupavky. *Vzhledem k jejich utváření neodpovídají kloubní plochy tibie kondylům femoru. Soulad vzniká prostřednictvím kloubních menisků neboli poloměsíčitých vazivových chrupavek, vložených mezi tibii a femur. Tyto vazivové chrupavky, tak jako kloubní plochy tibie, jsou zevní a vnitřní. Každá z nich je trojúhelníkovitá prizmatická lamela stočená do poloměsíčitého tvaru.*
>
> *Rozeznává se na nich: horní* konkávní *plocha, stýkající se s kondyly femoru, spodní plocha, která je v kontaktu s periférií příslušné kloubní plochy tibie; zevní neboli obvodová plocha (základna prizmatu), která je* konvexní *a velmi tlustá, připojená ke kloubnímu pouzdru; vnitřní neboli centrální okraj,*

Alexander Archipenko (1887–1964): *Žena, která si češe vlasy.* Bronz.
Collection Israel Museum, Jerusalem
Photo credit: Israel Museum

který je konkávní, *ostrý a jehož* konkavita *je obrácena ke středu styčné kloubní plochy.*

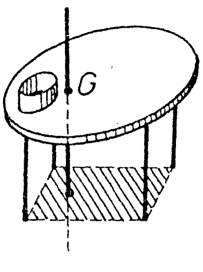
(Překlad *) z klasické Rouvièrovy francouzské učebnice anatomie.)

Povšimněme si, že konvexita a konkavita vystupují jako natolik samozřejmé pojmy, že se nemusí vymezovat ani v textech o umění nebo anatomii!

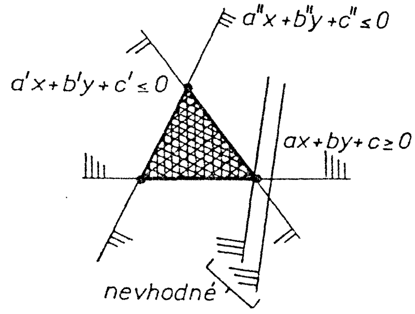
Archimedes (asi 250 let př.n.l.) explicitně vyslovil tvrzení, že vnitřní křivka na níže uvedeném obrázku je kratší než vnější, pokud je vnitřní křivka konvexní. To zřejmě neplatí, pokud konvexní není (obr. 1).

Poinsot (kolem r. 1800) si všímal konvexity při studiu statiky. Vyslovil např. tvrzení, že pro zaručení stability níže načrtnutého stolu je potřeba, aby svislá přímka procházející těžištěm protínala podložku uvnitř konvexního obalu (viz část 2) množiny tvořené nohami stolu (obr. 2).

Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

Ve srovnatelnou dobu také Fourier studoval statiku a byl veden ke studiu simultánních lineárních nerovnic typu ilustrovaného na obr. 3.

Byl dostatečně bystrý, aby si uvědomil nutnost určení těch skutečně podstatných nerovnic (viz část 5). To byl začátek lineárního programování, které se začalo rozvíjet v šedesátých letech našeho století. Spadá do něj např. otázka: Najděte maximum funkce $y = x_1 - x_2 + 2x_3$, pokud

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &\leqq 5\,, \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 - 4x_4 &\leqq 2\,, \\ x_1 &\geqq 0\,. \end{aligned}$$

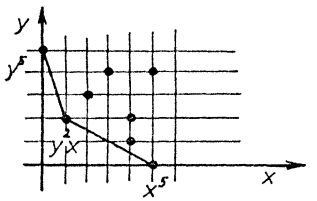
*) Za pomoc s překladem děkujeme MUDr. M. Ryšavému z LF UK v Praze. Na doporučení recenzenta uvádíme české termíny: kondyl = kloubní hrbol, femur = stehenní kost, tibie = = holenní kost. (Pozn. překl.)

Na řešení takových problémů existuje velká řada počítačových programů. Poznámka ze začátku článku se týká toho, že to nejzajímavější z lineárního programování (za použití počítače) spočívá ve zpracování velkého počtu nerovnic a proměnných. Odtud vyplývá potřeba (v žádném případě luxus vnucovaný matematiky) pracovat a rozvíjet intuici ve vícerozměrných prostorech.

Již okolo r. 1720 užíval Newton podstatně konvexitu při hledání lokálního tvaru rovinných reálných algebraických křivek v singulárním bodě (jakkoli složitém). Jeho řešení bylo docela úplné, jak ukazuje tento příklad:

$$2y^5 + y^4x^3 - 7y^4x^5 + 3y^3x^2 - y^2x^4 - 5y^2x + yx^4 + x^5 = 0\,.$$

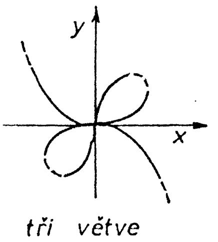
Budeme vyšetřovat singularitu v počátku $(0,0)$. V jiném případě toho lze dosáhnout posunutím souřadnicové soustavy. Nyní vyznačme tučně každý mřížový bod (m,n) roviny $\mathbb{R}^2$ patřící k nenulovému členu $a_{m,n}x^my^n$ rovnice křivky.



Obr. 4.

Potom načrtněme konvexní obal (starejme se pouze o západní a jižní část) této množiny bodů, čímž dostaneme několik úseček. Pro každou úsečku vybereme dva členy odpovídající v dané rovnici koncovým bodům úsečky. V každém případě načrtněme lokálně křivku vyjádřenou rovnicí s těmito dvěma členy. Newtonova věta říká, že bez ohledu na další vyznačené body, sjednocení načrtnutých křivek představuje *lokální* tvar celé křivky. Podrobnosti a obecnou teorii lze nalézt ve [14] a [36].

$$2y^5 - 5y^2x = 0, \qquad x^5 - 5xy^2 = 0$$
$$2y^3 - 5x = 0, \qquad x^4 - 5y^2 = 0$$
$$5x = 2y^3, \qquad x^2 = \sqrt{5}y \quad \text{a} \quad x^2 = -\sqrt{5}y$$
$$(x^5 - 5xy^2 + 2y^5 = 0)$$



Obr. 5.

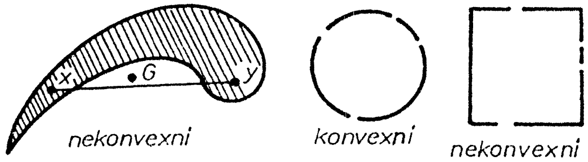
2. Přesné definice; příklady

V následujících částech 2–6 budeme pracovat výhradně ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^d = \{\, x = (x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{R}\,\}$. Podle povahy studovaného problému budeme tento prostor uvažovat s kanonickou euklidovskou metrikou

$$\varrho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_d - y_d)^2}$$

nebo bez ní.

