

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Miroslav Katětov

N. N. Luzin a teorie reálných funkcí

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 20 (1975), No. 3, 137--145

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139865>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1975

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

N. N. Luzin

a teorie reálných funkcí

Miroslav Katětov, Praha

V únoru 1975 uplynulo 25 let od úmrtí N. N. Luzina, jehož činnost měla mimořádný význam pro vznik a rozvoj velmi závažných partií teorie reálných funkcí a bodových množin. Popisu jeho díla předešleme stručně vylíčení života a osobních rysů, jež se plně opírá o sovětské publikace, zejména o životopis obsažený v [1] a o vzpomínky v článcích [4], [5].

Život a osobnost

Nikolaj Nikolajevič Luzin se narodil 9. prosince 1883 v Tomsku. Jeho otec byl obchodním zaměstnancem.

Středoškolské vzdělání získal N. N. Luzin na gymnáziu v Tomsku. Ve vyšších třídách velmi mnoho četl, a to z nejrůznějších oblastí včetně filozofie. Se studiem míval potíže. Některé obory, např. fyzika, ho velmi zajímaly, avšak jeho mechanická paměť byla velmi špatná, a proto dějepis, zeměpis a také jazyky mu působily značné nesnáze. Matematika byla na gymnáziu podávána takovým způsobem, že se přiřadila k těmto předmětům. Školní neúspěchy v matematice vedly k tomu, že otec zjednal posluchače techniky, který dával N. Luzinovi kondice. Tomu se podařilo, jak mnohem později psal Luzin, ukázat mu matematiku jako „systém uvažování usměrňovaný živou představivostí“.

V r. 1901 N. Luzin maturoval a téhož roku vstoupil na matematické oddělení fyzikálně matematické fakulty moskevské university. Měl však tehdy v úmyslu studovat inženýrství; jak uvádí, chtěl jen předem získat důkladnější vědomosti z matematiky, které se dosti obával.

Matematika a fyzika byly tehdy na moskevské universitě na vzestupu; v matematice začínaly pronikat hlavně zásluhou B. K. MLODZEJEVSKÉHO a I. I. ŽEGALKINA moderní směry. N. Luzin po nějakou dobu pomýšlel na studium fyziky, avšak přednášky z matematiky na něho hluboce zapůsobily a brzy určily jeho zaměření. Již v nižších ročnících byl N. Luzin tajemníkem studentského matematického kroužku, jenž se do značné míry věnoval základním pojmům teorie množin a matematické analýzy.

V bouřlivém roce 1905 se N. Luzin přechodně zúčastnil revolučního hnutí, později však na radu prof. D. F. JEGOROVA odjel studovat na univerzitu v Paříži. Nejvíce tam na něho zapůsobily přednášky H. POINCARÉHO, jinak však především pracoval sám v knihovnách i doma, nezřídka doslova ve dne v noci.

V létě 1906 se N. Luzin vrátil do Moskvy, složil státní zkoušky a byl „ponechán na univerzitě“, a to u D. F. Jegorova; nyní bychom řekli, že se stal aspirantem.

V době aspirantury chodil N. Luzin nejdříve na přednášky na lékařské fakultě, neboť uvažoval o tom, že se stane lékařem a – řečeno výrazem z doby narodníků – „půjde mezi lid“. Později navštěvoval asi rok filozofické přednášky, ale pak toho zanechal, neboť podle jeho slov „nenaznačovaly možnost tvůrčí činnosti“.

Po tomto intermezzu se N. Luzin plně vrátil k matematice, složil tzv. magisterské zkoušky a po přednesení dvou zkušebních přednášek hodlal přednášet ve studijním roce 1910–11 kurs reálných funkcí. Byl však fakultou vyslán do zahraničí a na podzim 1910 odjel do Göttingen. Zabýval se tam především trigonometrickými řadami, napsal a na naléhání E. LANDAUA publikoval svou první práci [6]. Bylo mu tehdy již přes 27 let; byl tedy ve věku, ve kterém nemálo významných matematiků již vytvořilo podstatnou část svého díla. N. N. Luzin si však patrně tehdy ještě dost nedůvěřoval, anebo možná kladl příliš velké požadavky na to, co by měl publikovat.

