Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jaroslav Šedivý

# Georg Cantor, zakladatel teorie množin (K 100. výročí první Cantorovy práce z teorie množin)

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 20 (1975), No. 1, 5--14

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139842

# Georg Cantor, zakladatel teorie množin

(K 100. výročí první Cantorovy práce z teorie množin)

*Jaroslav Šedivý, Praha*

Většina článků připomínajících významné postavy z dějin vědy se publikuje v letech, na která připadá nějaké „kulaté" výročí jejich narození nebo úmrtí. Letopočty G. Cantora – 1845, 1918 – neposkytnou v dohledné době příležitost k takovému připomenutí jeho díla, zato se však naplnilo sto let od začátku jeho práce v teorii množin. Použijme tohoto jubilea teorie množin a seznamme se s jejími počátky, které podstatně ovlivnily život G. Cantora i jeho zdraví. Pokusím se stručně vystihnout složitou Cantorovu osobnost, jak je popsána v řadě studií [2], [3], [4] a některých dalších materiálech. Tímto pohledem na zrod teorie množin si může čtenář doplnit informace podané v Pokrocích již dříve, zejména v článku akademika V. Kořínka *Teorie množin, její vznik a vývoj* (PMFA, roč. *10*, 1965, str. 131–160).

**Studenská léta Georga Cantora**

Georg Cantor se narodil dne 3. 3. 1845 v Petrohradě, kde byl jeho otec v té době úspěšným obchodníkem (makléřem). Rod Cantorů však pocházel z Dánska, zatímco matka, roz. Böhmová, byla německé národnosti. Rodina byla smíšená nejen národnostně, ale i vyznáním – otec protestant, matka katolička; protikladné bylo i praktické obchodnické zaměření otce a umělecké sklony matky a celého jejího příbuzenstva. (Cantorovi životopisci tyto okolnosti zdůrazňují v souvislosti s rozmanitostí zájmů G. Cantora, s jeho religiózností i nervovou labilitou.)

Mladý Georg byl prvorozeným synem, projevoval velké nadání již v elementární škole, kterou začal navštěvovat v Petrohradě. Tamní podnebí však zhoršovalo otcovu plicní chorobu, proto celá rodina přesídlila r. 1856 do Německa, kde se nakonec usídlila ve Frankfurtu n. Mohanem. Georg byl posílán zprvu do soukromých škol, pak do gymnázia, reálné školy a vyšší odborné školy v jiných městech; otec zaměřoval jeho vzdělání tak, aby mohl vystudovat techniku a stát se lodním inženýrem. R. 1860 mu k biřmování poslal dopis psaný slavnostním slohem s mnoha ponaučeními do života; dopis obsahuje větu „... Tvoji rodiče a všichni ostatní příslušníci rodu v Německu stejně jako v Rusku a Dánsku upírají svůj pohled na Tebe jako nejstaršího a očekávají, že ... se později staneš zářící hvězdou na obzoru inženýrství.“

Mladý Georg Cantor byl pilným a pozorným žákem, se stále se prohlubujícím zájmem o matematiku. Otec mu nebránil ve studiu matematiky, a tak po maturitě r. 1862 začal studovat v Curychu; pobyt tam však přerušil po otcově úmrtí na jaře r. 1863. Rodina byla zřejmě finančně zajištěna, takže mohl pokračovat ve studiu; odebral se do Berlína, kde studoval matematiku, fyziku a filozofii. Poslouchal přednášky WEIERSTRASSE, KUMMERA a KRONECKERA, pod jejich vlivem se začal hlouběji zajímat o teorii čísel a teorii funkcí. Ani při intenzívním studiu se nestranil studentských posezení ve vinárně; patřil do kroužku, kam docházel i MERTENS, SIMON, THOMÉ a H. A. SCHWARZ (pozdější Cantorův odpůrce).

## Vědecká činnost Georga Cantora do r. 1874

Dne 14. 12. 1867 byl G. Cantor promován na základě 26stránkové práce *De aequationibus secundi gradus indeterminatis*, ve které prohloubil studium otázek řešených GAUSSEM a LEGENDREM v teorii čísel. Zdá se, že Cantor pak v Berlíně krátce vyučoval na dívčí škole, v r. 1868 byl členem SCHELLBACHOVA semináře pro učitele matematiky. Na jaře r. 1869 se habilitoval jako soukromý docent na univerzitě v Halle, kde pak působil po celý život. Již v letech 1868–9 uveřejnil tři vědecké články z teorie čísel, z tohoto okruhu je i jeho habilitační práce *De transformatione formarum ternarium quadraticarum*.

