Darina Jirotková

Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky PedF UK

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 43 (1998), No. 4, 326--335

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139744`

# vyučování

## POJEM NEKONEČNO V GEOMETRICKÝCH PŘEDSTAVÁCH STUDENTŮ PRIMÁRNÍ PEDAGOGIKY PedF UK

*Darina Jirotková, Praha*

### Úvod

V březnu 1995 jsme zahájili výzkum, jehož cílem bylo zjistit, jaké představy mají studenti PedF UK, budoucí učitelé elementaristé, o základních geometrických pojmech. Šlo převážně o studenty 1. ročníku, kteří již absolvovali kurz elementární aritmetiky zaměřený na základy logiky a intuitivní teorii množin a dále polovinu semestru kurzu geometrie. Vzhledem ke koncepci výuky a vzhledem k tomu, že v žádném z těchto kurzů nevstupovala do úvah nekonečnost a spočetnost množin, ani nebylo manipulováno s nekonečnými množinami, je nepravděpodobné, že studium na fakultě do té doby přispělo k přímé změně představ studentů o nekonečnu. Mohlo však dojít k výraznějším posuvům v nahlížení na matematiku — k odklonu od formalistického a příklonu k obsahovému vnímání této disciplíny.

Při pokusech o vymezení pojmu „přímka" (viz úloha 1) studenti často použili slovo *nekonečno* v různých kontextech. To nás sice nepřekvapilo, ale natolik zaujalo, že se zkoumání představ našich studentů o „geometrickém nekonečnu" stalo hlavním předmětem dalšího výzkumu. Ten přinesl zajímavé výsledky, které, jak doufáme, mohou být přínosné i pro další učitele. Mohou je inspirovat k vlastnímu experimentování se svými žáky, zaměřenému na kultivaci jejich matematických představ i na otevírání nových obzorů. Diskuse, kterou o problémech uvedených v úlohách 1 až 7 v příloze článku iniciuje učitel, přinese žákům nové, netradiční pohledy a motivující impulsy. Učiteli zase umožní uvidět své žáky pod jiným zorným úhlem. Vzhledem k tomu, že předmět debaty je minimálně ovlivněn školskými znalostmi, dostávají příležitost i žáci tzv. slabí.

### Nástroj výzkumu

K výzkumu byla použita série úloh, které uvádíme v příloze článku. Některé z nich pro účely tohoto článku mírně modifikujeme. Zde se budeme dále podrobněji zabývat úlohou 1.

**Úloha 1.** Napište své vlastní vymezení pojmu přímka.

### První etapa analýzy řešení úlohy 1

Úloha byla zadána ústně vždy celému studijnímu kroužku. Studenti odpovídali písemně. Experimentu se v průběhu tří měsíců zúčastnilo 72 studentů PedF UK. Další technické údaje o experimentu ponecháme stranou a zaměříme se na analýzy písemných projevů studentů. Použijeme metodu, která byla rozpracována v týmu M. Hejného (např. [02]).

RNDr. DARINA JIROTKOVÁ (1952), Pedagogická fakulta UK, M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1.

Slovo „nekonečno“ se stává zcela samozřejmou součástí slovníku dětí již od mladšího školního věku a bez rozpaků je používáno, někdy s obavou z neznáma, někdy s nádechem vzrušení z pronikání do nepoznatelného, jindy bez emocí pouze jako fráze, např. při pokusu popsat neomezený geometrický objekt. Ve smyslových zkušenostech dítěte však přímá zkušenost s nekonečnem z reálného světa schází. Do slova „nekonečno“ děti promítají své zkušenosti z reálného světa, ze kterých intelektuální činností (abstrakce, absolutizace, idealizace) vytvářejí myšlenkový konstrukt. V tomto smyslu budeme v našem článku slovo nekonečno používat. Nebudeme tedy řešit otázku, co je nekonečno, ale budeme se snažit popsat představy našich studentů o pojmu nekonečno v geometrickém kontextu. Ještě jednou zdůrazňujeme, že nejde o posouzení správnosti či nesprávnosti studentovy odpovědi, ale o

- hledání a popis jevů, které zkoumanou představu vytvářejí,
- třídění odpovědí podle uvedených jevů.