Roky 1912–1914 strávil N. Luzin v Paříži, navštěvoval přednášky a semináře z různých oborů matematické analýzy a především pokračoval ve vlastní práci. Na podzim 1914 se vrátil do Moskvy a začal přednášet na univerzitě, nejdříve jako soukromý docent a pak brzy jako profesor. Z této činnosti byl nejdůležitější výběrový kurs reálných funkcí a seminář s ním související. Význam tohoto pravidelného kursu a semináře byl jistě dán jejich obsahem, ale možná ještě více způsobem podání a vedení; k tomu se ještě vrátíme.

V r. 1915 předložil jako magisterskou disertaci spis [2]. Šlo o dílo mimořádného vědeckého významu, což oponenti plně ocenili; došlo tak k výjimce, která se vyskytovala jen velmi zřídka – N. N. Luzinovi byla bez předchozí magisterské hodnosti udělena vědecká hodnost „doktora čisté matematiky“.

V letech 1915–1918 se začal rychle vytvářet kolektiv Luzinových žáků a spolupracovníků, zároveň se však projevil potíže válečné doby i počátečního poválečného období.

V letech 1918–1922 působil N. N. Luzin na Polytechnickém institutu v tehdejší Ivanovo-Vozněsensku, asi 200 km na severovýchod od Moskvy. V této době se také začal, i když spíše na okraji své činnosti, zabývat aplikacemi a na podnět S. A. ČAPLYGINA pracoval ve výzkumném ústavu dopravy. Dojížděl dosti často do Moskvy, takže jeho práce na univerzitě neustala; fungoval seminář a rostla skupina Luzinových žáků, mezi něž patřili např. předčasně zesnulý M. SUSLIN, dále D. MENŠOV, A. CHINČIN, P. S. ALEXANDROV, do jisté míry P. S. URYSON a četní jiní. Luzin podstatně ovlivnil i další matematiky, též W. SIERPIŇSKÉHO, který v prvních válečných letech se ocitl v Moskvě.

S obnovením normální práce univerzity zanechává N. N. Luzin v r. 1922 činnosti v Ivanovo-Vozněsensku a vrací se do Moskvy. Jeho skupina, běžně nazývaná „Luzitánie“, se dále rozrůstá (L. A. LJUSTERNIK, N. K. BARIOVÁ, M. A. LAVRENT'JEV, P. S. NOVIKOV, L. V. KELDYŠOVÁ atd.). N. N. Luzin pracuje v této době především v oblasti deskriptivní teorie funkcí a bodových množin a publikuje četné práce. Jejich velký význam je jak v konkrétních výsledcích, tak i v celkovém přístupu.

Přítom však „Luzitánie“ brzy začíná z různých příčin měnit svůj charakter a pak rychle uhasíná; také proto, že řada mladých matematiků, jež N. N. Luzin uvedl do vědecké práce, se obrátila k jiné tematice.

V dalších letech se N. N. Luzinovi dostává mnohostranného uznání v zahraničí

i doma. V r. 1927 se stává členem korespondentem Akademie věd SSSR, v r. 1929 akademikem. Od r. 1930 řídí oddělení teorie funkcí tehdejšího Fyzikálně matematického ústavu AV SSSR, umístěného do r. 1934 v Leningradu. Byl také v té době několikrát v zahraničí, zejména přibližně po dva roky v Paříži, kde připravil knihu [7].

V třicátých letech pokračuje N. N. Luzin v deskriptivní teorii a publikuje zejména ve *Fundamenta Mathematicae* a v *Comptes Rendus* pařížské Akademie. Zabývá se též různými otázkami souvisejícími s aplikacemi (v letech 1931 – 32 publikoval čtyři práce tohoto druhu).

V roce 1936 dochází ke zlomu ve vědecké dráze N. N. Luzina. Od poloviny roku je předmětem četných ostrých obvinění v tisku. Tato neoprávněná obvinění měla sice naštěstí patrně jediný přímý organizační následek, totiž přechod N. N. Luzina do jiného ústavu Akademie, je však závažnou skutečností, že po roce 1936 nepublikoval N. N. Luzin již žádnou práci (s výjimkou některých výsledků týkajících se množin přirozených čísel) z těch oblastí, v nichž bylo těžiště jeho vědeckého významu.