Říkáme, že podmnožina K prostoru $\mathbb{R}^d$ je *konvexní*, jestliže pro každé x a y z množiny K je úsečka $[x,y]$ s koncovými body x a y obsažena v K, tj. $[x,y] \subset K$. Níže uvedené obrázky dávají představu o konvexních a nekonvexních množinách. Protože otevřený kruh $x^2+y^2 < 1$ spolu s *jakoukoli* částí hranice (kružnice $x^2+y^2 = 1$) je konvexní, budeme vždy pracovat s *otevřenými* nebo *uzavřenými* konvexními množinami. Poznamenejme, že pro čtverec se věci mají jinak. Pro každý případ připomínáme, že se množina $K \subset \mathbb{R}^d$ nazývá *otevřená*, jestliže je každý její bod středem nějaké otevřené koule $B(x,r) = \{ y : d(x,y) < r \}$ $(r > 0)$ obsažené v K. Nazývá se *uzavřená*, když její *doplněk* $\mathbb{R}^d \setminus K$ je otevřený. To je ekvivalentní výroku, že limita x každé konvergentní posloupnosti $\{x_i\}$ bodů z K leží v K.



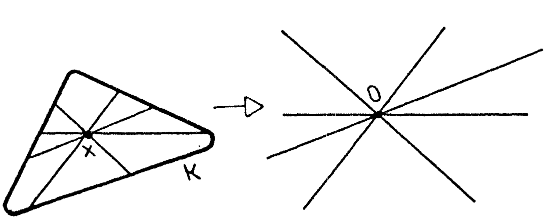
Obr. 6.

Zde jsou tři bezprostřední vlastnosti konvexních množin:

První z nich byla známa již Archimedovi: jestliže K je deska v $\mathbb{R}^2$ nebo těleso z určitého materiálu v $\mathbb{R}^3$, potom obsahuje svoje těžiště. Všimněme si, že se nepožaduje konstantní hustota.

Druhá vlastnost: podívejme se na následující dvě metriky na libovolné podmnožině K v $\mathbb{R}^d$. První z nich ϱ_R je tzv. *indukovaná* metrika (z euklidovské struktury $\mathbb{R}^d$), tedy $\varrho_R(x,y) = \varrho(x,y)$ pro každé $x, y \in K$; ϱ je euklidovská metrika v $\mathbb{R}^d$. Druhá metrika označovaná ϱ_K je tzv. *vlastní* (nebo vnitřní) a $\varrho_K(x,y)$ je definováno jako infimum délek všech křivek spojujících x, y a ležících zcela v K. Snadno se pak nahlédne, že K je konvexní, právě když ϱ_K je identické s ϱ_R.

Třetí vlastnost patří do světa algebraické topologie, která studuje vlastnosti objektů, které závisí pouze na zobrazeních zachovávajících topologii, a to zejména těch vlastností, které jsou invariantní vzhledem ke spojitým deformacím. Ve skutečnosti jsou všechny otevřené konvexní množiny ekvivalentní, speciálně ekvivalentní s $\mathbb{R}^d$. Pro algebraického topologa tedy konvexní množiny nejsou předmětem zájmu. Důkaz je jednoduchý: vytvořte spojité zobrazení $K \to \mathbb{R}^d$ tak, že vezmete libovolný bod $x \in K$ a roztáhnete každý omezený paprsek v K s počátkem v x na odpovídající neomezený paprsek v $\mathbb{R}^d$.



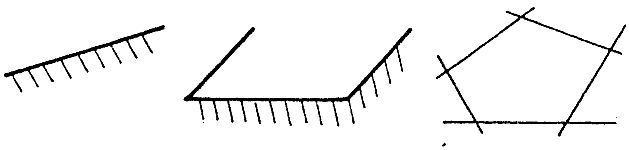
Obr. 7.

Následující konkrétní příklady konvexních množin mají základní význam:

(i) Každý ze dvou *poloprostorů* (otevřený nebo uzavřený) určený nadrovinou (tedy množinou popsanou rovnicí typu

$$\sum_{i=1}^{d} a_i x_i = b\,,$$

kde nejsou všechna a_i nuly) je konvexní. Poloprostory jsou pro konvexitu stavebními kameny. Klasický výsledek (jehož důkaz není těžký) totiž říká, že každá uzavřená konvexní množina je průnikem všech uzavřených poloprostorů, které ji obsahují; viz část 6. Navíc lze toho vždy dosáhnout pomocí spočetného systému poloprostorů.

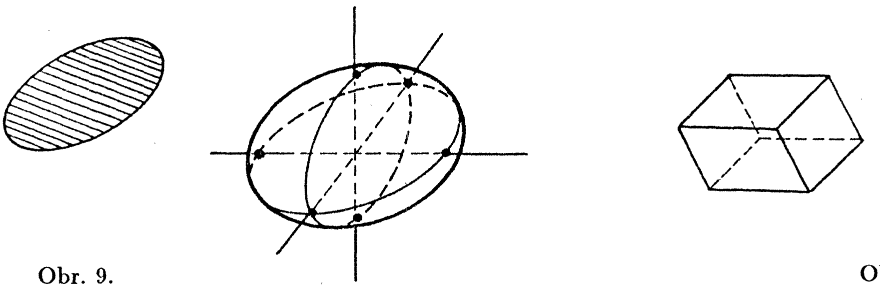


Obr. 8.

(ii) Uzavřený *elipsoid*

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leqq 1\,.$$

Je důležité poznamenat, že — pokud není do $\mathbb{R}^d$ zavedena žádná euklidovská struktura — jsou všechny elipsoidy (afinně) ekvivalentní. Speciálně jsou všechny ekvivalentní standardní uzavřené kouli $\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \leqq 1$ (obr. 9).

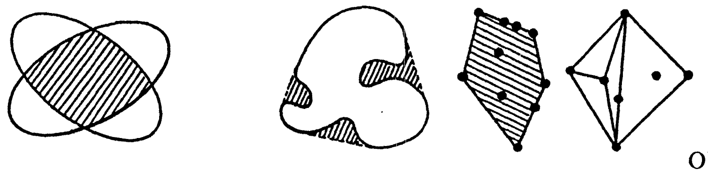


Obr. 9. Obr. 10.

(iii) Uzavřený *rovnoběžnostěn* je množina, kterou lze zapsat (po posunutí) ve tvaru $\{(x_1,\ldots,x_d) : |x_i| \leqq 1,\ i = 1,\ldots,d\}$ vzhledem k vhodné bázi prostoru $\mathbb{R}^d$ (obr. 10). Všechny rovnoběžnostěny jsou (afinně) ekvivalentní standardní *krychli* $\{x : |x_i| \leqq 1,\ i = 1,\ldots,d\}$ (zde jsou použity standardní souřadnice v $\mathbb{R}^d$). Při úvahách metrického charakteru však mohou být rovnoběžnostěny velmi rozdílné.