Taková analýza, byť osnovaná na hypotetickém modelu kognitivní sítě studenta, naplní to, co stojí v názvu našeho článku, a vytvoří zázemí pro další bádání v oblasti:

- studia kognitivních mechanismů, které řídí vývoj představ zkoumaného pojmu,
- identifikace jevů, které hlubší pochopení nekonečna usnadňují a urychlují, nebo zpomalují a brzdí,
- hledání diagnostických a terapeutických (reedukačních) postupů, které mohou učitele inspirovat při edukační a reedukační práci s individuálním žákem.

Analýzu jsme začali výběrem všech studentských řešení, v nichž byla explicitně uvedena slova „konec“, „nekonečno“, „(ne)končí“, „nekonečná“, „nekonečně“ apod. Každé vybrané řešení jsme rozložili na myšlenkové jednotky. Ty z nich, které se vztahovaly k nekonečnu, jsme evidovali do soupisu výpovědí.

Například odpověď Aleny: *„Přímka — rovná čára, která obsahuje nekonečně mnoho bodů. Začíná a končí v nekonečnu, je nekonečně dlouhá.“* jsme rozložili na 4 myšlenkové jednotky: 1) přímka je rovná čára, 2) přímka obsahuje nekonečně mnoho bodů, 3) přímka začíná a končí v nekonečnu, 4) přímka je nekonečně dlouhá. Z těchto 4 myšlenek byly myšlenky 2), 3) a 4) zařazeny do seznamu výpovědí.

Získali jsme tak přes 70 výpovědí, které se vztahovaly k nekonečnu. Výpovědi, které se lišily pouze nepodstatným způsobem (z hlediska našeho hodnocení), jsme zařadili do jedné třídy, tu jsme nazvali *typem* a reprezentovali ji jedinou výpovědí. Takto jsme dospěli k 26 typům výpovědí, které jsme pak po několikerém přerovnávání roztřídili do tří skupin podle toho, zda je nekonečno vyjádřeno:

- skupina A – podstatným jménem
- skupina B – přídavným jménem nebo příslovcem
- skupina C – popřením existence nebo uchopitelnosti konce

Z Aleniny odpovědi jsme myšlenkové jednotky 2) a 4) zařadili do skupiny B a 3) do skupiny A.

Z uvedeného je zřejmé, že předmětem našich analýz nejsou studenti jako individuality, ale pouze jejich výpovědi. Autentickou ukázkou dokumentujeme, že týž student velice často uvede několik myšlenkových jednotek, z nichž se některé řadí do skupiny A, jiné do B, jiné do C. Uveďme seznam obdržených typových výpovědí roztříděný do jednotlivých skupin. Výpověď se vždy vztahuje k přímce.

**Skupina A**

(01) ... začíná a končí v nekonečnu
(02) ... má počátek a konec v nekonečnu
(03) ... krajní body jsou v nekonečnu
(04) ... začínající v nekonečnu, pokračující opačným směrem do nekonečna
(05) ... vede na obě strany do nekonečna
(06) ... vede z nekonečna do nekonečna
(07) ... vede od nekonečna do nekonečna
(08) ... je protažená do nekonečna

**Skupina B**

(09) ... má nekonečně mnoho bodů
(10) ... je nekonečná
(11) ... nekonečná spojnice (čára)
(12) ... nekonečná úsečka
(13) ... nekonečně dlouhá
(14) ... nekonečný útvar bodů
(15) ... nekonečná množina bodů
(16) ... nekonečná řada bodů

**Skupina C**

(17) ... nemá začátek (počáteční bod) ani konec (koncový bod)
(18) ... čára bez začátku a konce
(19) ... nikde nezačíná, nikde nekončí
(20) ... chybí počátek i konec
(21) ... neomezen počátek ani konec
(22) ... nekončí
(23) ... nikde nekončící
(24) ... není konečná (ukončená)
(25) ... nikdy neuvidím konec ani začátek
(26) ... nelze určit konečný bod

Výpovědi (myšlenkové jednotky) z ukázky „Aleny“ zařadíme do typů takto: druhá do B(09), třetí do A(01) a čtvrtá do B(13). Všimněme si, že u typu (09) nerozlišujeme mezi slovesy „obsahuje“ a „má“.

### Druhá etapa analýzy řešení úlohy 1

V analýze zkoumáme autentické výpovědi studentů, na které nahlížíme jako na reprezentanty typů. Přitom vědomě hledáme interpretace studentských výpovědí v míře překračující přesnost představ autorů. Je zřejmé, že jak představa autora, tak jeho schopnost tuto představu verbalizovat jsou zatíženy jistou neurčitostí, která znesnadňuje pokus přesně a jednoznačně charakterizovat každou ze zkoumaných představ. Důvodem pro co nejpřesnější interpretace výpovědí je naše zkušenost, že právě tento přístup nám poskytne vhled do celé problematiky a naznačí, jak diagnostikovat studenty a jakými prostředky kultivovat jejich představy i komunikační schopnosti.