Po roce 1936 přestal N. N. Luzin být pracovníkem Matematického ústavu AV SSSR, v němž (resp. ve Fyzikálně matematickém ústavu) byl zaměstnán od r. 1929. Od r. 1937 do r. 1940 byl pak jeho působištěm jediné Ústav automatiky a telemechaniky AV SSSR. V této době i v dalších letech publikoval několik prací z teorie diferenciálních rovnic a z diferenciální geometrie; v r. 1940 vydal učebnici teorie reálných funkcí. Od r. 1941 se znovu stává zaměstnancem Matematického ústavu a současně působí též ve zmíněném Ústavu automatiky a telemechaniky. Pracuje i nadále v disciplínách, o nichž jsme se teď zmínili; jeho práce z diferenciální geometrie obsahují významné výsledky. S univerzitou nemá soustavný kontakt, někdy však koná přednášky (ostatně již od r. 1939 přednášel jen málo).

Zdraví N. N. Luzina bylo od dětství dosti nevalné. V pozdějším věku se podle životopisných údajů u něho objevovaly srdeční záchvaty, jež mu ztěžovaly vědeckou práci. Přesto pracoval doslova do posledních dnů svého života.

Dne 28. února 1960 N. N. Luzin náhle zemřel po akutním srdečním záchvatu.

N. N. Luzin byl složitá, velmi nevšední osobnost, po některých stránkách možná bližší stylu uměleckého světa než běžnému stylu světa exaktní vědy. Rysy jeho osobnosti se výrazně projeví též v jeho činnosti jako matematika. Sotva se dají stručně charakterizovat jinak než poukazem na některé kladné i záporné, byť možná jen zdánlivě, stránky jejich odrazu ve vědecké činnosti, ve vzniku a vývoji kolektivu soustředěného kolem N. N. Luzina.

Snad nejvýraznějším rysem Luzinovy osobnosti byla mimořádně zvýšená emocionalita. S tím souviselo také jeho vášnivě zaujetí pro matematiku (v některých článcích o Luzinovi se dokonce používá výrazu „oděržimost“ – posedlost). Tento rys – rozumí se, ve spojení s mimořádnou vědeckou i pedagogickou úrovní – silně přitahoval lidi a značně přispěl ke zrodu a vývoji Luzinovy matematické skupiny. Na druhé straně, jak je patrné z některých vzpomínek, přispělo toto zaujetí, spojené s jistou nadneseností celkového stylu i dalšími rysy, k pozdější disociaci Luzinova kolektivu. Obdobnou dvojí úlohu měly též Luzinovy vztahy k žákům a spolupracovníkům, které měly velmi emocionální a přitom proměnlivý charakter.

U Luzina následovalo po počáteční době relativního vědeckého osamocení povlovné

přibývání žáků a spolupracovníků, a potom přišlo oslnivé, ale krátké období, kdy vedl vynikající kolektiv mimořádně nadaných mladých lidí. Nesl pak velmi těžce postupný přechod řady svých žáků k jiné tematice a rozpad skupiny; právě pro jeho emocionalitu mu nebyla přítom kompenzací ta okolnost, že vznikla Luzinova škola teorie reálných funkcí a široké spektrum dalších směrů.

O některých dalších Luzinových rysech se zmíníme, až budeme mluvit o „Luzitánii“. Poznamenejme teď ještě, že jeho vztah ke kolegům, žákům a vůbec matematickému prostředí byl v podstatě živě kladný, ale dosti kolísavý, v pozdějším období pak často chladně zdrženlivý a již dříve nezřídka ironický. To vedlo u Luzina později k uzavřenosti v úzkém kruhu.

Nelze nakonec nedodat, že shodou okolností byla právě rozpornost rysů osobnosti N. N. Luzina svým způsobem optimální pro první období vývoje sovětské matematiky v jejím „množinovém“ zaměření.

Vědecká činnost

Více než u jiných významných postav matematiky jsou u N. N. Luzina důležité ty stránky činnosti, jež se nedají zahrnout do matematického díla v užším smyslu, tj. do vybudovaných teorií, dokázaných vět atd. Věnujeme proto těmto stránkám více místa, než bývá obvyklé; začneme však od vlastního vědeckého díla, jež ostatně samo o sobě plně zajišťuje N. N. Luzinovi významné místo v dějinách matematiky.

Některé práce N. N. Luzina přímo souvisejí s aplikacemi; šlo přitom většinou o diferenciální rovnice. Jsou to čtyři články z let 1931, 1932 a o něco více prací z období 1940 až 1947*). Tyto články mají vysokou vědeckou úroveň, především však ukazují, že N. Luzin ovládal do hloubky metody klasické analýzy a dovedl je upravit a aplikovat na fyzikální a příbuzné problémy. Ostatně měl vůbec široký rozhled a zajímal se též o dějiny vědy; dokladem toho je např. jeho článek (z r. 1943) o Newtonově teorii limit.

