Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Karel Mačák

Huygensův spis „De ratiociniis in ludo aleae" (K 300. výročí úmrtí Christiana Huygense)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 41 (1996), No. 4, 180--197

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139934

Huygensův spis „De ratiociniis in ludo aleæ“

(K 300. výročí úmrtí Christiana Huygense)

Karel Mačák, Liberec

1. Úvod

1.1. Vymezení problematiky

Huygensův spis *„De ratiociniis in ludo aleæ“* vyšel r. 1657 jako příloha ke spisu Huygensova učitele Franse (Francisca) van Schootena *„Exercitationum mathematicarum libri quinque“*[1]) a byl prvním samostatným tištěným pojednáním o úlohách teorie pravděpodobnosti. Výrazně ovlivnil počáteční fázi formování teorie pravděpodobnosti; Jakob Bernoulli ve svém spise *„Ars conjectandi“* (který vyšel r. 1713, ale fakticky vznikl mezi lety 1679–1685 ([1], III, str. 339)) věnuje zhruba čtvrtinu svého spisu novému otištění a podrobnému komentování této Huygensovy práce. Po dobu přibližně půl století (až do vydání již zmíněného *„Ars conjectandi“* a prací Montmortových a Moivreových[2]) byl Huygensův spis základní prací v oblasti teorie pravděpodobnosti. Přes všechna uvedená fakta byla tato poměrně raná Huygensova práce zastíněna jeho pozdějšími díly a dnes stojí poněkud stranou pozornosti; lze proto považovat za vhodné připomenout si ji podrobněji u příležitosti třístého výročí Huygensova úmrtí.

Tento příspěvek je rozdělen do tří částí. V první části je stručně charakterizován stav teorie pravděpodobnosti v době, kdy Huygens psal své pojednání; tato část vychází jednak ze dvou známých knih o dějinách matematiky [1, 2], jednak ze dvou speciálních monografií o dějinách teorie pravděpodobnosti [3, 4]. Druhá část je vě-

[1]) Je míněn Franciscus van Schooten mladší (1615–1660), který byl profesorem na univerzitě v Leidenu stejně jako jeho otec, který se také jmenoval Franciscus a žil v letech 1581–1646 ([1], II, str. 660).

[2]) Pierre Remond de Montmort (1678–1719): *Essai d'analyse sur les jeux de hazards.* První vydání 1708.

Abraham de Moivre (1667–1754): *De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus.* První vydání ve *„Philosophical Transactions“* Nr. 329, 1711.

Článek představuje část referátu předneseného na II. semináři „Historie matematiky“ pro vyučující na středních školách, konaném v Jevíčku ve dnech 21. – 24. 8. 1995.

Autor článku doc. ing. RNDr. KAREL MAČÁK, CSc. (1938) působí na katedře diskrétní matematiky a statistiky Pedagogické fakulty Technické univerzity v Liberci, Hálkova 6, 46 117 Liberec.

nována Huygensovu spisu „*De ratiociniis in ludo aleæ*“, přičemž se vychází z textu obsaženého v prvním souborném vydání spisů Christiana Huygense [5][3]) ve II. dílu na str. 725–744 a doplňující informace jsou čerpány hlavně z [6]. Třetí část uvádí základní údaje o pracích z oblasti kombinatoriky, které vznikly v Huygensově době a souvisely s pravděpodobnostní problematikou.

1.2. Výchozí problémy a první pokusy o jejich řešení

Za počátek vzniku teorie pravděpodobnosti je všeobecně považována korespondence, kterou spolu v létě a na podzim roku 1654 vedli Blaise Pascal a Pierre de Fermat. V té době už byly v jistém smyslu „ustálené“ dva typy problémů z oblasti hazardních her a sázek, které sloužily formující se teorii pravděpodobnosti jako základní materiál:

I. První typ problémů bychom dnes asi označili za problémy kombinatorické a týkaly se např. toho, kolika způsoby může padnout jistý počet ok při házení dvěma, třemi atd. kostkami; úlohy podobného typu se objevují v teorii pravděpodobnosti a jejich aplikacích i dnes[4]).

II. Druhý typ problémů má dnes význam čistě historický a týkal se tzv. úlohy o rozdělení sázky, kterou lze formulovat v nejjednodušší podobě takto:

Dva hráči hrají sérii her o nějakou částku C; tuto částku získá ten hráč, který jako první vyhraje k her. Pravděpodobnost výhry v každé jednotlivé hře je pro oba hráče stejná (oba hráči jsou „stejně dobří“). Série her je předčasně ukončena ve chvíli, kdy jednomu hráči chybí do výhry m her, druhému hráči chybí do výhry n her. Jak má být spravedlivě rozdělena částka C mezi hráče?