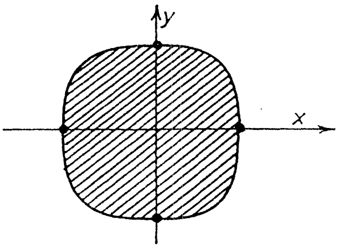
(iv) Každý průnik (dokonce ne nutně spočetný) konvexních množin je konvexní. Má tedy smysl mluvit o nejmenší konvexní množině obsahující danou množinu $A \subset \mathbb{R}^d$

a nazvat ji *konvexní obal* množiny A. V dalším bude označován $\operatorname{conv}(A)$. *Mnohostěn* je konvexní obal *konečné* množiny. Poznamenejme, že ne všechny body jsou nutné; ty opravdu nutné se nazývají *vrcholy*, či extremální body mnohostěnu.



Obr. 11.

(v) Množiny $|x|^\lambda + |y|^\lambda \leqq 1$ v $\mathbb{R}^2$ jsou konvexní pro všechna reálná čísla $\lambda \geqq 1$. Důkaz není zřejmý; viz část 4.



Obr. 12.

3. Johnův-Loewnerův elipsoid; aplikace

Zde uvedeme výsledek, který je zároveň jednoduchý — nikoli triviální — a mimořádně silný. Nalezli ho zcela nezávisle F. John (který studoval mechaniku) a C. Loewner (který studoval zobrazení pomocí komplexních funkcí), a to ve čtyřicátých letech. (Případ $d = 2$ sahá k Behrendovi do třicátých let.) Výsledek říká, že pro každou omezenou množinu A (s neprázdným vnitřkem) v $\mathbb{R}^d$ existuje *právě jeden* elipsoid E obsahující A a mající minimální objem (připomeňme, že všechny elipsoidy mají střed v počátku).

Obr. 13.

Objem elipsoidu $\sum_{i=1}^{d}(x_i^2/a_i^2) \leqq 1$ se chápe v elementárním smyslu, tedy jako kanonická míra v $\mathbb{R}^d$ (se standardní euklidovskou metrikou). Platí

$$\operatorname{vol}\left(\sum_{i=1}^{d} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leqq 1\right) = \left(\prod_{i=1}^{d} a_i\right) \cdot \operatorname{vol}\left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \leqq 1\right).$$

To plyne z věty o substituci z teorie integrálu. Označíme $\beta(d)$ objem standardní koule $\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \leqq 1$. Hodnotu této důležité funkce lze nalézt v některých učebnicích z integrálního počtu, viz [6]; je totiž

$$\beta(d = 2k) = \frac{\pi^k}{k!},$$

$$\beta(d = 2k + 1) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k + 1)},$$

neboli dohromady

$$\beta(d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\big((d/2) + 1\big)},$$

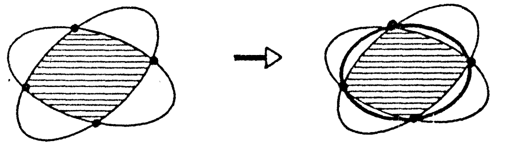
pokud znáte Γ-funkci.

Pokud jste o tom nikdy nepřemýšleli, zkoumejte pro rostoucí d chování $\beta(d)$. Spočtěte speciálně první hodnotu d, pro niž $\beta(d) < 1$ (objem jednotkové krychle). Důležité je asymptotické chování $\beta(d)$; viz část 6. Ze Stirlingovy formule se dostane

$$\beta(d) \sim \text{konstanta} \cdot \left(\frac{2\pi e}{d}\right)^{(d+2)/2} \quad \text{pro } d \to \infty .$$

To umožňuje porovnání $\beta(d)$ s 2^d, což je objem krychle opsané jednotkové kouli. Odkazujeme na zajímavou aplikaci na konci části 5 A.

Vraťme se k Johnovu-Loewnerovu tvrzení. Existence vyplyne ze snadného argumentu založeného na kompaktnosti. Pouze dejte pozor, abyste vyloučili degenerované elipsoidy. To je zaručeno právě podmínkou o neprázdnosti vnitřku množiny A. Důkaz jednoznačnosti veďte sporem. Ukažte, že k daným dvěma různým elipsoidům stejného objemu existuje třetí elipsoid menšího objemu, který obsahuje jejich průnik. Výpočet zjednodušte pomocí převedení pozitivních kvadratických forem simultánně na diagonální tvar. Jiný důkaz je uveden v příští části.



Obr. 14.

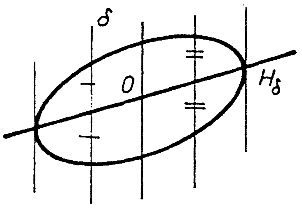
Johnův-Loewnerův elipsoid se nyní často užívá při studiu konvexních množin v čisté i aplikované matematice; viz [19]. Uvedeme tři aplikace v různých oblastech.

První aplikace se týká teorie kvadrik (resp. kuželoseček v rovině). Elipsoid E má vlastnost (nazývá se diametrální), která spočívá v existenci nadroviny souměrnosti pro každý systém δ rovnoběžných přímek v $\mathbb{R}^d$. To znamená, že existuje nadrovina H_δ přiřazená δ taková, že souměrnost definovaná dvojicí (δ, H_δ) zachovává E. Jsou elipsoidy jediné podmnožiny A v $\mathbb{R}^d$ mající tuto vlastnost pro každý systém rovnoběžných přímek? Kladná odpověď se snadno získá užitím Johnova-Loewnerova elipsoidu E

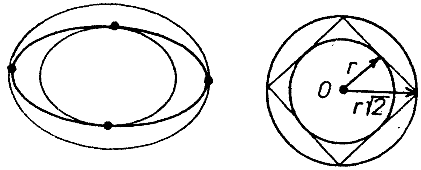
množiny A. Nádenický důkaz — zkuste si ho — je už pro $d = 2$ velice zapeklitý (a ne příliš poučný). Pro $d = 2$ byl proveden Bertrandem a Brunnem (obr. 15).

Druhá aplikace se týká geometrické teorie grup: říká, že *každá kompaktní* podgrupa úplné lineární grupy $GL(d;\mathbb{R})$ v $\mathbb{R}^d$ zachovává některou euklidovskou strukturu v $\mathbb{R}^d$. Zvolme libovolný bod $x \neq 0$ v $\mathbb{R}^d$ a vytvořme Johnův elipsoid pro jeho orbitu $G(x)$. Elipsoid určuje kýženou kvadratickou formu; jednoznačnost je zde ovšem zásadní. Poznamenejme obecněji, že zkoumaná kompaktní grupa se může zvolit v úplné grupě $\mathrm{Aff}(d;\mathbb{R})$ všech afinních zobrazení v $\mathbb{R}^d$ (dovoluje se posunutí). Podle Archimedova výsledku z úvodní části je totiž těžiště orbity $G(x)$ invariantní vzhledem ke G, takže ho můžeme zvolit za počátek. Ve vhodné formulaci má uvedený existenční výsledek grupově teoretický charakter: dvě maximální kompaktní podgrupy G, G' grupy $GL(d;\mathbb{R})$ jsou konjugované, tj. existuje g z $GL(d;\mathbb{R})$ tak, že $G' = gGg^{-1}$. Ve skutečnosti to je speciální případ obecného výsledku Elie Cartana o tom, že taková konjugovanost kompaktních maximálních podgrup platí v libovolné Lieově grupě.