V posledním období svého života, asi od r. 1938, se N. N. Luzin zabýval některými otázkami diferenciální geometrie a dosáhl v nich významných výsledků.

Dva Luzinovy články ([8], [9]; první obsahuje výsledky, druhý důkazy) pojednávají o soustavách množin přirozených čísel. Vznikly zřejmě v souvislosti s úvahami věnovanými deskriptivní teorii množin a příbuznými otázkami. Fakticky se však týkají jiné tematiky; z nynějšího hlediska jde v nich vlastně o otevřené množiny v prostoru $\beta N-N$ (kde βN značí Čechův-Stoneův kompaktní obal diskrétního spočetného prostoru N).

Velmi významné jsou Luzinovy výsledky z teorie funkcí komplexní proměnné, obsažené v několika člancích publikovaných v různých letech (od r. 1911 až do r. 1947); některé výsledky získal společně se svým mladším spolupracovníkem I. PRIVALOVEM. K problematice analytických funkcí dospěl zřejmě od trigonometrických řad; ostatně již první Luzinova vědecká publikace [6] se týká potenčních řad a úzce souvisí s trigonometrickými řadami. Další práce o analytických funkcích se týkají rozmanitých otázek,

*) Vzhledem k tomu, že bibliografie Luzinova díla je obsažena např. v [1], upouštíme místy od citací a bibliografických údajů.

zejména však limitních hodnot na hranici definiční oblasti. Od rozboru Luzinových prací týkajících se analytických funkcí zde upustíme a odkazujeme na hodnotící články obsažené v [1].

Všechny ostatní Luzinovy vědecké publikace patří — až na některé jednotlivosti — do centrální oblasti jeho vědeckých zájmů, totiž do tzv. metrické teorie funkcí a deskriptivní teorie množin a funkcí, popř. s těmito oblastmi úzce souvisí.

Převážná většina hlavních Luzinových výsledků z těchto oborů je obsažena v knihách [3] a [7] (přičemž do monografie [7] zařadil N. Luzin též některé výsledky svých žáků). Charakteristika obsahu těchto knih plně postačí k objasnění podstaty Luzinova vědeckého díla; nebudeme se proto zabývat jeho jinými publikacemi patřícími do zmíněných oborů.

Charakteristiku konkrétních matematických výsledků musíme u Luzinova díla ve zmíněných oborech uvést zmínkou o jeho celkovém přístupu k problematice; tento celkový přístup a pohled se totiž u Luzina obrátil v zaměření a ve výsledcích vědecké práce v míře, jež je jinak dosti vzácná.

Své názory na úkoly teorie reálných funkcí vyložil N. Luzin již v r. 1915 v úvodu práce [2]. Mluví tam zejména o vztazích mezi teorií reálných funkcí a tehdejší matematickou analýzou a uvádí dva typy úloh spojujících tyto obory. Formuluje je takto: (1) „Je dána strukturální vlastnost funkce. Naléztí analytické výrazy vyjadřující tuto funkci“; (2) „Je dána třída analytických výrazů. Naléztí nutnou a postačující strukturální vlastnost funkcí vyjadřovaných touto třídou analytických výrazů“.

V práci [2] si staví úlohu druhého typu pro případ, že příslušnými „analytickými výrazy“ jsou trigonometrické řady. Úplné vyřešení takto postavené úlohy je sotva možné, a to již proto, že „vyjádření“ funkce trigonometrickou řadou lze chápat v nejrůznějších smyslu; N. Luzin však dosáhl ve zmíněné práci (zčásti také v některých pozdějších článcích) velmi významného pokroku. K tomu potřeboval některá tvrzení z teorie reálných funkcí; jak se později ukázalo, tato tvrzení mají sama o sobě nemenší význam než ty věty, pro jejichž důkazy měly být pomocným prostředkem.