Profesor HEINE ho po příchodu na univerzitu v Halle upozornil na aktuální tematiku trigonometrických řad (v r. 1867 vyšla RIEMANNOVA práce o vyjádření funkcí těmito řadami) a poskytl mu i své vlastní výsledky. Podle Heineových slov se prý G. Cantor pustil do této problematiky s nevšedním zápalem; skutečně se již v r. 1870 objevují dva Cantorovy příspěvky v Crelleově časopise a v letech 1871–2 další tři. Heine sám zařadil do svých prací řadu výsledků, ke kterým ho v diskusích přivedl Cantor, zejména definici iracionálních čísel jako limit posloupností racionálních čísel. G. Cantor se zaměřil na problematiku singulárních hodnot reálné proměnné při studiu konvergence trigonometrických řad, tím se dostal k souborům hodnot číselné proměnné a k souborům bodů na číselné ose.

V Cantorově práci z r. 1871 se objevuje jen kontextuálně užitý termín Wertmenge, v dalším článku [5] z r. 1872 už výslovně zavádí a užívá slov *Wertmenge* [množina hodnot] a *Punktmenge* [množina bodů], pracuje přitom jen s množinami čísel či bodů (číselné osy). Nahrazuje tak slova Anzahl [počet, množství], Gebiet [oblast, obor] i Gesamtheit [souhrn, soubor], pracuje i s pojmem „obor všech množin určitého druhu“. Již v článku [5] definuje pojem „derivace množiny P bodů přímky“ jako množinu P′ všech hraničních*) bodů množiny P a vytváří derivace $P''$, $P'''$, ..., $P^{(v)}$. Tyto operace s množinami bodů číselné osy zavedl Cantor proto, aby rozšířil platnost známých vět i na řady, které mají

*) Dnes obvyklejší termín „hromadný bod“ dává Cantor do závorky za slovo „hraniční“ a uvádí jej jen v uvozovkách; zdál se mu asi méně vhodný.

množinu singulárních hodnot „bohatší", než se dosud připouštělo. Podařilo se mu dokázat, že některé takové věty platí i v případech, kdy nekonečná množina P singulárních hodnot má konečný počet (neprázdných) derivací $P', P'', \ldots, P^{(n)}$.

G. Cantor touto cestou došel k transfinitním ordinálním číslům (náznaky tohoto rozšíření pojmu čísla se datují už do r. 1870). V roce 1873 však jeho pozornost upoutala problematika, ze které vzešel pojem kardinální číslo, trápily ho i filozofické otázky spojené s aktuálním nekonečnem apod.; plody této těžké myšlenkové činnosti spadají již do druhého období Cantorovy vědecké tvorby.

V r. 1872 se G. Cantor setkal zcela náhodou ve Švýcarsku při turistické cestě s Richardem Dedekindem, jehož práce o spojitosti a iracionálních číslech Cantora silně zaujala. Oba muži se velmi spřátelili a zejména pro Cantora představovalo toto přátelství velkou oporu v dalších letech. Šlo o náklonnost dvou lidí s protikladnými povahovými rysy — temperamentní a romanticky založený Cantor našel protiváhu ve strohém a puntičkářsky přesném Dedekindovi. Z bohaté korespondence mezi oběma vědci je patrný postup Cantorových úvah při rozvíjení teorie množin, i případy, kdy Dedekind upřesňoval Cantorovy návrhy důkazů.

## Práce Georga Cantora v letech 1874—1884

Těsně před vánoci r. 1873 dokončil G. Cantor rukopis článku [6] „*O jedné vlastnosti souboru všech reálných algebraických čísel*", který vyšel v Crelleově časopise v r. 1874. Jde o čtyřstránkový příspěvek, ve kterém Cantor porovnával mohutnosti množiny všech přirozených čísel, množiny všech algebraických reálných čísel*) a množiny všech reálných čísel obsažených v intervalu. V článku se však vůbec neobjevuje termín „množina" ani „mohutnost".