Pozornost zaměříme na typové výpovědi každé ze tří skupin jednotlivě. Jak se skupina A liší od skupin B a C? Ve výpovědích skupiny A je použito podstatné jméno nekonečno, jako kdyby autoři výpovědí přiznávali tomuto jevu „bytí“[1]). V některých případech dokonce může toto nekonečno mít na přímce své místo, lokalitu. Autoři výpovědí skupiny B a C existenci nekonečna přímo nedeklarují. Ve výpovědích skupiny B je nekonečnost vyjádřena jako vlastnost přímky a výpovědi skupiny C pak tuto vlastnost formulují jako opozici ke konečnosti nebo jako absenci konečnosti.

**Skupina A** – Způsob chápání a vyjádření nekonečna a nekonečnosti přímky ve studentově řešení charakterizují čtyři polaritní jevy:

1. Počet „nekonečen“ na přímce — jedno / dvě.

[1]) Tato naše interpretace je v souladu s výzkumy dr. P. Eisenmanna z PedF v Ústí nad Labem.

2. Počet slov „nekonečno" ve výpovědi — jedno / dvě.
3. Kvalita nekonečna: a) začátek / konec, b) místo / směr.
4. Potenciálnost / aktuálnost.

Na každou z těchto charakteristik se podíváme blíže.

1. Počet nekonečen. Výpověď (08) mluví pouze o jednom nekonečnu. Ve všech ostatních výpovědích se pravděpodobně mluví o dvou nekonečnech. Nelze však vyloučit, že jsou tato nekonečna v představě autora totožná. Nejistota interpretace výpovědí studentů nás vedla ke konstrukci úlohy 2. (Uvedena v příloze článku.) V ní Boris explicitně deklaruje ideu přímky uzavřené jediným bodem „nekonečno" do „kružnice" (topologické).

2. Počet slov „nekonečno". Ve výpovědích (01), (02), (03), (05) a (08) se vyskytuje jediné slovo „nekonečno", v ostatních jsou ta slova dvě. Nemůžeme tedy říci, že počet slov „nekonečno" určuje počet nekonečen přímky v představě studenta.

3. Kvalita nekonečna. V případech, kdy se mluví o dvou nekonečnech, lze uvažovat o různosti kvality těchto nekonečen. U výpovědí (01), (02) a (06) se kvalita obou nekonečen liší tím, že jedno je chápáno jako začátek a druhé jako konec (přímky).

Několik studentů napsalo, že *„přímka má konec v nekonečnu"*. Pokusme se najít kontext, v němž tato výpověď není vnitřně sporná. Řekne-li žák či student, že *„přímka má konec v nekonečnu"*, může použít slovo „nekonečno" k označení jistého místa na přímce, místa velmi vzdáleného, nedosažitelného, aniž by skutečně uvažoval o nekonečnosti přímky. Řekne-li, že *„přímka směřuje do nekonečna"*, mluví o nekonečnu spíše jako o ukazateli směru. Ve výpovědích skupiny A jsme nekonečno jako ukazatel směru identifikovali ve třech případech: (04) – pokračuje směrem do nekonečna, (05) – vede na obě strany do nekonečna, (07) – vede od nekonečna. Ostatní výskyty nekonečna spíše vyjadřují, podle našeho názoru, místo na přímce.

Obě nekonečna ve výpovědi (03) i (05) mají naprosto stejnou kvalitu. V (03) jde o místa na přímce, v (05) o směry.

Ve výpovědích (04) a (07) se vyskytují dvě slova „nekonečno". Kvalita těchto nekonečen se nám zdá být různá. Ve výpovědi (04) je první zmíněné nekonečno místo, lokalita, kde proces probíhání přímky začíná, druhé pak je ukazatelem směru probíhání přímky. Ve výpovědi (07) je tomu naopak. První nekonečno je ukazatelem směru, odkud přímka přichází, a druhé pak místem, lokalitou, kde proces probíhání přímky končí. Uvědomujeme si, že uvedená interpretace závisí na zkušenostech toho, kdo klasifikaci provádí. Abychom lépe pronikli do způsobu, jak studenti nekonečno chápou, zařadili jsme do našeho výzkumu úlohu 5. (Viz příloha.)