Všimněme si toho, že oba typy problémů lze formulovat bez použití pojmu „pravděpodobnost“ a původně opravdu bez použití tohoto pojmu formulovány byly; nemluvilo se o pravděpodobnostech, ale o dělení sázky, šancích na výhru a pod.

Některé konkrétní případy úlohy o rozdělení sázky řešil již Luca Pacioli (1445(?) až 1514(?)) v knize „*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*“ (vyšla r. 1494) a Nicolo Tartaglia (1499(?)–1557) v knize „*General trattato di numeri et misura*“ (vyšla r. 1556); jejich řešení jsou ale chybná.

Zřejmě první prací, věnovanou speciálně problémům zahrnovaným dnes do teorie pravděpodobnosti, byla práce Hieronyma Cardana (1501–1576) „*De ludo aleæ*“, kterou Cardano napsal asi r. 1526, ale nevydal ji tiskem; byla nalezena po jeho smrti v jeho rukopisné pozůstalosti a otištěna v 1. svazku jeho sebraných spisů, který vyšel r. 1663.

Teorií pravděpodobnosti se zabýval i Galileo Galilei (1564–1642); jeho spis „*Considerazione sopra il giuco dei dadi*“ vyšel až r. 1718 a datum vzniku není známo.

[3]) Podle předmluvy vydání byl jeho editorem známý nizozemský matematik a astronom G. J. 's Gravesande (1688–1742).

[4]) Jako příklad uveďme článek GULDAN, F.: *Je lepšie hrať ruletu alebo blackjack?* PMFA *38* (1993), č. 1, str. 29–39.

Rozbor všech uvedených prací lze nalézt např. v [4], str. 22–42; stručnější přehled byl u nás publikován v loňském roce[5]).

1.3. Vznik teorie pravděpodobnosti

Jak už bylo řečeno, za počátek teorie pravděpodobnosti je všeobecně považována korespondence, kterou v r. 1654 vedli Blaise Pascal a Pierre de Fermat o problémech, se kterými se na Pascala obrátil rytíř de Méré. Část těchto dopisů se nezachovala; zachovaná korespondence byla vydána tiskem v Toulouse v r. 1679.

De Méré seznámil Pascala se dvěma problémy, z nichž Pascala s Fermatem hlavně zaujala úloha o rozdělení sázky, jejíž formulaci jsme již uvedli v předešlé části. Druhá úloha byla poměrně elementární a Pascal ji zřejmě vyřešil obratem ruky (viz citace v následující části); tato úloha se dodnes objevuje v učebnicích a zde bude uvedena jako první.

Při řešení těchto problémů vycházeli Pascal s Fermatem z pojetí pravděpodobnosti odpovídajícího dnešní tzv. klasické definici pravděpodobnosti, pojem „pravděpodobnost“ ale vůbec nedefinovali; ve své korespondenci se věnovali řešení konkrétních úloh, nikoli definování obecných pojmů a teoretickému studiu jejich vlastností. Pascal si zřejmě byl vědom významu vznikající matematické disciplíny, kterou v dopise Francouzské akademii věd nazval „geometrií náhody“ (*„aleæ geometria“*; viz [3], str. 20), ale k jejímu podrobnějšímu rozpracování nikdy nepřikročil[6]).

1.3.1. Úloha o kostkách

De Méré tvrdil, že chce-li někdo hodit aspoň jednou šestku při opakovaném házení jednou kostkou, má nadpoloviční šanci na úspěch počínaje čtyřmi hody a poměr šancí na úspěch k šancím neúspěšným při čtyřech hodech je 671 : 625. Pokud chce někdo hodit aspoň jednou dvě šestky při házení dvěma kostkami, měl by mít podle de Mérého nadpoloviční šanci na úspěch počínaje 24 hody (neboť poměr 24 : 36 je stejný jako poměr 4 : 6), ale de Méré zjistil (asi ve své hráčské praxi), že to není pravda, což ho pobouřilo[7]).

První tvrzení de Mérého je správné, druhé ale nikoli. Snadno nahlédneme, že pravděpodobnost toho, že v k hodech nepadnou ani jednou dvě šestky, je rovna $\left(\frac{35}{36}\right)^k$.