Obor přirozených čísel označil Cantor symbolem $(\omega)$ a dokázal, že ho lze vzájemně jednoznačně zobrazit na soubor všech algebraických reálných čísel. Dále dokázal větu: „Je-li dána nekonečná posloupnost navzájem různých čísel $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$, pak lze v každém daném intervalu $(\alpha \ldots \beta)$ určit číslo $\eta$, které není v dané posloupnosti." První článek z teorie množin se tedy týká spočetnosti množin, i když tento termín vůbec neuvádí; dnešním jazykem bychom řekli, že Cantor *dokázal spočetnost množiny všech algebraických reálných čísel (a tím i všech racionálních čísel) a nespočetnost každého intervalu.*

Jak Cantor sám sdělil, domníval se zprvu, že všechny nekonečné množiny jsou ekvivalentní (že existuje „jedno nekonečno"), proto dlouho hledal zobrazení množiny všech přirozených čísel na interval. O nic snazší nebylo hledání důkazu, že takové zobrazení není možné. Objev dvou neekvivalentních nekonečných množin byl velmi závažný, dodal význam pojmu spočetnost množiny a byl odrazovým můstkem k vytvoření pojmu mohutnost množiny.

*) „Reálným algebraickým číslem budeme rozumět reálné číslo $\omega$, které splňuje neidentickou rovnici tvaru $a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, kde $n, a_0, \ldots, a_n$ jsou celá čísla, přitom můžeme považovat $n$, $a_0$ za kladná čísla, koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ za nesoudělné a rovnici za ireducibilní," píše G. Cantor.

Po další čtyři roky neuveřejnil Cantor žádný článek, ale hluboce v té době promýšlel celou problematiku a zřejmě se odhodlával k tomu kroku abstrakce, který znamenal vytvoření nové teorie. Až o prázdninách r. 1877 dokončil článek [7] nazvaný *Příspěvek k teorii množin* a odeslal jej do Crelleova časopisu. Tam však vyvolal odpor některých členů redakce; zejména bývalý Cantorův učtel L. Kronecker zbrzdil jeho uveřejnění, článek vyšel až v r. 1878.

Stěžejním pojmem článku je mohutnost množin, vztah mezi mohutností množiny a její podmnožiny, hlavní pozornost se však upíná k důkazu, že *n-rozměrné kontinuum je ekvivalentní s jednorozměrným kontinuem* (např. množina všech bodů čtverce je ekvivalentní s množinou všech bodů úsečky). Tento výsledek překvapil samotného Cantora, který v dopise Dedekindovi napsal „*je le vois, mais je ne le crois pas*" [vidím ho, ale nevěřím mu] a žádal ho o kontrolu důkazu. Zmínil se též, že v Berlíně jeden přítel označil ideu o stejné mohutnosti roviny a přímky jako absurdní, protože dvě nezávisle proměnné nelze prý redukovat na jednu. Dedekind poukázal na drobnou mezeru v navrženém důkazu (Cantor ji pak obešel v definitivní verzi článku) a vyslovil názor, že v pojmu dimenze je „skryta" spojitost.

Je zajímavé, že ve svém druhém článku zvolil Cantor jiný název pro množiny než užíval v letech 1871–2; rozhodl se pro termín „Mannigfaltigkeit" místo „Menge", patrně pod vlivem Riemannových prací, kde se tak nazývaly obecné souhrny objektů označované dnes „prostory, variety" apod. O množinách, které nemají společné prvky, říkal, že jsou „ohne Zusammenhang" [bez souvislostí, navzájem nesouvisejí], jen v poznámce pod čarou a v uvozovkách uvádí termín „Durchschnitt" [průnik] množin.

V závěru článku, o kterém hovoříme, zformuloval Cantor poprvé svou hypotézu kontinua; je pravděpodobné, že jeho delší přestávku v publikování prací lze přičíst na vrub neúspěšným snahám dokázat tuto hypotézu. Cantor napsal: „... ptáme se, do kolika a do kterých tříd se rozpadají (nekonečné) množiny reálných čísel, zařadíme-li do téže třídy množiny stejné mohutnosti a do různých tříd dáme množiny různé mohutnosti. Indukčním postupem, jehož výkladem se zde nebudeme blíže zabývat, se dostane věta, že počet tříd množin získaný při tomto principu dělení, je konečný a že se rovná *dvěma*. ... Zevrubné zkoumání této otázky odložíme na později." Induktivní postup, o kterém se Cantor zmiňuje, se zakládal na tom, že všechny nekonečné množiny reálných čísel, které si během svých úvah zvolil, se ukázaly být buď spočetné, nebo stejně mohutné jako kontinuum (interval). Hypotéza kontinua trápila Cantora po dalších 40 let jeho života.