4. Potenciálnost / aktuálnost chápání nekonečna. Porovnejme výpovědi (05) a (02). Výpověď (05) lze také interpretovat takto: zdůrazňuje akt vytváření přímky. Autor výpovědi uvažoval pouze o procesu probíhání, nikoli však o jeho ukončení. Přímka zde existuje ve své možnosti (potencialitě), v možnosti neomezeného uskutečňování, nikoli ve své dokončenosti. Tomu odpovídající nekonečno má dvě nosné vlastnosti: je ukazatelem směru a je nedosažitelné. Takové nekonečno nazýváme *potenciální*.

Výpověď (02) mluví o počátku i konci přímky jako o bodech ležících v místě zvaném „nekonečno". Autor této výpovědi se snaží vidět přímku jako celek, jako objekt již uskutečněný, dokončený a k tomu mu napomáhá představa o „nekonečnu" jako jisté pevné lokalitě. Takovéto chápání přímky i nekonečnosti přímky je blízké tomu, které se v matematice nazývá *aktuální*. Nacházíme jej i v typech (01) a (03).

Výpověď (03) mluví o krajních bodech přímky. Zdá se, že tato představa přímky vznikla limitním prodloužením uzavřené úsečky. Ke korektnější představě (v našem chápání) se autor výpovědi (03) dostane, když limitně prodlouží otevřenou úsečku, tj. úsečku bez krajních bodů. Představa, k níž dospěje, bude podle našeho vymezení aktuálně chápaná přímka bez krajních bodů v nekonečnu. K vytvoření této představy směřuje úloha 6 v příloze.

Samozřejmě, že nechceme říci, že každý student má o přímce a nekonečnu buď představu potenciální, nebo aktuální. Většinou tato představa není dosud vyhraněna. Nezřídka týž student intuitivně chápe nekonečno jak aktuálně, tak i potenciálně. Příkladem je výpověď (04). V její první části, *„začínající v nekonečnu"*, je nekonečno chápáno jako místo a můžeme říci, že je ve smyslu našeho zjednodušeného pohledu chápáno aktuálně. Druhá část, *„pokračující opačným směrem do nekonečna"*, má vzhledem ke slovu „směrem" silně potenciální akcent. Je zajímavé, že autor výpovědi (04) vnímá obě nekonečna tak různorodým způsobem a zřejmě rozdíl mezi aktuálním a potenciálním nekonečnem nepociťuje. Jeho představa je teprve synkretická, tj. není zatím prokreslena zkušeností.

Podobnou nevyhraněnost představy o nekonečnosti přímky nacházíme ve výpovědích (06) až (08), které, byť svou formulací naznačují spíše potenciální představu, nevylučují představu nekonečna aktuálního. Právě diskuse o úlohách uvedených v příloze, zejména o úlohách 5 a 6, může výrazně přispět k prokreslování studentovy představy o polaritě aktuálního a potenciálního nekonečna.

Všimněme si jazykových prostředků, které poukazují na aktuálnost nebo potenciálnost nekonečna. Jak jsme se již zmínili na začátku, je to především samo podstatné jméno nekonečno, dále slova začátek a konec, resp. slovesa začínat či končit, která poukazují na přítomnost začátku nebo konce, tedy v našem zjednodušeném pohledu na aktuální nekonečno. Výpovědi (01), (02), (03) a částečně (04), které do lokality zvané nekonečno ukládají reálně existující body, podle našeho názoru jasně dokumentují aktuální představu nekonečna.

V této souvislosti je zajímavé si všimnout jemného rozdílu výpovědí (06) a (07). Porovnejme použité předložky „z" a „od" z hlediska jejich užívání v běžném jazyce.

Výpovědi *„jedu z Brna"* a *„jedu od Brna"* se různí. Přijíždí-li někdo do Prahy z Brna, pak se můžeme domnívat, že v Brně byl. Přijíždí-li od Brna, pak je spíše pravděpodobné, že východiskem jeho cesty nebylo Brno, ale do Prahy přijel ze stejného směru jako ten, kdo z Brna přijíždí. Uvažujeme-li podobně o druhém směru, nacházíme tři různé předložky: do, k, na. Jedu-li do Prahy, pak moje cesta v Praze končí. Jedu-li k Praze, pak pravděpodobně moje cesta končí před Prahou. Konečně jedu-li na Prahu, pak moje cesta může končit i za Prahou. Ale naproti tomu, jedu-li na sever, pak moje cesta musí skončit nejdále na severním pólu. A jedu-li na západ, je západ stále jen ukazatelem směru a své putování na západ nemusím skončit nikdy.