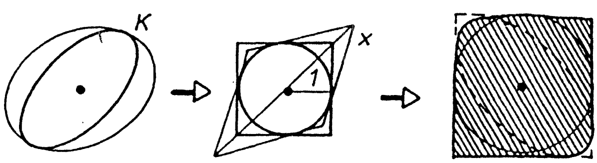
Třetí aplikace se týká toho, co měl vlastně F. John na mysli. Nazvěme *konvexním tělesem* kompaktní podmnožinu v $\mathbb{R}^d$ s neprázdným vnitřkem. Potom pro každé konvexní těleso K v $\mathbb{R}^d$, které je souměrné vzhledem k počátku (tj. platí tedy $-x \in K$, kdykoli $x \in K$) existuje elipsoid E takový, že $E \subset K \subset \lambda E$ a $\lambda \leqq \sqrt{d}$. Krychle ukazuje, že tento odhad je optimální (obr. 16).



Obr. 15.



Obr. 16.



Obr. 17.

Opět lze postupovat sporem. Použitím duality (viz část 6, je-li třeba) zaveďme elipsoid maximálního objemu obsažený v K a představujme si ho (po vhodném lineárním zobrazení — viz (ii) z části 2) jako jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^d$ (obr. 17).

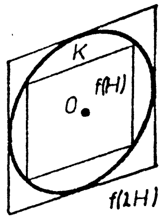
Předpokládejme, že existuje $x \in K$, pro něž $\|x\| > \sqrt{2}$. Podle předpokladu o souměrnosti bude K obsahovat oblast vyšrafovanou v obrázku. Jednoduché počítání (opět užijme převedení na standardní krychli) ukazuje, že koule vepsaná do této krychle je obsažená v K a má větší objem než je objem jakéhokoli vepsaného elipsoidu.

Ze dvou důvodů stojí za zmínku faktor $\sqrt{d}$ při opisování a vepisování elipsoidu.

První z nich je *Banachova-Mazurova struktura* na množině všech souměrných konvexních těles v $\mathbb{R}^d$, která je definována takto: pro dvě konvexní tělesa K, H

(souměrná vzhledem k počátku) označme λ nejmenší číslo, pro něž existuje lineární zobrazení f na prostoru $\mathbb{R}^d$ takové, že $f(H) \subset K \subset f(\lambda H)$. Potom se $d(K, H) = \lambda$ nazývá Banachova-Mazurova vzdálenost (přesněji řečeno, po faktorizaci množiny konvexních těles vzhledem k lineárním izomorfismům, má $\log d(K, H)$ vlastnosti metriky). Johnův výsledek prostě říká, že vzdálenost mezi souměrným konvexním tělesem a jednotkovou koulí je vždy nejvýše $\log \sqrt{d}$. Říká, že banachovská struktura v $\mathbb{R}^d$ nikdy není příliš daleko od euklidovské struktury!

Druhý důvod souvisí s následující velice jednoduchou otázkou: jaká je největší Banachova-Mazurova vzdálenost od jednotkové krychle? To je případ (viz úvod), kdy odpověď není dodnes známa. Cílem je stlačit souměrné konvexní těleso mezi dva podobné rovnoběžnostěny co nejtěsněji. Hodnota $\sqrt{d}$ nevyhovuje. Szarek dokázal v r. 1987, že je třeba alespoň $\sqrt{d} \log d$. Optimální odhady stále nejsou známy. A ještě dvě poznámky: Za prvé, Szarkova konstrukce příkladů není ve skutečnosti explicitní, ale je založena na teorii pravděpodobnosti. To je technika dnes rozšířeně uplatňovaná v teorii konvexity. Myšlenka spočívá v tom, že pro „obecné" konvexní těleso K jsou body dotyku K s optimální krychlí daleko od jakékoli ortonormální báze. Na druhé straně, úhly jsou docela malé. Za druhé — to je velmi obecná poznámka — kvůli praktickým aplikacím v teoretické harmonické analýze nebo numerické analýze je mnohem důležitější mít asymptotické odhady pro dimenzi d blížící se k nekonečnu, než explicitní hodnoty. V r. 1988 dokázali Szarek a Talagrand, že asymptoticky je Banachova-Mazurova vzdálenost mezi krychlí a jakýmkoli souměrným konvexním tělesem vždycky řádově $d^{7/8}$. Soudí se, že řád je $\sqrt{d} \log d$ (až na určitou univerzální konstantu). Viz [33].



Obr. 18.

4. Konvexní funkce; příklady a aplikace

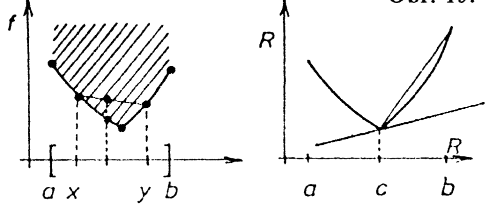
Nejjednodušší pojem pro začátek je konvexní reálná funkce definovaná na intervalu, řekněme uzavřeném intervalu $[a, b]$, na reálné ose:

$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se nazývá konvexní (resp. ryze konvexní), jestliže

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leqq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

(resp. totéž se znaménkem $<$),

kdykoli platí $a \leqq x < y \leqq b$ a $0 < \lambda < 1$.



Obr. 19.

Jinak řečeno, graf f leží vždy pod tětivou spojující jakékoli jeho body. Jednodušeji: konvexita f je ekvivalentní požadavku, aby „*nadgraf*" funkce f (tj. množina $\{(x, y) : x \in [a, b],\ y \geqq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$) byl konvexní. Indukcí se jednoduše dostane

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_i \in [a, b], \quad \lambda_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 .$$

Konvexní funkce jsou nutně dost regulární: mají všude derivaci zprava a derivaci zleva, které se nemusejí shodovat, i když množina bodů, v nichž se neshodují, je nejvýše spočetná. Zejména jsou skoro všude (tj. až na množinu míry nula) diferencovatelné, ve skutečnosti spojitě diferencovatelné. Mají také skoro všude druhou derivaci $f'' \geqq 0$. Nejdůležitější je obrácené tvrzení: jestliže f'' existuje a je nezáporná (resp. kladná) všude, potom je f konvexní (resp. ryze konvexní). Tento jednoduchý výsledek je neuvěřitelně silný. Uveďme dva standardní a základní příklady:

(i) $f(x) = -\log x$ na $[1, \infty)$ dává nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \geqq \prod_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i}, \qquad \lambda_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1;$$

zejména platí

$$a_1 \dots a_n \leqq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n .$$

To je snadné pro $n = 2$, ale počínaje $n = 3$ už ne zřejmé.