Na své první dva články z teorie množin se G. Cantor v dalších pracích stále odvolával; představovaly totiž výsledky, ke kterým se propracoval nesmírně obtížně, s mnoha pochybnostmi (úvahy o nekonečných množinách odmítali např. Gauss i Cauchy). Jako věřící člověk a znalec scholastické filozofie měl Cantor nesnáze i filozofického rázu, radil se s jezuity, s kardinálem Franzelinem a jinými teology protestantskými i katolickými, zda učení o aktuálním nekonečnu neodporuje víře apod. Navíc byl G. Cantor velmi citlivý na reakce druhých, na recenze v tisku, na postoje redakčních rad; pro Kroneckerův postoj se rozešel s Crelleovým časopisem a publikoval pak v Mathematische Annalen, které redigoval F. Klein.

V r. 1879 uveřejnil Cantor článek [8], ve kterém se snažil podat důkaz obecné věty, že *dvě množiny různé dimenze nelze vzájemně jednoznačně zobrazit spojitým zobrazením.* Jeho úvahy nebyly přesné, jak zjistil r. 1899 E. JURGENS; první důkaz zmíněné věty podal L. E. I. BROUWER až v r. 1910. Kromě toho se G. Cantor v letech 1880–82 třemi drobnými příspěvky vrátil k tematice trigonometrických řad, reagoval na práce jiných autorů, kde byl citován. Jinak se znovu zabýval bodovými množinami; lze snad dokonce říci, že se rozhodl k „soustředěnému útoku", aby přesvědčil matematickou veřejnost, že jím koncipovaná teorie množin je užitečná.

V letech 1879–1884 publikoval G. Cantor volný seriál článků [9] nadepsaný *O nekonečných množinách bodů na přímce*; jeho několikaleté prodlužování se projevuje v dost nejednotném stylu, v repeticích i odbočeních od tématu daného názvem. Vrací se k pojmu derivace bodové množiny, v první části rekapituluje své výsledky z let 1871–2 a naznačuje klasifikaci bodových množin. Druhá část článku přináší též několik definic operací s množinami; pro dnešního čtenáře je překvapením volba termínů i symbolika:

$P \equiv \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ znamená, že množina P je shrnutím množin $P_1$, $P_2$, ..., které *nemají* společné prvky,

P je dělitelem Q znamená, že P je obsažena v Q,

Q je násobkem P znamená, že Q obsahuje P,

$\mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots)$ znamená nejmenší společný násobek množin $P_1, P_2, \ldots$ [tj. sjednocení těchto množin],

$\mathfrak{D}(P_1, P_2, \ldots)$ znamená největší společný dělitel množin $P_1, P_2, \ldots$ [tj. průnik těchto množin].

Jak patrno, volil G. Cantor termíny z teorie dělitelnosti přirozených čísel, nepůjčoval si názvy početních výkonů jako např. BOOLE. Celý seriál obsahuje všechny Cantorovy výsledky z uvedeného období, a to z obecné teorie množin i jejích aplikací, teorii mohutností množin i teorii dobrého uspořádání a ordinálních čísel; vyložena je i Cantorova teorie iracionálních čísel.

Páté pokračování seriálu vydal Cantor jako samostatnou publikaci [10] pod názvem *Základy obecné teorie množin* s vlastními poznámkami. Vysvětluje v nich i to, že slovy „Mannigfaltigkeit, Menge" rozumí obecně každou mnohost, kterou lze považovat za jeden celek, tj. souhrn určitých elementů, které lze podle nějakého zákona spojit v jeden celek. Tato práce obsahuje i rozsáhlé filozofické úvahy; Cantor na jednom místě též prohlašuje, že jak doufá, podá přesný důkaz své hypotézy kontinua. Z terminologického hlediska je zajímavé, že Cantor v posledním díle seriálu užívá opět už výhradně slov „Menge, Mengenlehre".

Poslední část seriálu je datována 15. 11. 1883 a končí obvyklým příslibem „Pokračování následuje", ale žádný další díl už Cantor nenapsal; důvody této skutečnosti popíši stručně v dalším odstavci.

**Cantorův kritický rok 1884**

Viděli jsme, jak usilovně Cantor v letech 1877 – 83 psal závažná objevitelská pojednání, ve kterých navíc obhajoval svou koncepci i filozoficky. Stejně usilovně ukazoval i použití obecných vět teorie množin v teorii funkcí, např. v r. 1882 napsal článek *O novém a obecném kondenzačním principu singularit funkcí*, kde citoval práce jiných matematiků a spojoval je se svými výsledky. Měl v tom i tichou podporu C. WEIERSTRASSE, na jehož popud aplikoval pojem spočetnosti množin v analýze.