<table>
<tr><td rowspan="5">„má“</td><td colspan="5">„je“</td></tr>
<tr><td rowspan="4">přímo</td><td colspan="4">nepřímo</td></tr>
<tr><td rowspan="3">kvalita</td><td colspan="3">kvantita</td></tr>
<tr><td rowspan="2">nepřetržitě</td><td colspan="2">diskrétně</td></tr>
<tr><td>bez uspořádání</td><td>s uspořádáním</td></tr>
<tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12<br>13</td><td>14<br>15</td><td>16</td></tr>
</table>

**Skupina B.** Metodika analýzy výpovědí skupiny A byla založena na čtyřech polaritních jevech. Metodika analýzy skupiny B je založena na postupném odštěpování jednotlivých typů. Původně jsme i zde hledali polarizující jevy, ale většina z nich byla aplikovatelná pouze na část výpovědí skupiny B. Ukázalo se však, že po vhodném seřazení lze všech osm výpovědí skupiny B srovnat do přehledné tabulky, která naznačuje postupné dichotomické třídění.

- Nekonečno je přisouzeno přímce jako **vlastnictví**, (09) — *„má“*.
- Nekonečno je přisouzeno přímce jako **vlastnost** — *„je“*, a to buď:
  - **přímo**, bezprostředně (10), nebo
  - **nepřímo**, zprostředkovaně, pomocí slov spojnice, čára, úsečka, dlouhá, útvar bodů, množina bodů, řada bodů.

První pokus o klasifikaci uvedených sedmi výrazů oddělil slovo „dlouhá“ jako jediné přídavné jméno od ostatních podstatných jmen. Ukázalo se však, že vhodnější než gramatické kritérium je polarita **kvalita / kvantita**. Pojmy spojnice a čára nemají charakter měřitelného útvaru, nejsou tedy pojímány jako kvantita, ale jako kvalita. Dalších pět pojmů má charakter kvantitativní. Ty je možno dále třídit do dvou skupin podle toho, zda se mluví o bodech, což jsou objekty **diskrétní**, anebo o něčem, co má charakter **nepřetržitosti**. Konečně tři poslední výrazy mluvící o bodech můžeme třídit podle toho, zda poukazují na možnost **uspořádání**. Když nyní tři uvedená klasifikační kritéria seřadíme do posloupnosti: kvalita / kvantita, nepřetržitost / diskrétnost, bez uspořádání / s uspořádáním, dostaneme následující schéma.

Zprostředkovatelem mezi nekonečnem a přímkou je:

- **kvalita** (11),
- **kvantita**. Ta je interpretována objektem, který je:
  - **nepřetržitý** (spojitý) (13),
  - **diskrétní** (nespojitý), a sice:
    - **bez uspořádání** (15),
    - **s uspořádáním** (16).

Těžce zařaditelná z tohoto hlediska je výpověď (12), která připouští dvě interpretace. Podle jedné je nekonečná úsečka chápána jako existující statický objekt (konceptuálně). Tato interpretace řadí výpovědi (11) a (12) do stejné třídy. Podle druhé interpretace je nekonečná úsečka chápána procesuálně, tj. jako limitní případ zvětšující se úsečky. Každá z těchto úseček je měřitelná a limitní případ dostává míru nekonečno. Tato interpretace řadí výpověď (12) do stejné třídy s výpovědí (13).

Podobně výpověď (14) připouští jak nepřetržitou, tak diskrétní interpretaci. Vzhledem k úrovni studentů lze s daleko větší pravděpodobností předpokládat, že slovo útvar je chápáno jako objekt nepřetržitý. Tedy výpověď (14) patří spíše k výpovědi (13) než (15).