(ii) $f(x) = x^p$, $p \geqq 1$. Po šikovném (nikoli hlubokém) počítání se dostane Hölderova nerovnost

$$\sum_i x_i y_i \leqq \Big(\sum_i x_i^p \Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_i y_i^q \Big)^{1/q}, \quad \text{přičemž} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

a Minkowského nerovnost:

$$\Big(\sum_i |x_i + y_i|^p \Big)^{1/p} \leqq \Big(\sum_i |x_i|^p \Big)^{1/p} + \Big(\sum_i |y_i|^p \Big)^{1/p}.$$

Tato nerovnost říká, že množina $|x|^\lambda + |y|^\lambda \leqq 1$ je v $\mathbb{R}^2$ konvexní. To není zřejmé ani pro $\lambda = 4$.

Pojem konvexity se dá rozšířit na funkce definované na podmnožině K v $\mathbb{R}^d$:

$$f(lx + (1-l)y) \leqq l f(x) + (1-l) f(y),$$

takže zřejmě nutnou podmínkou, aby tento požadavek měl smysl, je konvexita množiny K v $\mathbb{R}^d$. Obecné konvexní funkce jsou také dost regulární. Mají vždycky skoro všude diferenciál, ve skutečnosti jsou skoro všude třídy C^1. Platí více: jsou skoro všude třídy C^2, tj. mají druhý diferenciál $f'' \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, který je tam pozitivní kvadratickou formou. Obrácení, podobně jako u intervalu, platí i zde.

Konvexní funkce mají dvě základní vlastnosti, kterých se užívá v teoretické i aplikované matematice. Nabývají maxima v hraničním bodě definičního oboru. Ryze konvexní funkce nabývá minima v nejvýše jednom bodě. Z této vlastnosti se dá také dokázat jednoznačnost Johnova-Loewnerova elipsoidu. Ztotožněte elipsoid $\mathbb{R}^d$ s (pozitivně definitní) kvadratickou formou a uvažujte všechny tyto kvadratické formy jako body v $\mathbb{R}^{d(d+1)/2}$. To se udělá např. pomocí zobrazení

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j \longrightarrow \big((\underset{\substack{\| \\ a_{ji}}}{a_{ij}})\big) \in \mathbb{R}^{d(d+1)/2}.$$

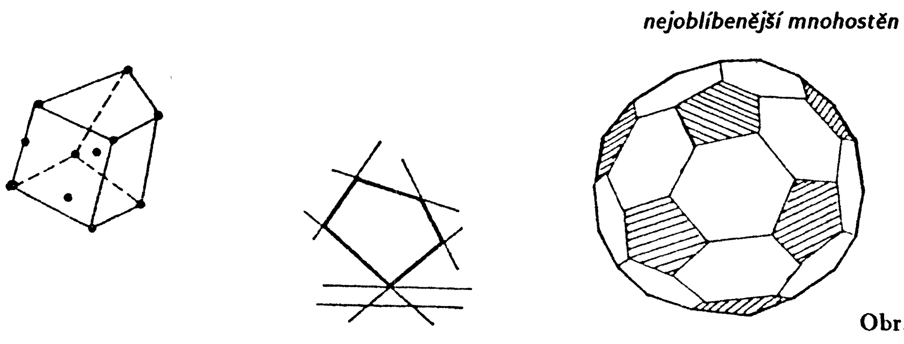
To je typický příklad toho, jak matematikové tvoří postupné úrovně abstrakce. Objem $\mathrm{vol}\big(E(q)\big)$ elipsoidu odpovídajícího bodu q se rovná $\big(\det(q)\big)^{-1/2} \cdot \beta(d)$, kde det znamená determinant. Ověřte, že funkce $q \mapsto \big(\det(q)\big)^{-1/2}$ je striktně konvexní.

Regularitě konvexních funkcí se ještě budeme věnovat v části 7. Základní příklad je uveden v částech 5 a 6, viz Brunnova-Minkowského nerovnost.

5. Mnohostěny: čtyři „elementární“ problémy

Připomeňme, že *mnohostěn* v $\mathbb{R}^d$ je konvexní obal konečně mnoha bodů z $\mathbb{R}^d$; jestliže je $d = 2$, mluvíme o (konvexním) mnohoúhelníku. Jeho *vrcholy* jsou ty skutečně nezbytné body; všechny, které nejsou užitečné, by měly být vyloučeny. Není těžké nahlédnout (viz např. část 6), že mnohostěn je také konečným průnikem poloprostorů. To platí i obráceně, musí se ale přidat kompaktnost. *Stěny* ($(d-1)$-rozměrné stěny, abychom byli přesní) jsou průniky mnohostěnu se *skutečně nezbytnými* nadrovinami, které ho definují. Taková stěna je mnohostěn v nadrovině, která ji obsahuje.

Indukcí se definují *i-stěny* mnohostěnu ($i = 0, 1, \ldots, d-1$). Stěny — to jsou $(d-1)$-stěny, 0-stěny jsou *vrcholy*, 1-stěny jsou *hrany*. Tento seznam je úplný v třírozměrném prostoru.



Obr. 20.

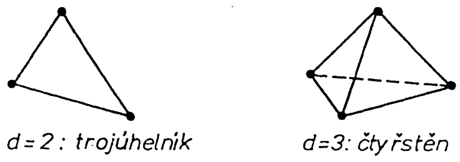
Příkladem mnohostěnů jsou rovnoběžnostěny. Nejjednodušší mnohostěny jsou simplexy. Viz obr. 21. Simplex je mnohostěn generovaný minimálním počtem bodů v $\mathbb{R}^d$, při němž je výsledek konvexním tělesem (zejména není obsažen v žádné nadrovině). Tento počet je $d+1$. Všechny simplexy jsou afinně totožné. Nepřekvapí tedy, že simplexy mají základní význam (např. Dantzigova simplexová metoda v lineární analýze).

Vzhledem k jednoduché definici mnohostěnů a jejich dobře známému vzezření je přirozené očekávat, že:

a) všechno o mnohostěnech je už dlouhou dobu známo;

b) cokoli o mnohostěnech se dokazuje snadno.