G. Cantor byl však vnitřně přesvědčen, že teorie množin se může stát nástrojem použitelným v mnohem širším rozsahu. Snažil se proniknout do zahraničních časopisů, aby získal další matematiky, kteří by jeho ideje uplatnili. Vstříc mu vyšel švédský matematik G. MITTAG-LEFFLER, který právě začal vydávat nový časopis Acta mathematica; otiskl v r. 1883 ve francouzském znění výtahy ze dvou Cantorových dopisů obsahující jeho hlavní výsledky i závazek, že v nejbližší době podá důkaz hypotézy kontinua (francouzský text prý pořídil H. POINCARÉ).

Cantorovo duševní napětí se na počátku r. 1884 stupňovalo, staré „šrámy" ze střetnutí s Kroneckerem a Schwartzem (zhatili jeho úsilí dostat se na berlínskou univerzitu, zlehčovali jeho výsledky ve svých přednáškách atd.) si znovu připomínal; začal mít za zlé i Weierstrassovi a jiným, že mlčí o jeho objevech atd. Své stesky vyjevoval a svému rozčilení ulevoval v dopisech Mittagu-Lefflerovi, který se stal jeho důvěrníkem.*) Narůstající duševní nevyrovnanost Cantora je patrna ze střídání tónu dopisů, z okolnosti, že psal i dva dopisy denně a za rok 1884 jich odeslal Mittagu-Lefflerovi na padesát.**)

Velmi neblaze působilo na Cantora i to, že nemohl dostát svým slibům, že v brzké době uveřejní důkaz hypotézy kontinua. Nadějná skica důkazu, kterou již publikoval, se mu rozsypala pod rukama a to zvyšovalo jeho depresi. Začal tíživě pociťovat svou osamělost, deset let práce bez podpory ostatních a bez ohlasu.

Rozjitřenost, které Cantor podléhal, se utišila v době prázdnin, jež trávil s rodinou v Harzu. Silné rozčilení pominulo a Cantor začal litovat svého počínání, koncem srpna 1884 píše L. Kroneckerovi omluvný dopis a po jeho prý vlídné odpovědi ho začátkem října navštěvuje v jeho bytě. Tam po několikahodinové debatě uzavřeli smír, že se nebudou osobně napadat a ponechají vývoji vědy rozhodnutí, kdo z nich má pravdu. (Kronecker považoval množinověteoretické úvahy za bezobsažné fantazie, nepotřebné pro matematiku a škodlivé pro mládež.) Tímto diplomatickým krokem G. Cantor utlumil jeden ze zdrojů svého utrpení.

Přesto však nebyl konec r. 1884 pro Cantora snadný; vypjal se k novému hledání důkazu hypotézy kontinua, ale nedostal se dále než dosud; v posledních fázích uvažoval už zmateně. Tak v něm uzrálo rozhodnutí skoncovat s matematikou vůbec, jednal dokonce i o tom, že bude přednášet filozofii místo matematiky. Své předsevzetí Cantor

*) Cituji z [3]: „Kdo jednou zažil kouzlo Cantorovy osobnosti, ví, že byl pln temperamentu a vtipu, jiskřivého ducha a originálnosti, přitom vznětlivý .... Dalo by se čekat, že dopisy budou také takové. Jsou však plné hořkosti a těžkých, ne neoprávněných obžalob .... Všichni ti, ke kterým obrací své výčitky, jsou již mrtvi, ale přesto nelze doslova opakovat ostrost výrazů, kterých použil ...."

**) Několik ukázek z korespondence G. Cantora a G. Mittaga - Lefflera otiskujeme za tímto článkem. (Pozn. red.)

naštěstí nesplnil, od r. 1885 již normálně pracoval, přestal však na čas publikovat v matematických časopisech; psal sice do filozofických časopisů, ale stále o problému aktuálního nekonečna a transfinitních čísel. Těžké prožitky r. 1884 zanechaly stopy na jeho zdraví, ale z aktivní činnosti odešel až po 60. roce věku.