Tabulka, která byla vytvořena jako nástroj na analýzu skupiny B, není univerzální, neboť se vztahuje pouze na zde uvedené výpovědi a nezatřiďuje všechny případné další výpovědi studentů. Tím se metoda analýzy skupiny B odlišuje od metody analýzy skupiny A, jejíž kritéria jsou univerzální. Nicméně metoda, kterou byla tabulka vytvořena, tj. rozklad na posloupnost jevů, jimiž jsou jednotlivé „přihrádky“ tabulky charakterizovány, univerzální charakter má. Kdyby se nám např. v dalším výzkumu objevila výpověď *„má nekonečnou řadu bodů“*, pak víme, že tuto výpověď nutno začlenit do levého sloupce tabulky nadepsaného slovem „má“, ale tento sloupec je nutno dále třídit obdobně jako sloupec pravý.

Zajímavé je srovnání uvedené tabulky s klasifikací v [01], 239, kde je podobný problém nahlížen v historickém kontextu (fylogeneticky).

**Skupina C.** V případech skupin A a B jsme analyzovali objekty, o kterých se ve výpovědích psalo. Skupina C obsahuje výpovědi, ve kterých se o nekonečnu přímo nemluví, které pouze hovoří o neexistenci konce, respektive začátku.

Z neexistence konce nelze, důsledně vzato, vyvozovat nekonečnost. Úsečka bez krajních bodů nemá konce, ale nelze tvrdit, že je nekonečná ve smyslu nedosažitelnosti. Kružnice též nemá konce a též nelze tvrdit, že je nekonečná. Na obou uvedených objektech však jistý typ nekonečnosti najít můžeme.

Bod, který se po otevřené úsečce blíží ke krajnímu bodu $A$, nemůže svůj pohyb ukončit. Ke každé jeho poloze lze najít polohu k bodu $A$ ještě bližší. Jeho „rychlost“ se však jakoby stále zmenšuje. Zenonova aporie o Achillovi a želvě je jiná verze prezentace nekonečnosti otevřené úsečky.

Podobně bod, který probíhá kružnici, může ve svém pohybu pokračovat bez omezení, tedy nekonečně dlouho. Na rozdíl od předchozího modelu nekonečna, kdy jsme otevřenou úsečku neuměli vyčerpat, neuměli jsme „projít“ všechny její body, kružnici vyčerpáme rychle. Neumíme však dojít ke konci a neumíme vyčerpat možnost jít o „určitý kus“ dál.

Ani jeden z obou uvedených modelů nepovažují studenti za rozumný model nekonečna, protože se v nich nenachází jev, který považují za dominantní vlastnost nekonečna. Tím jevem je *nedosažitelnost, odlehlost, neomezenost.* Ani úsečka bez krajních bodů, ani kružnice není v tomto smyslu nekonečná, byť ani jedna nemá konce. Jak úsečka, tak kružnice jsou vizualizovatelné, ale odlehlé nekonečno vizualizovatelné není.

Jsme si vědomi, že deklarování neexistence konce či začátku neznamená apriori deklarování nekonečnosti. Přesto se domníváme, že ve všech námi sledovaných typech (17) až (24) byla výpověď o neexistenci konce a začátku spojena s představou nekonečnosti přímky v uvedeném smyslu nedosažitelnosti, odlehlosti. U typů (25) a (26) se existence konce předpokládá, ale konec je posunut za obzor, takže z hlediska našeho vnímání přímky existence konce nezasahuje do struktury přímky.

## Závěr

Po ukončení druhé etapy by měla následovat etapa třetí, zaměřená na syntetizující pohled, který umožní využít výsledky výzkumu pro praktickou činnost učitele. Z této etapy uvádíme pouze soubor úloh a otázek, jimiž může učitel kultivovat organický vývoj představ o nekonečnu a reedukovat případné deformace, které v představě žáka vznikly. (Viz námět 4.) Při analýze výpovědí skupiny A jsme čtenáři poskytli univerzální nástroj na zpracování stávajících a případně i dalších výpovědí studentů nebo žáků. Analýza skupiny B, jak jsme již uvedli, nedala vyčerpávající univerzálně platný klíč k diagnostice výpovědí, poskytla však čtenáři metodu, kterou je schopen takový klíč postupně vytvářet. Metodický posuv, ke kterému zde dochází, je veden snahou zasvěcovat čtenáře do problematiky didaktických analýz. Jsme přesvědčeni, že učitelova kompetence musí narůstat nejen kvantitativně získáváním nových faktických poznatků, ale i kvalitativně, zvyšováním schopnosti samostatně pronikat do problematiky didaktiky matematiky.

Další etapou takto koncipovaného směrování čtenáře jsou pak náměty ke zcela samostatné práci, při níž uvedené metody našeho výzkumu slouží jako příklad, případně inspirace.