---

[5]) COUFAL, J.: *Alea iacta est aneb půl tisíciletí od vytištění úlohy rytíře de Méré.* Informační bulletin České statistické společnosti *5* (1994), č. 1 a 2.

[6]) Výjimku tvoří úloha o rozdělení sázky, jejíž nejjednodušší podobu uvedenou v části 1.2 Pascal obecně vyřešil v posmrtně vydaném spisu *„Traité du triangle arithmétique“* (viz část 1.3.2).

[7]) Pascal v dopisu Fermatovi z 29. 7. 1654 o tom píše: *„To tedy byl jeho veliký skandál, který ho přiměl domýšlivě říci, že poučky nejsou stálé a že se aritmetika mýlí: vy ale jistě snadno uvidíte vysvětlení podle principů, k nimž jste dospěl.“* (Přeloženo podle [7], str. 166.)

Řešení daného problému tedy lze nalézt řešením nerovnice

$$\left(\frac{35}{36}\right)^k < \frac{1}{2},$$

ze které plyne $k \doteq 24{,}6$, takže dvěma kostkami je třeba hodit aspoň pětadvacetkrát, aby šance na úspěch byla nadpoloviční.

1.3.2. Úloha o rozdělení sázky

Obecnou formulaci úlohy jsme už uvedli v části 2.2; Pascal s Fermatem řešili ve své korespondenci pouze některé speciální případy úlohy o rozdělení sázky pro konkrétní dané hodnoty C, k, m, n. Základní myšlenka jejich řešení spočívala v tom, že za spravedlivé považují takové rozdělení sázky, při kterém je částka C rozdělena mezi hráče ve stejném poměru, v jakém jsou v okamžiku přerušení série her jejich pravděpodobnosti výhry celé částky v případě dohrávání celé série her až do konce. Pascal se zřejmě touto úlohou zabýval dále a ve spisu *„Traité du triangle arithmétique"*, vydaném posmrtně (1665)[8]), uvádí obecné řešení, které lze stručně shrnout takto:

I. Do dokončení celé série chybí nejvýše $m + n - 1$ her.
II. První hráč vyhraje celou sázku, jestliže druhý hráč vyhraje nejvýše $n - 1$ her.
III. Druhý hráč vyhraje celou sázku, jestliže první hráč vyhraje nejvýše $m - 1$ her.
IV. Z celkového počtu $m + n - 1$ her lze vyhrát (tj. vybrat) k her celkem $\binom{m+n-1}{k}$ způsoby.
V. Poměr šancí obou hráčů na výhru celé sázky tedy je

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{i} : \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+n-1}{j}$$

a ve stejném poměru musí být rozdělena i částka C mezi oba hráče; tento poměr nezávisí ani na sázce C, ani na počtu her k.

2. Spis „De ratiociniis in ludo aleæ"

2.1. Základní údaje o Christianu Huygensovi

Christian Huygens se narodil 14. 4. 1629 v Haagu. Jeho otec Konstantin Huygens byl nejen významným politickým činitelem (působil jako sekretář oranžských princů) a majitelem několika panství (Zuylichem, Zeelhelm, Monnikeland), ale psal i básně a komponoval. Christian studoval práva na univerzitách v Leidenu a Bredě; doktorát získal v r. 1655 na univerzitě v Angers ve Francii a při této cestě také navštívil Paříž,

---

[8]) V [3] na str. 16 je poněkud nejasné tvrzení: *„This treatise was printed about 1654, but not published until 1665."*

což je z našeho hlediska důležité, neboť se zde dozvěděl o Pascalově korespondenci s Fermatem týkající se problémů rytíře de Méré. V r. 1666 se stal členem právě založené Francouzské akademie věd[9]) a usadil se trvale v Paříži. Žil zde až do r. 1681, kdy odcestoval do Haagu na léčení; protože v r. 1685 byl ve Francii zrušen nantský edikt, který od r. 1598 zaručoval náboženské a politické svobody hugenotů, nemohl se již protestant Huygens do Francie vrátit. Zemřel v Haagu 8. 7. 1695.