## Další Cantorova činnost

Je smutnou skutečností, že se Cantor zhroutil v době, kdy se již tiskly nebo vznikaly články, na které tolik let čekal. Mittag-Leffler, Poincaré, HARNACK, PHRAGMÉN i náš LERCH jsou autory prací z let 1884–5, v nichž mají Cantorovy ideje svůj odraz, jde o práce z teorie funkcí, které vyžadovaly hlubší znalosti topologických vlastností číselných, resp. bodových množin. V [2] se píše:

„Vítězný postup Cantorových idejí lze datovat od okamžiku, kdy Mittag-Leffler a Poincaré doložili svými skvělými výsledky jejich velký význam pro teorii funkcí. Poincarého práce o automorfních funkcích a zvláštnostech jejich definičních oborů by sotva byly dokončeny bez náhledu do vnitřní struktury bodových množin; stejně tak Mittag-Leffler na základě Cantorových pojmů a výsledků tak říkajíc rentgenoskopicky prosvítil singularity při vytváření analytických funkcí."

Cantor sám publikoval ještě v r. 1891 krátkou poznámku [11], ve které vyložil svou diagonální metodu a ukázal možnosti jejího uplatnění v důkazech, které dříve podával složitějším způsobem. V letech 1895 a 1897 vyšly jeho velmi obsažné souhrnné studie [12] *Příspěvky k základům transfinitní teorie množin*. Jejich jazyk je již vcelku moderní, včetně alefů i symbolu $\omega$; na úvodních řádcích je i známé Cantorovo vysvětlení „Množinou rozumíme každý souhrn [shrnutí v jeden celek] určitých dobře rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo mysli, které nazveme prvky množiny".

V našem členském časopise je snad vhodné připomenout i Cantorovy zásluhy o založení „Jednoty německých matematiků" [Deutsche Mathematiker – Vereinigung] v r. 1890. G. Cantor byl mezi autory provolání, jež bylo rozesíláno v r. 1889 matematikům sdruženým do té doby ve Společnosti přírodovědců a lékařů, připravoval i první valné shromáždění v Halle na podzim r. 1890 a byl zvolen prvním předsedou Jednoty (funkce se vzdal ze zdravotních důvodů v r. 1893). Stejně iniciativně se zasazoval o vytvoření mezinárodní unie matematiků a o svolávání mezinárodních kongresů matematiků.

Na prvním kongresu konaném v Curychu r. 1897 se dostalo Cantorovi velkého uznání od francouzských a německých matematiků, kteří navázali na jeho dílo (POINCARÉ, BOREL, HADAMARD, HURWITZ, HILBERT, MINKOWSKI aj.) Na druhém kongresu r. 1900 v Paříži zařadil Hilbert Cantorovu hypotézu kontinua jako první ze svých slavných 23 problémů.*)

Takzvanou krizi teorie množin přijal Cantor kupodivu zcela klidně. V dopise Dedekindovi z 28. 6. 1899 píše: „Vyjděme od pojmu určité mnohosti [Vielheit] věcí, pak se

---

*) Viz Pokroky, roč. *XVI* (1971); v čísle 4 je zařazen článek P. VOPĚNKY „O prvním Hilbertově problému".

mi jeví nutným rozlišovat dvojí mnohosti. Jedny mohou být takové, že uznání jejich „celistvosti“ [Zusammensein] vede ke sporu, je tedy nemožné považovat takovou mnohost za jeden celek, za „hotovou věc“. Takové mnohosti nazýváme ... sporné mnohosti. Příkladem může být „mnohost všeho myslitelného“ ... Když naproti tomu lze uvažovat o souhrnu prvků nějaké mnohosti jako o celku a nedojde se ke sporu, pak je ji možno považovat za „jednu věc“, tu nazývám bezesporná mnohost neboli množina.“

Přesně stejným způsobem je situace řešena pojmem třída (= mnohost) a množina v soudobých teoriích množin. Cantor znal tzv. Buralliho - Fortiho antinomii o dva roky dříve, než byla uveřejněna, r. 1899 popsal Dedekindovi řadu dalších „sporných mnohostí“, tj. tříd, které nejsou množinami. Považoval jejich existenci za přirozenou a antinomie chápal jako důkazy, že ta či ona „mnohost“ není množinou.

Po r. 1904 se dostalo Cantorovi mnoha poct od vědeckých institucí a univerzit; on sám působil na univerzitě v Halle i přes občasné zdravotní potíže až do r. 1913. Konec života G. Cantora spadá do období první světové války, v jejímž posledním roce — 6. ledna 1918 — zemřel.