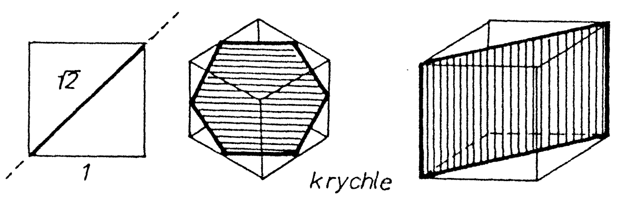
Ve světle našeho úvodu už čtenář uhodl, že obě tvrzení jsou nepravdivá. Budeme to ilustrovat na čtyřech tématech.



Obr. 21.

A. ŘEZY KRYCHLE

Uvažujme jednotkovou krychli $C = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ v $\mathbb{R}^d$ a její řezy nadrovinami. Pro kterou nadrovinu bude mít řez s krychlí C maximální objem ($(d-1)$-rozměrnou míru, tj. objem vzhledem ke standardní míře v nadrovině obsahující řez a opatřené přirozenou euklidovskou strukturou)?



Obr. 22.

Pro $d = 2$ je odpověď $\sqrt{2}$ a maxima se nabývá pro každou z úhlopříček. Pro $d = 3$ bude bystrý čtenář hádat, že nejkouzelnější řez krychle je pravidelný šestiúhelník, který dostaneme jako řez rovinou kolmou na tělesovou úhlopříčku a procházející počátkem. Bude se však mýlit, jeho obsah je roven $3\sqrt{3}/4$, zatímco řez určený rovnoběžnými úhlopříčkami protilehlých stěn má obsah $\sqrt{2} > 3\sqrt{3}/4$. Po delší dobu panovala domněnka, že hodnota $\sqrt{2}$ je optimální pro každé d. To dokázal K. Ball teprve r. 1986; viz [2]. Důkaz není v žádném případě jednoduchý. Je založen na teorii pravděpodobnosti a jeho kořeny sahají k Fourierově transformaci, která se užije dvakrát k odhadům objemu řezů krychle s nadrovinami. Tím se pak získá tento krásný vzorec pro řez krychle C nadrovinou H popsanou rovnicí $\sum_{i=1}^{d} a_i x_i = 0$ $(\sum_{i=1}^{d} a_i^2 = 1)$:

$$\operatorname{vol}(C \cap H) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a_1 t}{a_1 t} \cdots \frac{\sin a_d t}{a_d t}\, dt .$$

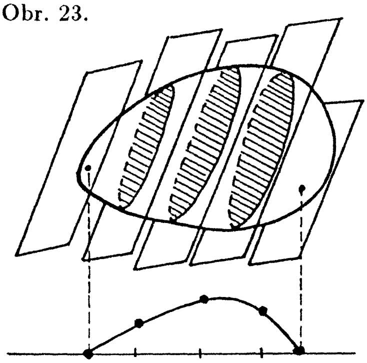
Důkaz se dokončí pomocí Hölderovy nerovnosti (v integrálním tvaru obdobném konečné verzi uvedené v části 4) a na základě faktu, že pro $p \geqq 2$ platí

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt \leqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p}},$$

přičemž znamení rovnosti nastává pouze pro $p = 2$. Dokázat tuto nerovnost je dosti jemná záležitost.

Zajímavým důsledkem Ballova výsledku je velice snadné vyvrácení (dost intuitivně přijatelné) domněnky Herberta Busemanna: jestliže dvě konvexní tělesa K a H (souměrná vzhledem k počátku, řekněme) mají tu vlastnost, že objem řezu tělesa K libovolnou nadrovinou P procházející počátkem je vždycky menší než objem řezu tělesa H toutéž nadrovinou P, potom je objem K menší než objem H. To je zřejmě pravda, když $d = 2$. Je to otevřená otázka pro $d = 3, \ldots, 7$. Larman a Rogers v r. 1975 sestrojili dosti komplikovaný protipříklad pro $d = 12$. Z Ballova výsledku však okamžitě vyplývá, že domněnka je nesprávná pro každé $d \geqq 10$, když se za K vezme jednotková krychle v $\mathbb{R}^d$ a za H koule v $\mathbb{R}^d$ o poloměru zvoleném tak, aby se její objem rovnal jedné.

Obr. 23.



Nyní krátká poznámka ve stejném duchu. Rozřežte souměrné konvexní těleso rovnoběžnými nadrovinami. Očekáváte, že objemy těchto řezů budou vyjádřeny monotonní funkcí nabývající minima pro bod, v němž se nadrovina dotýká našeho tělesa a maxima pro nadrovinu procházející počátkem. To se snadno dokáže pomocí Brunnovy-Minkowského nerovnosti (viz část 6), avšak jakkoli se to může zdát samozřejmým, žádný jednoduchý důkaz znám není. Dále: Brunnova-Minkowského nerovnost je ekvivalentní s tvrzením, že pro každé konvexní těleso v $\mathbb{R}^d$ (souměrné či nikoli) definuje objem paralelních řezů umocněný na $1/(d-1)$ *konkávní* funkci. Přitom zcela jednoduché je to pouze v dimenzi dvě.

Poznamenejme, že ač se to zdá zřejmé, není lehké dokázat, že každý řez nadrovinou procházející středem jednotkové krychle má objem větší nebo roven 1. Dokázal to Vaaler teprve v r. 1979!

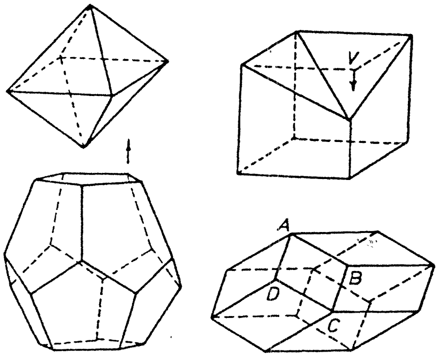
B. Kombinatorika

Označme f_i počet i-rozměrných stěn mnohostěnu Γ v $\mathbb{R}^d$. Zde i probíhá od 0 do $d-1$. Existují nutné (a postačující) podmínky pro danou posloupnost celých čísel $(f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$, aby odpovídala nějakému mnohostěnu v $\mathbb{R}^d$? Případ $d = 2$ je triviální: $f_0 = f_1$ je zároveň nutná i postačující podmínka. Pro $d = 3$ Euler nalézl v r. 1750 slavnou nutnou podmínku $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ (zdá se, že byla nalezena již Descartem, i když v nikterak explicitní formě). Není těžké tuto podmínku rozšířit na libovolné d do tvaru $f_0 - f_1 + \ldots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = (-1)^d$.