Uvedeme nyní některé výsledky práce [2]; úplný přehled s popisem navazujících zlepšení a pozdějšího vývoje by přesahoval rámec nynějšího článku. N. N. Luzin zjistil, že k tomu, aby funkce byla měřitelná, je nutné a stačí, aby se dala učinit spojitou pozměněním na množině libovolně malé míry; N. BOURBAKI sice uvádí ve svých *Eléments d'histoire des mathématiques*, že o této vlastnosti pojednal již G. VITALI ([11]), podle všeho však teprve N. Luzin plně ocenil její význam a soustavně používal zmíněné věty. V [2] bylo také dokázáno, že každá měřitelná skoro všude konečná funkce má primitivní funkci čili „neurčitý integrál“ a že mezi všemi primitivními funkcemi se Lebesgueův neurčitý integrál vyznačuje tím, že má „nejmenší délku“ (pojme-li se jako křivka v rovině).

Z vlastní problematiky trigonometrických řad zkoumané v [2] uvedeme dva výsledky. Byla udána podmínka, jež je nutná a stačí k tomu, aby Fourierova řada pro funkci s integrovatelným čtvercem konvergovala skoro všude. Bylo zjištěno, že každá měřitelná skoro všude konečná funkce je skoro všude „součtem“ (v jistém přesně udaném smyslu) vhodných trigonometrických řad; mnohem později se ukázalo, že zde lze mluvit prostě o součtu řady v běžném smyslu. Každé z těchto tvrzení dává odpověď — rozumí se

jen dílčí a přitom první z nich jen nepřímou – na základní otázku po charakterizaci funkcí vyjádřitelných trigonometrickou řadou.

Také v práci [7] věnované deskriptivní teorii množin je konkrétní zaměření podstatně ovlivněno celkovým přístupem. Nenalzáme sice v ní jednoznačnou vlastní formulaci cílů, ale redakční předmluva k ruskému vydání právem uvádí, že „základním směrem ... bylo zkoumání efektivních množin ...“; tím jsou míněny množiny, jež lze v jistém smyslu jednoznačně udat (bez použití axiómu výběru).

Efektivnost a podobné pojmy jsou přitom pojímány takto: Vytváření průniku a sjednocení spočetně mnoha množin se chápe jako oprávněná „efektivní“ operace a stejně tak se chápe operace „promítání“ z kartézského součinu dvou prostorů do některého faktoru. U operace vytváření doplňku však měl Luzin podstatné výhrady; uvádí, že dovedeme-li efektivně produkovat prvky množiny, neznamená to ještě, že to dovedeme také pro její doplněk (viz např. [7], ruské vydání, poznámky na str. 38). Byl zřejmě jedním z prvních, kdo si plně uvědomil, že z hlediska efektivnosti přináší vytváření doplňku vážné problémy, a pravděpodobně byl vůbec prvním, u koho se tento postoj odrazil přímo ve vlastním matematickém výzkumu.

Konkrétně jde v [7] nejdříve o borelovské množiny; jak známo, jsou to, zhruba řečeno, množiny v topologickém prostoru, které lze dostat např. z uzavřených množin opakovaným vytvářením spočetných sjednocení a průniků, popř. též vytvářením doplňků. Od nich se pak přechází k analytickým (Suslinovým) množinám, což jsou, zhruba řečeno, projekce borelovských množin, a pak k množinám projektivním, které zavedl N. Luzin; tyto množiny se dostanou z borelovských množin opakovaným vytvářením projekce a doplňků. Konkrétní Luzinovy výsledky v těchto oblastech nebudeme uvádět; bylo by k tomu totiž nezbytně poměrně rozsáhlé vysvětlování pomocných pojmů. Podotýkáme, že Luzin nejen zavedl pojem projektivní množiny, nýbrž také vytvořil základy jejich teorie a vyslovil některé principiální domněnky. Některé z nich byly potvrzeny, např. bezesporost tvrzení o neměřitelnosti jisté konkrétně udané projektivní množiny (viz [10]), některé zůstávají dosud otevřené.