Huygens učinil řadu důležitých objevů ve fyzice: studoval kyvadlové hodiny[10]), zdokonalil dalekohled a učinil řadu významných astronomických pozorování (objevil např. Saturnův prstenec), vypracoval vlnovou teorii světla a zabýval se mnoha dalšími problémy; jeho sebrané spisy byly vydány ve francouzštině a holandštině v Haagu v letech 1888–1950 a mají 22 svazků (z čehož prvních 10 svazků je věnováno Huygensově korespondenci)[11]). Z našeho hlediska je ovšem podstatné, že se zabýval i teorií pravděpodobnosti a napsal spis *„De ratiociniis in ludo aleæ"*.

2.2. Okolnosti vzniku spisu

Tuto část v podstatě přebíráme z [6], str. 3–8.

Když Huygens v r. 1655 přijel do Paříže, byl díky svým předchozím publikovaným pracím[12]) rovnocenným partnerem tamních matematiků. Zde se dozvěděl, o čem si dopisují Pascal s Fermatem, neboť Pascal o tom informoval další matematiky, mezi nimi Robervala[13]), s nímž se Huygens stýkal. Když se vrátil do Nizozemí, zůstal v písemném styku s francouzskými učenci a sám začal psát holandsky pojednání o problémech teorie pravděpodobnosti.

V dubnu 1656 spis dokončil (chybělo v něm pozdější *Propositio IX* a dodatek s neřešenými úlohami) a informoval o tom Robervala; rukopis poslal Schootenovi, který ho začal překládat do latiny[14]). Mezitím ale Huygens začal o pravděpodobnostních

---

[9]) [2] na str. 88 uvádí, že se stal dokonce jejím prezidentem, ale žádný jiný pramen to nepotvrzuje.

[10]) Jeho hlavní matematické dílo *„Horologium oscillatorium"* (1673) je vlastně věnováno tomuto problému; přitom zavedl např. pojem „evolventa dané křivky" ([1], III, str. 140).

[11]) Bohužel tyto sebrané spisy nejsou dostupné v žádné knihovně v českých zemích.

[12]) Podle [6] jde o práce:
„Teoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro",
„Exetasis Cyclometriæ Cl. Viri Gregorii à St. Vincentio",
„De circuli magnitudina inventa",
„Illustrium quorundam problematum constructiones";
první dvě práce vyšly společně r. 1651 a druhé dvě rovněž společně r. 1654, vždy v Leidenu.

[13]) Giles Personnier de Roberval (1602–1675) byl profesorem matematiky na Collège Royal ([1], II., str. 876).

[14]) Z tohoto důvodu je v souborném vydání [6] považován text holandský za původní a vychází se z něj, nikoli z textu latinského, i když latinský text vyšel dříve.

problémech korespondovat s Carcavym[15]) a na základě této korespondence svůj spis doplnil o *Propositio IX* a dodatek tvořený pěti neřešenými úlohami, z nichž u tří byly uvedeny výsledky. V březnu 1657 Schooten poslal Huygensovi k přehlédnutí latinský překlad textu, a když pak Huygensův spis na podzim r. 1657 v Leidenu vyšel jako příloha ke Schootenovu spisu *„Exercitationum mathematicarum libri quinque“*[16]), obsahoval místo předmluvy Huygensův dopis Schootenovi datovaný 27.4.1657, ve kterém se Huygens zříká cti prvního objevitele ve prospěch svých francouzských kolegů, poukazuje ale právem na to, že byl nucen celý předmět od začátku rozvíjet sám, neboť francouzští matematici své metody nezveřejňovali.

2.3. Základní údaje o spisu

První dvě strany spisu obsahují Huygensův dopis F. Schootenovi; o tomto dopisu už byla řeč v předešlé části a zde ho ponecháme stranou. Vlastní práce začíná stručnou, nijak nenadepsanou úvodní částí, pak následuje hlavní text pojednání členěný do čtrnácti témat (nazvaných *Propositio*), která lze podle obsahu rozdělit do tří skupin. Tohoto členění se přidržíme i zde; uvedeme jednak (poměrně) volný překlad čtyř *Propositiones*, která lze z dnešního hlediska považovat za definice (*Propositiones I–III*) nebo větu (*Propositio IX*), jednak zadání všech příkladů obsažených v textu (ať už jsou uvedeny jako samostatné *Propositio* nebo jen na doplnění jiného textu), a to vše doplníme stručným komentářem.

Právě v uvedených čtyřech *Propositiones* lze spatřovat podstatný rozdíl mezi spisem Huygensovým na straně jedné a korespondencí Pascala s Fermatem na straně druhé; zatímco Pascal s Fermatem pouze řešili úlohy, u Huygense jsou už zaváděny obecné pojmy a postupy.