*

Viděli jsme, jak Cantor žil pro vědu a trpěl pro nové pravdy, které objevoval. Vývoj matematiky dal za pravdu jemu, ne L. Kroneckerovi a jeho spojencům. Výstižně to vyjadřuje citát z pera E. ČECHA (první odstavec předmluvy ke knize *Bodové množiny* z r. 1932):

„Teorie množin má v dnešní matematice zcela jiné postavení než v matematice minulé generace. Nedůvěra, s níž pěstitelé klasické matematiky sledovali prvé úspěchy této nejmladší složky matematického bádání, zmizela nadobro. V algebře, v analýze, v geometrii, v počtu pravděpodobnosti, všude nejen množinový směr dovedl nalézti cesty k mohutnému dalšímu vývoji tam, kde klasické metody již nedávaly nic nového, nýbrž samy základy jednotlivých matematických nauk se pod vlivem množinového myšlení objevily v novém a hlubším světle. Teorie množin tvoří velmi podstatnou a zvláště charakteristickou složku nových pokroků v matematice; ale nadto i při vyučování vyšší matematice stále více půdy nabývá směr, snažící se soustřediti výklady o jednotlivých naukách kolem centrálního množinového podkladu.“

Dodejme, že v posledních desetiletích se základní množinové pojmy (zejména jazyk teorie množin) stávají součástí modernizované matematiky na základních a středních školách.*)

Literatura

[1] G. CANTOR: *Gesammelte Abhandlungen*, Berlín, J. Springer 1932

[2] A. SCHOENFLIES: *Zur Erinnerung an G. Cantor*, Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, B. *31* (1922), S. 97—106

*) Překvapivě působí v této souvislosti stručná poznámka v [4], že již v r. 1885 napsal J. MEYER, ředitel školy v Halle, učebnici matematiky využívající množinových pojmů. Autor prý o ní diskutoval s Cantorem; pro nedostupnost pramenu nemohu podat bližší vysvětlení, oč šlo.

[3] A. Schoenflies: *Die Krisis in Cantors mathematischen Schaffen*, Acta Mathematica *50* (1928), S. 1—23
[4] A. Fraenkel: *Georg Cantor*, Jahresbericht d. Deutschen Math.-Verein., B. *39* (1930), S. 189 bis 266
[5] G. Cantor: *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Math. Annalen *5* (1872), S. 123—132
[6] G. Cantor: *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Journal f.r.u.a. Mathematik *77* (1874), S. 258—262
[7] G. Cantor: *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal f. Math. *84* (1878), S. 242—258
[8] G.Cantor: *Ueber einem Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten*, Nachr. v.d. G. in Göttingen (1879), S. 127—135
[9] G. Cantor: *Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Math. Annalen *15* (1879), *17* (1880), *20* (1882), *21* (1883), *23* (1884).
[10] G. Cantor: *Grundlagen einer algemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Lepzig, Teubner 1883
[11] G. Cantor: *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, Jahresb. d. D. Math.-Ver. *1*(1892), S. 75—78
[12] G. Cantor: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Math. Ann. *46* (1895), *49* (1897).

## Z korespondence G. Cantora a G. Mittaga-Lefflera

... je mi známo, že Schwarz a Kronecker proti mně po léta hrozně intrikují ze strachu, že bych se tam [na berlínskou univerzitu] mohl jednou dostat. Považoval jsem tedy za svou povinnost chopit se sám iniciativy a obrátit se na ministra. Předem jsem už znal bezprostřední efekt, že totiž Kronecker vyjede jak bodnut škorpiónem a spustí se svými pomocníky takový řev, že Berlín bude možné považovat za africkou poušť s jejími lvy, tygry [?] a hyenami. Jak se ukazuje, tohoto cíle jsem skutečně dosáhl.

G. Cantor, 1. 1. 1884

Jak se Vám opovážil pan Kronecker říci, že „doufá, že přijmete jeho práce ... se stejnou nestranností jako výzkumy svého přítele Cantora"? ... já pro své práce vyžaduji stranickost, ne však pro svou pomíjivou osobu, ale stranickost pro pravdu, která je věčná ...

G. Cantor, 26. 1. 1884

Ve své poslední práci jsem se plně postavil na Vaše stanovisko; co bude řečeno proti Vám, postihne tedy mne právě tak jako Vás.

G. Mittag - Leffler, 5. 2. 1884

... již po nějakou dobu se necítím tak svěží, jak by se patřilo, proto ani nevím, kdy budu pokračovat ve své vědecké práci; momentálně nemohu dělat nic a omezuji se na povinnou přednáškovou činnost.

G. Cantor, 21. 6. 1884

Kronecker je na mne velmi rozhněván kvůli tomu, že jsem použil Vašich teorií. Nazývá to neplodnou generalizací. Weierstrass naproti tomu se zdá být spokojen a chce vyložit princip mého příspěvku na semináři v Berlíně.