Jak jsme již řekli, Luzinovy názory na povahu matematických objektů, na směr matematického zkoumání atd. se začleňují organicky do jeho vědeckého díla. Nejsou však nikde v jeho pracích vyloženy uceleným způsobem a v průběhu doby se poněkud měnily. Vyzvedneme proto jen některé důležité momenty. Východiskem byl patrně „přírodovědecký“ pohled na matematiku, resp. na ty její oblasti, kterými se zabýval. Ty množiny a jiné objekty, které se dají v jistém smyslu konstruovat, jednoznačně popsat, pojímal v jistém smyslu jako „skutečné“; axióm výběru neodmítal, ale to, co se dá „konstruovat“ jen s jeho pomocí, chápal jako jisté pomocné objekty, nebo spíše jako jakési ohlášení možnosti existence skutečných objektů. Obdobně se ovšem stavěl k důkazům opřeným o axióm výběru. Ve shodě s konstruktivním (ve velmi širokém smyslu) přístupem příkládal, jak již bylo uvedeno, velký význam souvislostem mezi konstrukčními postupy a charakterizací pomocí vlastností. Jeho mimořádně hluboké proniknutí do podstaty věci se projevilo též v tom, že – jak jsme se již zmínili – rozpoznal důležitý fakt, že doplněk efektivní množiny může být neefektivní. V jednotlivých poznámkách šel mnohem dál, než se mohlo projevit ve vlastním díle; věděl, že běžný pojem reálného čísla se nedá považovat za absolutní a že se může a snad i musí podrobit přezkoumání;

dospěl i k tomu, že ani pojem přirozeného čísla není absolutně pevným základem, ale musí být dále zkoumán. V r. 1933 psal v [12] o tom, že je ještě předčasné zabývat se „problémem unicity posloupnosti přirozených čísel“ anebo mluvit o „konečných číslech, která jsou nedosažitelná z jedničky“ (cituji ještě znění originálu: „... pour le moment, il est bien prématuré de considérer le problème brulant sur l'unicité de la suite de nombres naturels et de parler de nombres finis inaccessibles à partir de 1“; o několik řádků dále říká: „... les nombres transfinis ne sont que des nombres finis très grands“).

Jak je patrné, ve svých koncepcích značně předstihl svou dobu; otázky uvedeného druhu se staly předmětem soustavných úvah teprve poměrně nedávno, a nyní jsou předmětem intenzivního bádání (o některých směrech tohoto zkoumání se pojednává v knihách [13], [14]). „Přírodovědecký“ přístup, jenž by vlastně měl znamenat např. hledání „jediné pravé“ teorie množin a jenž by pak z dnešního hlediska byl sotva udržitelný, fakticky vůbec nebránil tomuto širokému pohledu.

Vedle vlastního vědeckého díla je rovnocennou složkou vědecké činnosti N. N. Luzina vytvoření a vedení kolektivu žáků a mladých spolupracovníků. Nešlo o plánovité vytváření a řízení, tím méně o formální organizaci: kolektiv vznikl spontánně, základem však byla Luzinova osobnost a vědecký potenciál, situace v matematice té doby, zejména rozkvět „množinového“ přístupu, tehdy ještě nového, a také zvláštní, přes těžkosti a rozpory hluboce stimulující intelektuální ovzduší počátku dvacátých let na moskevské univerzitě. Rozkvět kolektivu, jenž si sám začal žertem říkat „Luzitánie“, začíná na podzim 1920 a končí zhruba se studijním rokem 1921 – 1922; názvu „první generace Luzitánie“ se však často používá pro Luzinovy žáky z předrevoluční doby, a roky 1922, 1923 se někdy označují jako „třetí období Luzitánie“.

Podstata Luzitánie byla jistě ve vědecké stránce, nedá se však od toho oddělit její kolektivní společenský život, velká neformálnost, poněkud hraná uzavřenost vůči okolí, u nejmladších členů spojená s dosti naivním pohrdáním vším, co nesouvisí s „integrálem a trigonometrickou řadou“. Význačným rysem byla také jakási hravost, trochu dětská a hodně intelektuální. Z mnoha jejích projevů uvedeme jeden: nový člen Luzitánie dostával titul alef-nula a pak postupoval dále, takže např. P. S. Alexandrov a P. S. Uryson dosáhli titulu alef-5. Sám N. N. Luzin měl hodnot „alef-17“ což podle [4] bylo způsobeno poznámkou I. I. ŽEGALKINA „Matematici se z nějakého důvodu domnívají, že kontinuum má mohutnost \aleph_1 . Ale proč ne např. \aleph_{17} ?“ Ostatně, hravost by neměla překvapovat, členové Luzitánie byli velmi mladí, málo přes 20 roků nebo i méně; N. Bariová měla první vědecké výsledky ve věku 20 let, nejmladšímu členu Luzitánie L. ŠNIRELMANOVÍ nebylo při vstupu na univerzitu v r. 1920 ani 16 let. Význačným rysem Luzitánie bylo také osobní přátelství, které spojovalo její členy (spíše po menších skupinách než jako celek), a postavení N. N. Luzina, které je ve vzpomínkách účastníků velmi přílehavě vystihováno obdobou francouzského „maître“ a které se skutečně spíše podobalo postavení hlavy uměleckého směru než postavení profesora mezi aspiranty a studenty.