Svůj spis uzavřel Huygens pěti neřešenými úlohami, z nichž u tří uvedl výsledky. Uvedeme zde znění všech pěti úloh; u první z nich ukážeme tři historická řešení, u dalších uvedeme jen malé komentáře. Poznamenejme, že řešení všech pěti úloh (často několika různými metodami) podal Jakob Bernoulli ve svém známém spise *„Ars conjectandi“*, o kterém už byla zmínka; německého překladu tohoto spisu [8] zde bude také použito.

2.4. *Propositiones I–III*

PROPOSITIO I. *Očekávám-li částku a nebo částku b, které obě mohu získat stejně snadno, pak hodnota mého očekávání je*

$$\frac{a+b}{2}.$$

[15]) Pierre de Carcavy (?–1684) byl parlamentním radou v Toulouse (1622–1636) a v Paříži (1636–1647), pak byl ve službách vévody z Liancourtu a od r. 1663 byl konservátorem královské knihovny ([1], II, str. 758).

[16]) Podle [6] vyšel potom v r. 1660 v Amsterodamu v holandštině jak tento Schootenův spis s Huygensovou přílohou, tak i Huygensův spis samostatně.

PROPOSITIO II. *Očekávám-li částky a, b nebo c, z nichž každou mohu získat stejně snadno, pak hodnota mého očekávání je*

$$\frac{a+b+c}{3}.$$

PROPOSITIO III. *Je-li počet případů, v nichž obdržím částku a, roven p, a počet případů, v nichž obdržím částku b, roven q, a jestliže předpokládám, že všechny případy se mohou vyskytnout stejně snadno, pak mé očekávání bude mít hodnotu*

$$\frac{pa+qb}{p+q}.$$

Těmito definicemi je vlastně poprvé v historii matematiky zavedena střední hodnota diskrétní náhodné veličiny, tento termín se ale u Huygense nevyskytuje. Všechny jeho úlohy se vztahují ke hrám o nějakou částku (sázku) a příslušný pojem se proto nazývá buď *expectatio*[17]) nebo *sors*[18]); v tomto článku budeme dále většinou užívat termínu „očekávaná výhra“. Zavedení střední hodnoty lze považovat za hlavní Huygensův vklad do teorie pravděpodobnosti; sílu tohoto pojmu demonstruje Huygens tím, že všechny úlohy ve svém spisu řeší pouze pomocí uvedených tří definic, a to i v případech, kdy bychom se dnes přiklonili k jednodušší úvaze kombinatorické.

Huygensovy *Propositiones I–III* jsou zajímavé i z hlediska vzniku tzv. klasické definice pravděpodobnosti, jejímž výchozím pojmem jsou stejně možné (tj. v jakémsi intuitivním smyslu stejně pravděpodobné) elementární náhodné jevy (viz např. [9]). Huygens pojem „pravděpodobnost“ vůbec nezavádí, stačí mu pojem „očekávaná výhra“, ale s problémem stejně možných elementárních jevů se nějak vypořádat musí, což činí formulací, že očekávané výsledky může získat „stejně snadno“[19]). O klasické definici pravděpodobnosti bude ještě zmínka v závěru tohoto příspěvku.

2.5. *Propositiones IV–IX*

V této části spisu je řešena úloha o rozdělení sázky, o které už byla řeč v první části tohoto referátu. Huygens nejprve řeší následující případy pro dva hráče:

a/ $m=1$, $n=2$ (výsledek 3 : 1);
b/ $m=1$, $n=3$ (výsledek 7 : 1);
c/ $m=1$, $n=4$ (výsledek 15 : 1);
d/ $m=2$, $n=3$ (výsledek 11 : 5);
e/ $m=2$, $n=4$ (výsledek 13 : 3).

Úlohy a/, b/, d/ se vyskytují už v (prvním zachovaném) dopisu Pascala Fermatovi z 29. 7. 1654.

[17]) *Expectatio* nebo *exspectatio, -onis, f.* = očekávání.

[18]) *Sors, sortis, f.* = los, věštba.