Teprve v r. 1920 našel Steinitz soubor nutných a postačujících podmínek pro $d = 3$. Jsou to:

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2 \quad \text{a} \quad 4 < f_0 < 2f_2 - 4 \leqq 4f_0 - 12\,.$$

Jako nutné podmínky byly tyto nerovnosti známy Descartovi a Eulerovi. Pro $d \geqq 4$ není takový soubor podmínek znám. V osmdesátých letech se však dosáhlo dvou zá-



Obr. 24.

kladních výsledků. Týkají se generických mnohostěnů, totiž tzv. simpliciálních mnohostěnů. Jsou to takové mnohostěny v $\mathbb{R}^d$, jejichž všechny $(d-1)$-stěny jsou $\big((d-1)-1\big)$ rozměrné simplexy. Ekvivalentně, jejich vrcholy jsou v obecné poloze, což znamená, že nikdy není více než d z nich obsaženo v jedné nadrovině. Jsou stabilní vzhledem k deformaci v tom smyslu, že pohneme-li kousek jedním vrcholem, zatímco ostatní vrcholy stojí na místě, zůstáváme ve třídě generických mnohostěnů.

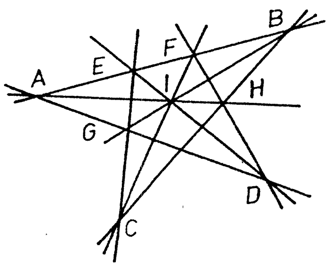
Pro simpliciální mnohostěny je soubor nutných a postačujících podmínek znám, i když teprve od r. 1980. Je dosti složitý. Tento soubor byl objeven McMullenem, který jej předložil jako domněnku. Nejzajímavější je způsob, jak je veden důkaz. Postačitelnost, která pochází od Billera a Lee, se dostane z velice náročné konstrukce vhodného Cohenova-Macaulayova okruhu metodami komutativní algebry — odtud se kýžený mnohostěn vynoří. Důkaz nutnosti pocházející od Stanleye je dokonce ještě překvapivější. Na základě prvotní Demazurovy myšlenky se dostane přiřazením vhodné komplexní projektivní algebraické variety každému konvexnímu mnohostěnu a na ni se aplikuje tzv. „těžká Lefschetzova věta". Tato věta znovu ilustruje nutnost použití komplexní geometrie dokonce i k řešení problémů formulovaných pomocí reálných čísel; viz [29], [32].

C. Lze pohnout mnohostěnem? Lze ho uložit do počítače?

Nechť je dán mnohostěn v $\mathbb{R}^3$. Pokusme se lehce pohnout jeho vrcholy tak, aby byl takto vzniklý mnohostěn téhož kombinatorického typu, tj. aby měl stejný počet stěn a každá stěna měla stejný počet vrcholů. Vyjádříme-li to algebraicky, chceme zachovat lineární relace, které existují mezi vrcholy původního mnohostěnu. Triviální řešení, jaké poskytují např. lineární transformace celého prostoru, nás samozřejmě nezajímají. Jak je ukázáno na konci poslední části, pro *simpliciální* mnohostěn (tj. takový mnohostěn, jehož všechny stěny jsou trojúhelníky — viz osmistěn na obr. 24) je taková pohyblivost maximální: každým vrcholem se dá lehce pohnout nezávisle na ostatních. Když mají stěny mnohostěnu čtyři nebo více vrcholů, začíná být problém zajímavý. Další znázorněná tělesa na obr. 24 ukazují, že se nedá pohybovat například pouze jedním vrcholem krychle (např. V), protože by tak mohly přibývat nové stěny; u pravidelného dvanáctistěnu lze ale například lehce pohnout (ve směru šipky) rovinou určenou „horní" stěnou. To je však možné pouze díky tomu, že dvanáctistěn je *kosimpliciální* (viz část 7), tzn. že když ho uvažujeme jako průnik poloprostorů, protínají se ve vrcholech vždy pouze tři hraniční roviny. Tento trik nelze použít pro poslední mnohostěn na obrázku. Dá se to však udělat otočením roviny určené stěnou $ABCD$ kolem A a C. To se ale pro obecný mnohostěn jeví jako velmi složitý problém. V roce 1920 Steinitz dokázal mnohem obecnější tvrzení o zcela obecném mnohostěnu, že totiž některé grafy se dají v $\mathbb{R}^3$ vždy realizovat pomocí konvexních mnohostěnů. Odtud dostáváme jako důsledek tvrzení, že konvexní mnohostěn má dostatečnou volnost pohybu, aby ho bylo možno libovolně přesně aproximovat mnohostěny o vrcholech, jejichž souřadnice jsou vesměs racionální čísla (budeme je nazývat *racionální* mnohostěny).

To je důležité, protože jakmile je pevně zvolen souřadný systém, počítač je schopen rozeznat pouze racionální mnohostěny, zadávané pomocí tří souřadnic každého z vrcholů. Znamená to, že afinní lineární vztahy mezi vrcholy se musí opravdu zachovat, ne pouze aproximovat. Nakonec než opustíme dimenzi 3, je vhodné zmínit se ještě o tom, že se stále neví, jak efektivně popsat stupeň volnosti pohybu mnohostěnu, jehož kombinatorický typ je předepsán.

Co lze říci o vyšších dimenzích? Zde je situace dramaticky odlišná, protože v roce 1967 Perles nalezl mnohostěn v $\mathbb{R}^8$ s dvanácti vrcholy, který nelze aproximovat racionálním mnohostěnem. Myšlenku jeho důkazu lze zhruba přiblížit následujícím způsobem. (Obr. 25.)



Obr. 25.

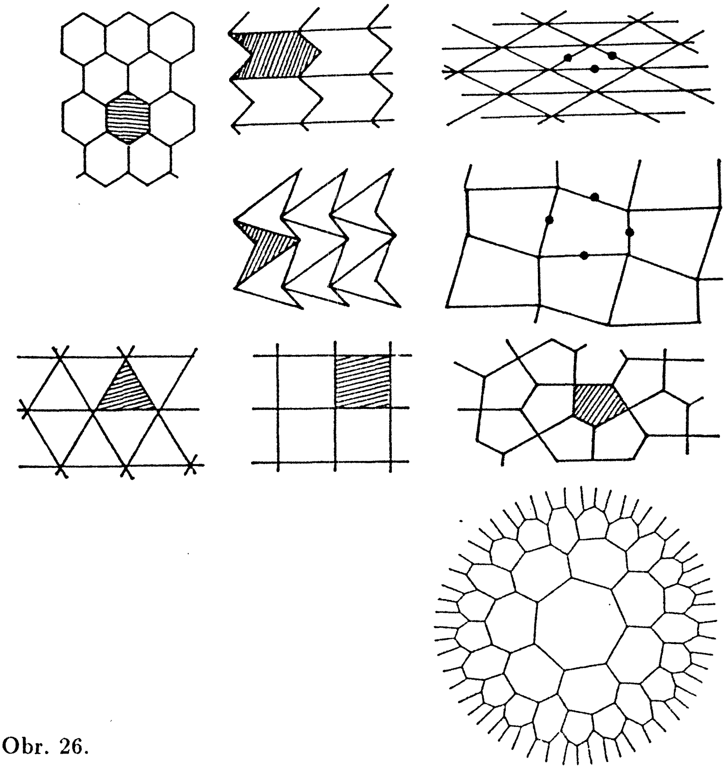
Uspořádání vrcholů ve znázorněném diagramu ukazuje, které body mají ležet na přímkách. Nyní elementární výpočet (používající — pokud jste s tímto pojmem seznámeni — dvojpoměru) v příslušné projektivní rovině ukazuje, že ať zvolíme jakoukoli euklidovskou metriku, dostaneme

$$\frac{EA}{EB}\cdot\frac{FB}{FA} \quad \text{se rovná} \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{nebo} \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Žádné z těchto dvou čísel není racionální; viz [22].