Vědecké rysy „Luzitánie“ ohrázely díky Luzinově autoritě i díky „spřízněnosti volbou“ nejlepší stránky jeho vědeckého stylu – šíří koncepce, konkrétní, často geometrickou intuici, důraz na efektivní konstrukce.

Přítom ta skutečnost, že její výchozí vědecká základna, již tvořila metrická a deskriptivní teorie funkcí, byla poměrně úzká, se neprojevila negativně – možná také proto,

že „Luzitánie“ ve svém plném rozkvětu měla poměrně krátké trvání. Sotva také mohla trvat dlouho; příliš mnoho elánu, tvůrčího potenciálu a příliš mnoho různorodých osobností bylo soustředěno na jednom místě a v jedné době na jeden druh tematiky. Podstatnou úlohu při rozpadu Luzitánie ovšem měly také rozporné vlastnosti Luzinovy osobnosti, o kterých již byla řeč. „Luzitánie“ končila tak, že se transformovala v Luzinovu vědeckou školu normálního typu, jež ostatně velmi brzy fakticky přestala přibírat další členy, a zároveň se od ní odpoutávaly zárodky jiných různých směrů, které pak nabývaly na významu (uvedme jen směry vyznačené jmény P. S. Urysona a P. S. Alexandrova, A. N. KOLMOGOROVA, L. A. LJUSTERNIKA, P. S. NOVIKOVA). V dějinách matematiky má „Luzitánie“ trvalé místo díky mimořádné, byť krátkodobé intenzitě činnosti mladého kolektivu soustředěného kolem jedné osoby i díky neochabujícímu vědeckému náboji částí, na které se rozpadl.

Luzinův vliv však neplynul jen z jeho vědeckých kvalit a z jeho osobnosti, nýbrž velmi podstatně též z jeho pedagogických schopností. Značný význam měla jeho učebnice teorie reálných funkcí, jakož i učebnice diferenciálního a integrálního počtu, používaná zejména na vysokých školách technického zaměření, jež vznikla původně úpravou překladu jedné americké knihy, v dalších vydáních se však stala samostatným dílem. Těžiště pedagogické činnosti N. N. Luzina bylo ovšem jinde, totiž v umění uvést studenty do matematického myšlení a pak i do samostatné práce. Napomáhala k tomu již výstavba přednášek, volba pořadí pojmů, jemné sepětí definicí, četné nové obraty a postupy. Hlavní však bylo to, že posluchači se dostávali přirozeným způsobem a skoro mimochodem k řešení problémů a hledání příkladů a důkazů. Na přednáškách Luzin leckdy řekl, že si právě nemůže vzpomenout na určitou část důkazu, jindy začal spolu s posluchači hledat nový důkaz. Není jisté, jak často opravdu zapomínal nebo hledal, ale v každém případě takové situace zpravidla vedly k růstu zájmu a aktivity studentů. Velmi často také kladl úlohy, jejichž obtížnost bývala různá; často šlo o otevřené vědecké problémy, popř. potvrzení či vyvrácení domněnky. Vyřešení často spočívalo v konstrukci příkladu; N. N. Luzin sám vynikal v takových konstrukcích a vedl k tomu také své žáky.

S těmito rysy Luzinovy pedagogické činnosti souviselo také to, že nekladl důraz na získání rozsáhlých předběžných znalostí a vedl studenty k samostatnému uvažování skoro od samého začátku. Dovedl to však činit takovým způsobem, že studenti zároveň získávali hluboké vědomosti a postupně také dosti široký rozhled.

Pokusíme se teď shrnout to, co jsme dosud řekli, ve stručnou charakteristiku Luzinova významu. Musíme si přitom mnohem více, než bývá u významných postav běžné, všimnout obou jeho neoddelitelných, ale nesplývajících aspektů: významu pro matematiku vlastní země a významu pro světový vývoj matematiky.

Od dosti skrovných základů zděděných po carském Rusku prošla sovětská matematika dlouhou, často strnou a složitou cestou ke svému plnému rozvinutí. Musela nutně procházet stadiem, které pro podstatnou část matematiky znamenalo plné akceptování „množinového stylu“ – tehdy ostatně ještě velmi mladého, chronologicky snad mladšího než univerzitní posluchači.