[19]) V originálu zní např. *Propositio I.* takto: *„Si a vel b expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere* $\frac{1}{2}(a+b)$*.“*

Huygensovu metodu řešení těchto úloh lze stručně demonstrovat na úloze a/. Bude-li se v sérii her pokračovat, pak v první hře při pokračování jsou možné dva „stejně snadné“ (viz *Propositio I*) výsledky: buď vyhraje jeden hráč celou sázku, nebo vznikne situace, ve které jsou na tom oba hráči stejně (oběma chybí do celkového vítězství po jedné hře), což znamená, že při dělení sázky by každý dostal polovinu. Jestliže se tedy nebude v sérii her pokračovat a sázka bude rozdělena, pak hráči, kterému při přerušení chybí k celkovému vítězství už jen jedna hra, přísluší podle *Propositio I* částka

$$\frac{C + \frac{1}{2}C}{2}$$

a druhému přísluší zbytek.

Úlohy b/ – e/ lze řešit postupně zcela analogicky vždy s využitím předešlé úlohy.

Pak přechází Huygens k řešení úlohy o rozdělení sázky pro tři „stejně dobré“ hráče; metoda řešení je zcela analogická metodě použité pro dva hráče. Nejprve řeší případ, kdy dvěma hráčům chybí po jedné hře a třetímu chybějí dvě hry (výsledkem je dělení v poměru 4 : 4 : 1); pak formuluje (i když podle našeho názoru ne právě nejjasněji) svoji metodu zcela obecně pro řešení úlohy o rozdělení sázky pro libovolný počet „stejně dobrých“ hráčů:

PROPOSITIO IX. *Abychom mohli vypočítat podíl každého hráče při libovolně mnoha hráčích, z nichž některému chybí více a jinému méně her, je třeba zjistit, co náleží hráči, jehož podíl má být zjištěn, když on sám nebo nějaký jiný hráč vyhraje následující hru. Sečtou-li se takto získané části dohromady a dělí-li se tento součet počtem hráčů, obdrží se hledaný podíl dotyčného hráče.*

Jde vlastně o rekurentní postup, který je ilustrován na příkladu hry tří hráčů, z nichž jednomu chybí jedna hra a dvěma chybí po dvou hrách[20]) (výsledkem je dělení v poměru 17 : 5 : 5). Celé *Propositio* je uzavřeno tabulkou, v níž jsou uvedeny poměry pro rozdělení sázky v sedmnácti situacích, které mohou nastat ve hře tří hráčů.

Z historického hlediska považujeme za nezbytné na závěr této kapitoly porovnat Huygensův postup s postupem Pascalovým; uveďme zde proto pro ilustraci Pascalovo řešení úlohy a/, uvedené v jeho dopisu Fermatovi z 29. 7. 1654. U Pascala se hraje o částku 64 pistolí a Pascal říká (přeloženo podle [7], str. 162):

„Uvažte tedy, pane, že když první vyhraje, připadá mu 64; když prohraje, připadá mu 32. Když tedy nechtějí dát v sázku tuto hru a chtějí se rozdělit bez hraní, první musí říci: »Mám jistých 32 pistolí, protože i při prohře je dostanu; co se ale zbývajících dvaatřiceti týče, snad budou mé, snad budou vaše; riziko je stejné; rozdělme tedy oněch 32 pistolí napůl a dáte mi kromě toho mých 32, které mám jisté.« Bude tedy mít 48 pistolí a druhý 16.“

Zcela analogicky řeší Pascal i úlohy b/ a d/ (vždy s využitím úlohy předchozí). Porovnáme-li tedy Huygensův postup s postupem Pascalovým, vidíme hned, že základní myšlenka je úplně stejná; rozdíl mezi Pascalem a Huygensem spočívá v tom, že Pascal v korespondenci s Fermatem pouze řeší příklady, zatímco Huygens zformuloval obecnou metodu řešení, a to dokonce pro n stejně dobrých hráčů.

---

[20]) Tento příklad se rovněž vyskytuje v Pascalově korespondenci s Fermatem.

2.6. *Propositiones X – XIV*

Další část Huygensovy práce obsahuje několik řešených úloh různého zaměření. Nejprve zde jsou dvě úlohy, které se v podstatě vyskytují už v Pascalově korespondenci s Fermatem; řečeno dnešní terminologií, v *Propositio X* se počítají pravděpodobnosti padnutí alespoň jedné šestky při jednom až šesti hodech jednou kostkou, v *Propositio XI* se počítají pravděpodobnosti alespoň jednoho padnutí dvou šestek současně při jednom, dvou a čtyřech hodech dvěma kostkami. *Propositio XI* pokračuje úvahou (ne výpočtem) o 8 a 24 hodech dvěma kostkami a končí tvrzením (v dnešní terminologii), že pro 24 hodů je zkoumaná pravděpodobnost pořád ještě menší než $\frac{1}{2}$ a pro 25 hodů je už větší než $\frac{1}{2}$, což je známý problém rytíře de Méré z prvního dopisu Pascala Fermatovi.