G. Mittag - Leffler, 2. 8. 1884

Rozčilení, která jsem prožíval letos v létě a psal Vám o nich, jsou za mnou. Mohu Vám nyní říci, že měla svůj základ v nesrovnalostech, do kterých jsem se dostal, ne bez vlastní viny, ve svých vědeckých pracích. Patrně jste něco takového sám správně odhadl...

Okolnost, že Kronecker se tak ostře vyslovil proti mým pracím, mne neměla proti němu rozohnit tak, jak jste viděl v minulé zimě. V rozhorlení jsem zašel ve svých dopisech, které jsem Vám posílal, až do nespravedlnosti. Toho opravdu lituji. A když Kronecker poskytl příležitost, rozhodl jsem se podat mu ruku a hledat usmíření s ním.

G. Cantor, 18. 8. 1884

Šestihodinová zábava, kterou jsem s ním [Kroneckerem] vedl, nepřinesla z jeho strany žádné nové myšlenky; to, co namítá proti mé teorii transfinitních čísel, není nic jiného než to, co bylo mnohem duchaplněji vysloveno proti aktuálnímu nekonečnu od řeckých skeptiků před 2000 let. Opakování těchto argumentů, resp. sofizmat, ústy tak schopného a dobře situovaného muže jako je p. Kronecker, je nečiní silnějšími, přesvědčivějšími ani výstižnějšími.

G. Cantor, 9. 10. 1884

Situace je taková, že já si s naším panem de Méré [Kroneckerem] nic nezačínám, protože se zbytečně nezabývám malichernostmi. On sám se chrání, aby se se mnou otevřeně střetl ..., pro něho je výhodnější podrývat v temnotách jako krtek půdu jak pod Weierstrassem a jeho ctiteli a žáky, tak i pode mnou a teorií množin.

G. Cantor, 2. 1. 1885

## První ohlas Cantorova díla v české matematické literatuře

Ohlas Cantorových prací v české matematické literatuře 19. století byl sice brzký, ale zůstal zřejmě omezen na dílo mladého průbojného Matyáše Lercha (1860—1922). Už v květnu r. 1884 napsal *Příspěvek k nauce o množinách bodů v rovině* (Zprávy o zasedání král. České společnosti nauk, 1884, str. 176—8), ve kterém se odvolává na větu Jiřího*) Cantora z r. 1883. Lerch stručně vykládá pojem derivace množiny bodů, klasifikuje bodové množiny *v rovině* a dokazuje větu: „Soubor všech hodnot, jež obdržeti může analytická funkce jednoznačná a monogenní, tvoří vždy množinu mohútnosti kontinua". Pozoruhodný je jazyk této práce, který je až na slovosled zcela moderní, Lerch užívá termínů „množina, mohútnost", které asi sám vytvořil. Je to překvapující i proto, že slovo „množina" bylo pak zatlačeno bezbarvým termínem „množství". Ostatně ani sám Lerch ho už nepoužil ve své práci *O soustavách bodů a jejich významu v analysi* (Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, *XV* (1886)). Zdá se pravděpodobné, že termín „soustava bodů" měl vyjádřit Cantorovu „Mannigfaltigketit".

*) Zčešťování jmen vědců bylo v té době běžné, psalo se např. Blažej Pascal, Bohumil Vilém Leibniz apod.

---

Každý druh problému převeď na matematický problém.

Každý matematický problém převeď na algebraický problém.

Každý algebraický problém převeď na řešení rovnice.

*R. Descartes*

Metoda řešení je dokonalá, jestliže můžeme od počátku předvídat a vždy dokázat, že podle ní dosáhneme svého cíle.

*G. W. Leibniz*

Existuje hluboce zakořeněné lidské přání získat nějaký neomezený prostředek k rozřešení všech problémů. Toto přání může zůstávat v mnohých z nás utajeno, ale zjevné je v pohádkách — vzpomeňte si na magická slova otvírající všechny dveře. Descartes přemýšlel o univerzální metodě pro řešení všech problémů a Leibniz velmi jasně formuloval ideu dokonalé metody. Ale hledání univerzální dokonalé metody neuspělo lépe než hledání kamene mudrců; existují velké sny, které musí zůstat sny. Přesto mohou takové nedosažitelné ideály ovlivnit lidi; nikdo nedosáhl Polárky, ale mnozí našli správný směr, když se na ni dívali.

*G. Polya*