Projít tímto obdobím bylo historickou nutností, ať již by přitom byl v čele ten nebo onen matematik. Skutečnost byla taková, že v čele byl právě N. N. Luzin, a díky jemu bylo toto období maximálně plodné nejen pokud jde o bezprostřední výsledky, ale pře-

devším pokud jde o pozdější i dosti vzdálené následky pro rozvoj matematiky. Jak již bylo řečeno, kolektiv vzniklý kolem Luzina disocioval v řadu skupin, z nichž se rychle tvořily další školy a skupiny pracující na problematice, jež byla zároveň abstraktní i blízká konkrétní realitě, a generující nové směry a pracovní kolektivy. V tomto smyslu je také v současné době sovětská matematika reprezentována v nejrůznějších oblastech Luzinovými „vědeckými potomky“ – první i mnohem vyšších generací. V tomto smyslu má také Luzin v míře, která je ojedinělá a možná ještě není zcela doceňována, velkou zásluhu o rozvoj sovětské matematiky jako celku.

N. N. Luzin je jedním ze spoluzakladatelů metrické a zejména deskriptivní teorie bodových množin a funkcí. Jeho význam pro světovou matematiku však daleko přesahuje tuto oblast.

Byl první, kdo záměrně akcentoval a zároveň úspěšně uplatnil fundamentální metodu zkoumání vzájemných vztahů výpočetních postupů – pojímaných ve velmi širokém smyslu – a popisných vlastností. Pronikl do problematiky množin reálných čísel a do problematiky efektivnosti tak hluboko a konkrétně, jak asi bylo vůbec v jeho době možné; tím zároveň připravil ve velmi podstatném rozsahu předpoklady pro pozdější zkoumání, které již mohlo používat daleko účinnějších nástrojů. Některé jeho ideje, jež se mu již nepodařilo konkretizovat, předjímalý současné úsilí o nové pohledy na tak základní matematické koncepce, jako jsou přirozená čísla.

Literatura.

- [1] N. N. LUZIN, *Sobranije sočiněnij, tom 1–3*. Moskva, Izd. AN SSSR; 1953, 1958, 1959.
- [2] N. N. LUZIN, *Integral i trigonometričeskij rjad*. Moskva, 1915.
- [3] N. N. LUZIN, *Integral i trigonometričeskij rjad*. Redakcija i komentarii N. N. BARI i D. JE. MEŇŠOVA. Vstupitel'nyje statji N. K. BARI, V. V. GOLUBĚVA i L. A. LJUSTERNIKA. Moskva—Leningrad, 1951.
- [4] L. A. LJUSTĚRNIK, *Molodost' moskovskoj matematiceskoj školy*. Uspechi matem. nauk 22 (1967), seš. 4 (136), 147–185.
- [5] A. F. LAPKO, L. A. LJUSTĚRNIK, *Iz istorii sovětskoj matematiki*. Uspechi matem. nauk 22 (1967), seš. 6 (138), 13–140.
- [6] N. LUZIN, *Über eine Potenzreihe*, R. C. Circ. mat. Palermo 32 (1911), 386–390.
- [7] N. N. LUZIN, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*. Paris, Gauthier-Villars, 1930. — Ruský překlad: *Lekcii ob analitičeskich množstvach i ich priloženijach*. Redakcija, predislovije a primečanja L. V. KELDYŠ i P. S. NOVIKOVA. Moskva, 1953.
- [8] N. N. LUZIN, *O častach naturalnogo rjada*, Dokl. AN SSSR 40 (1943), 195–199.
- [9] N. N. LUZIN, *O častach naturalnogo rjada*, Izvestija AN SSSR, ser. matem. 11 (1947), 403–410.
- [10] P. S. NOVIKOV, *O neprotivorečivosti někotorych položenij teorii množestv*, Trudy Matem. inst. im. V. A. Stěklova 38 (1951).
- [11] G. VITALI, *Una proprietà delle funzioni misurabili*, Lomb. Ist. Rend. (2) 38 (1905), 599–603.
- [12] N. LUZIN, *Sur les ensembles toujours de première catégorie*, Fundam. Math. 21 (1933), 114–126.
- [13] A. ROBINSON, *Non — standard Analysis*, 2 ed. Amsterdam, North-Holland 1970.
- [14] P. VOPĚNKA, P. HÁJEK, *The Theory of Semisets*. Praha, Academia, 1972.