Námět 1. Podobně, jak bylo analyzováno řešení Aleny, analyzujte tato další autentická řešení:

BEATA: *„PŘÍMKA — nekonečná množina bodů, které leží v jedné rovině, neobsahuje první a poslední prvek (bod).“*

CYRIL: *„přímka: úsečka, jejíž krajní body jsou v nekonečnu. — čára spojující 2 body, je však nekonečná.“*

DENISA: *„Rovná čára, která nemá ohraničený konec; z jednoho bodu vycházejí proti sobě dvě čáry, které vedou na obě strany do nekonečna.“*

EDA: *„PŘÍMKA — nekonečná čára, nelze určit (vymezit) její počáteční a konečný bod — množina bodů dělící rovinu na dvě poloroviny.“*

Námět 2. Udělejte svůj vlastní výzkum paralelně k našemu. Použijte úlohu 1, případně některou jinou, nebo vámi vymyšlenou úlohu. Na základě nabytých zkušeností kriticky posuďte naše analýzy. Za Vaše případné připomínky Vám bude autorka vděčná.

Námět 3. Udělejte diagnostické schéma výpovědí skupiny C.

Námět 4. Ve vlastní třídě organizujte diskusi žáků motivovanou některou z uvedených úloh 1 až 7, nebo některou tezí či otázkou:

- Co to znamená, když někdo řekne, že existuje bod, že existuje nekonečno?
- Nerozlišitelně blízké body jsou nekonečně blízké.
- Nekonečno má ve výrazech „nekonečně blízké body“ a „nekonečně vzdálené body“ různou kvalitu.
- Pravidelný mnohoúhelník s nekonečným počtem vrcholů je kružnice.
- Délka přímky je rovna dvojnásobku délky polopřímky.

**Příloha**

**Úloha 2.** Rozhodněte, které z diskutujících dětí má pravdu:

ADAM: *„Přímka má dvě nekonečna. Když jdu jedním směrem, přijdu do nekonečna. Když jdu opačným směrem, přijdu též do nekonečna.“*

BORIS: *„Jenže obě ta nekonečna jsou totéž. Takže přímka má pouze jediné nekonečno. V něm se uzavírá jako kružnice.“*

**Úloha 3.** Rozhodněte, které z diskutujících dětí má pravdu:

CECÍLIE: *„Dvě rovnoběžné polopřímky končí ve dvou různých nekonečných bodech.“*

DANA: *„Nesouhlasím. Končí ve stejném nekonečném bodě.“*

EVA: *„Ani jedna z vás nemá pravdu. Polopřímka jde pořád, nikde nekončí.“*

**Úloha 4.** Je dána úsečka $AB$. Uvažujme všechny možné pravoúhlé trojúhelníky $ABC$ s pravým úhlem při vrcholu $C$. Sestrojte ten z uvedených trojúhelníků, jehož obsah je

a) největší možný,

b) nejmenší možný.

**Úloha 5.** Je dána přímka $b$ a bod $A$, který na ní neleží. Uvažujme všechny možné čtverce $ABCD$ s vrcholem $B$ na přímce $b$. Sestrojte ten z uvedených čtverců, jehož obsah je

a) největší možný,

b) nejmenší možný.

c) Načrtněte úhlopříčku $AC$ a $BD$ a střed čtverce $ABCD$, který je řešením úlohy. Pokud se některý prvek nevejde na papír, naznačte šipkou směr jeho pohybu.

**Úloha 6.** a) Je dána úsečka. Prodloužíme ji dvakrát, třikrát, desetkrát, stokrát, tisíckrát, ..., nekonečně mnohokrát.[2]) Napište, co vznikne. Pojmenujte vzniklý útvar.

b) Předchozí úlohu řešte s úsečkou, ze které jste „odřízli“ oba její krajní body.

c) Jsou útvary, které vznikly v předchozích dvou úlohách, stejné? Pokud ne, napište proč.

**Úloha 7.** Franta tvrdí, že umí napsat nejmenší kladné číslo. Je to možné? Svůj názor podepřete argumenty.

Bude-li čtenář-učitel zadávat některé z uvedených úloh svým žákům, doporučujeme obohatit úlohy 2–5 výzvou ke zdůvodnění názoru či řešení.

## Literatura

Literatura vztahující se k didaktice matematiky:


[01] HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bratislava 1991.