V roce 1987 Sturmfels nalezl mnohostěn v $\mathbb{R}^6$, který nemá vlastnost racionální aproximace. Je-li to také možné v $\mathbb{R}^5$ nebo dokonce v $\mathbb{R}^4$, je stále otevřeným problémem. Shora uvedený příklad ukazuje i to, že nelze v počítači zobrazit libovolný diagram a přitom přesně zachovat lineární vztahy mezi body. Pro fanoušky dodáváme, že počítačoví experti jim mohou říci, že takové diagramy lze uložit do počítače s využitím jiných teoretických postupů.

Zde je na místě poznámka *o strnulosti*. V hořejších úvahách šlo o pohyblivost kombinatorickou, nikoli metrickou. Bylo povoleno měnit délky stran (a velikosti stěn).



Obr. 26.

Jestliže v $\mathbb{R}^3$ budeme trvat na tom, že stěny budou *stejnými* mnohoúhelníky (což je automaticky splněno, jsou-li všechny stěny trojúhelníky a stranám nedovolíme změnu délek), pak tento případ byl řešen již v roce 1812. Cauchy dokázal, že změnu lze realizovat pouze euklidovskými transformacemi. V Cauchyově důkazu byla malá mezera, kterou nezávisle odstranili Hadamard a Steinitz. Poznamenáváme, že pro rovinné mnohoúhelníky to není pravda, jakmile mají alespoň čtyři vrcholy.

S pomocí trochy sférické geometrie a indukce vzhledem k dimenzi dává Cauchyova věta strnulost v libovolné dimenzi větší než tři. Cauchyův důkaz je velice jemný; viz např. [6].

D. Výplně

Mnohoúhelník P v *euklidovské* rovině $\mathbb{R}^2$ nazveme *výplní*, lze-li celou rovinu vyplnit („vydláždit") kongruentními (shodnými) kopiemi P; navíc se tyto kopie stýkají svými stranami. Nejprve budeme chtít nalézt tvar všech možných výplní. Dá se použít každý trojúhelník nebo obdélník. Jsou k dispozici příklady s pětiúhelníky nebo šestiúhelníky. Případ šestiúhelníků je plně řešen, u pětiúhelníků dosud kompletní popis situací není znám; viz [24]. Geometři (vlastně krystalografové) vědí od konce 19. století, že žádný *konvexní* k-úhelník s k větším nebo rovným sedmi nemůže být výplní. Konvexita se pochopitelně požaduje. Zdá se, že žádný zcela elementární důkaz tohoto tvrzení neexistuje. Známé důkazy využívají nejen Eulerovy formule, ale také důkazy zahrnující přechod k nekonečnu. O výplních v rovině vyšel v American Mathematical Monthly článek od W. P. Thurstona: Conway's Tiling Groups [viz roč. *97* (1990), 757–773]; viz také [24].

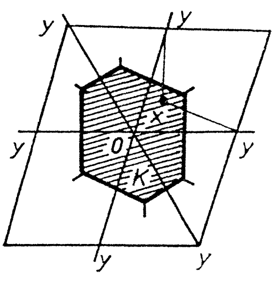
Podívejme se nyní na stejný problém v $\mathbb{R}^3$.

Nazveme *výplní* takový mnohostěn, pomocí jehož kongruentních kopií lze vyplnit celý prostor, přičemž jednotlivé polygony se stýkají stěnami. Zde nás očekávají dvě překvapení. Prvním je to, že existují extrémně komplikované výplně. Engel nalezl v roce 1980 výplň s 38 stěnami a 70 vrcholy. Některé stěny jsou velice malé. To je první překvapení: každá výplň je obklopena 38 jinými a dotyk s nimi je u některých velmi jemný. Při konstrukci byl použit počítač právě kvůli těmto malým stěnám. Je založena na důležitém a dnes již klasickém pojmu tzv. Dirichletovy-Voroného oblasti. Začneme s mříží Λ v $\mathbb{R}^3$ a definujeme P pomocí vztahu $P = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \forall\lambda \in \Lambda,\ d(x,0) \leqq d(x,\lambda) \}$. Nyní, díky této konstrukci, mnohostěny $\{ P + \lambda : \lambda \in \Lambda \}$ vyplňují $\mathbb{R}^3$. Engelův příklad lze obdržet následujícím rozšířením Dirichletova-Voroného postupu: uvažujeme diskrétní grupu G izometrií prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahující posunutí o vektory (body) z jisté mříže; G však může obsahovat i rotace a být mnohem větší než grupa pouhých posunutí. Engelova výplň P je typu

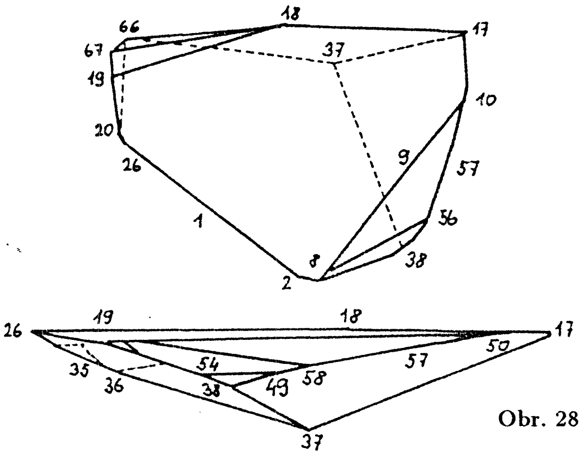
$$P = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \forall g \in G,\ d(x,0) \leqq d(x,g(0)) \}.$$

Tato množina P se obecně nazývá *fundamentální oblast* grupy G.

Je zde ale ještě další překvapující věc: není znám odhad počtu vrcholů nebo stěn libovolné výplně $\mathbb{R}^3$, pokud nevzniká postupem založeným na diskrétní grupě izometrií. Nevíme dokonce ani, zda je počet vrcholů omezený! Viz [23].



Obr. 27.



Obr. 28.

(Druhá část článku včetně seznamu literatury bude uveřejněna v příštím čísle.)