[02] HEJNÝ, M.: *The Development of Geometrical Concept.* In: SEMT 95, Prague. Ed. HEJNÝ, M. – NOVOTNÁ, J., Prague, Charles Univ. 1995, 13–18, ISBN 80-7184-038-6.

[03] HEJNÝ, M.: *Achilleus a korytnačka ako problém.* Matematika a fyzika ve škole, č. 2 (r. *9*) (1978), 102–105.

[04] HEJNÝ, M., RYBÁROVÁ, J.: *Pojmotvorný proces vo vyučovaniu matematiky.* Pedagogika, č. 5, 1984, 599–612.

[05] JIROTKOVÁ, D.: *Perception of a Solid.* In: SEMT 95, 39-41.

[06] JIROTKOVÁ, D.: *Understanding of (Geometrical) Infinity.* ICME 8, Short presentations. Sevilla 1996, poster no. 346.


---

[2]) Výraz „nekonečně mnohokrát“ je v hovorovém jazyce běžný. Jeho přenesení do kontextu teorie množin však ztrácí legalitu. Student tedy může odmítnout odpověď s poukazem na nelegálnost výzvy, nebo může odpovídat uvnitř kontextu běžného života.

[07] Novotná, J. et al.: *Static Atoms in the Solving Process of One Word Problem.* In: DMME, 10, Praha 1995.

[08] Stehlíková, N.: *The Solving Scheme as a Tool for Understanding Pupil's Solutions.* In: SEMT 95, 117–120.

[09] Sýkora, V.: *Determination and Context.* In: SEMT 95, 60–62.

Literatura vztahující se k jevu „nekonečno“:

[10] Kuzansky, M.: *O učenej nevedomosti* (překlad Augustýn Valentovič). Pravda, Bratislava 1979.

[11] Peter, R.: *Hry s nekonečnom.* Osveta, Martin 1958.

[12] Pospíšil, B.: *Nekonečno v matematice.* Praha JČMF, Cesta k vědění *48,* 1948.

[13] Vopěnka, P.: *Rozpravy s geometrií.* Panorama, Praha 1989.

[14] Zlatoš, P.: *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou. (Úvahy o množinách, nekonečne, paradoxoch a Gödelových vetách.)* IRIS, Bratislava 1995.

**Poděkování.** Výzkum je uskutečňován v úzké návaznosti na grant GA ČR 406/96/1186, jehož nositelem je prof. M. Hejný. Dovoluji si mu poděkovat za obrovské množství času, které věnoval debatám se mnou o podobných problémech, při kterých se zrodilo toto téma, a za cenné metodické rady. Rovněž bych chtěla poděkovat prof. F. Kuřinovi za podnětné připomínky.

---

# K OPTIMALIZACI MATURITNÍ A PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKY Z FYZIKY

*Karel Malinský, Praha*

Práce na grantu č. 1484 Fondu rozvoje vysokých škol se záměrem optimalizace maturitních a přijímacích zkoušek z fyziky dala možnost systematicky posoudit úspěšnost absolventů různých středních škol. Na grantu se účastnil tým pracovníků různých vysokých škol, vedený prof. E. Svobodou z MFF UK. Práce začala rozborem výsledků uchazečů o studium na elektrotechnické fakultě ČVUT v roce 1997 (dále FEL). Byly analyzovány výsledky práce absolventů dvaceti tří gymnázií. Ukazuje se, že nyní, po nedávném zveřejnění „žebříčku“ českých středních škol podle programu SET 97, jde o zvlášť aktuální téma.

Pro všechny přihlášené uchazeče o studium z těchto gymnázií (celkem šlo o 158 osob) byly zaznamenány jejich středoškolské výsledky: známky z matematiky a fyziky na výročních vysvědčeních, studijní průměry v každém ročníku a výsledky z maturitní zkoušky, zaznamenány byly i jejich výsledky (počet bodů) z matematiky a fyziky při přijímací zkoušce na FEL. Jména všech uchazečů a zařazení studentů, kteří nastoupili do studijních skupin, jsou připravena pro další práci na úkolu — posuzování korelací mezi výsledky středoškolského studia, přijímacích zkoušek a vysokoškolského studia; s ohledem na ochranu osobních dat však tyto údaje o jednotlivcích byly utajeny a ve výstupních materiálech grantu

Doc. Ing. Karel Malinský, CSc. (1943), katedra fyziky elektrotechnické fakulty ČVUT Praha, e-mail: `malinsky@fel.cvut.cz`