V *Propositio XII* je počítána (v dnešní terminologii) pravděpodobnost padnutí dvou šestek současně v prvním hodu při házení třemi kostkami (s obecnou úvahou pro více kostek). Základní myšlenka řešení spočívá v tom, že pravděpodobnost padnutí dvou šestek v jednom hodu třemi kostkami je stejná jako pravděpodobnost padnutí dvou šestek při třech hodech jednou kostkou. Jakob Bernoulli v *„Ars conjectandi“* tuto úlohu zobecnil a hledal (v dnešní terminologii) pravděpodobnost toho, že jistý počet ok padne v n hodech kostkou k-krát; při řešení této úlohy Bernoulli zavedl (v dnešní terminologii) binomický zákon rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny.

V *Propositio XIII*, které podle našeho názoru není zajímavé ani z hlediska historického, ani metodického, je řešena následující úloha:

Hráči A a B spolu hrají o nějakou sázku tak, že jeden z nich jednou hodí dvěma kostkami; padne-li sedm bodů, vyhrává A, padne-li deset bodů, vyhrává B, při každém jiném počtu bodů bude sázka rozdělena mezi oba hráče rovným dílem. Jaká je očekávaná výhra každého hráče?
(Výsledek je $\frac{13}{24}$ sázky pro hráče A, zbytek pro hráče B.)

Následující *Propositio XIV* lze charakterizovat jako úvod k úlohám, které jsou neřešené umístěny v dodatku; je zajímavé tím, že k řešení úlohy Huygens sestavuje soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Zadání je následující:

Hráči A a B spolu hrají o nějakou sázku tak, že střídavě házejí dvěma kostkami a hráč A hází jako první; A vyhraje, hodí-li jako první šest bodů, B vyhraje, hodí-li jako první sedm bodů. Jaký je poměr očekávaných výher obou hráčů?
(Výsledek je 30 : 31.)

Tuto úlohu Huygens sdělil dopisem Robervalovi a od něho se úloha dostala k Fermatovi a Pascalovi; ti Huygensovi na oplátku prostřednictvím Carcavyho poslali jiné úlohy, které se pak objevily v dodatku k Huygensovu spisu (podrobněji o této korespondenci viz [6]).

Huygensův postup řešení lze stručně zapsat takto:

Označme x očekávanou výhru hráče B před hodem hráče A, y očekávanou výhru hráče B před vlastním hodem. Protože 6 bodů může padnout pěti způsoby a 7 bodů může padnout šesti způsoby, podle *Propositio III* platí

$$x = \frac{5 \cdot 0 + 31 \cdot y}{36},$$
$$y = \frac{6 \cdot C + 30 \cdot x}{36},$$

a řešením této soustavy dostaneme $x = \frac{31}{61}C$, z čehož plyne hledaný poměr 30 : 31.

2.7. *Problema I*

Nejprve uveďme formulaci první úlohy, kterou zadal Huygensovi Fermat prostřednictvím Carcavyho:

A a B hrají se dvěma kostkami tak, že A vyhraje, když hodí jako první šest bodů, a B vyhraje, když hodí jako první sedm bodů. A začíná hru jedním hodem, pak hází B dvakrát za sebou, pak má A dva hody a tak dále, dokud jeden z nich nevyhraje. Jaký je poměr očekávaných výher obou hráčů?
Odpověď: 10355 : 12276.

2.7.1. Řešení Huygensovou metodou

Huygens sám postup řešení této úlohy nepublikoval, ale z řešení uvedeného v *Propositio XIV* lze jeho postup snadno rekonstruovat (což ostatně udělal už Bernoulli (viz [8])).

Označme

t = očekávaná výhra hráče A před začátkem hry,
x = očekávaná výhra hráče A před prvním hodem hráče B,
y = očekávaná výhra hráče A před druhým hodem hráče B,
z = očekávaná výhra hráče A po druhém hodu hráče B.

Platí (podle *Propositio III*)

$$t = \frac{5 \cdot C + 31 \cdot x}{36},$$
$$x = \frac{6 \cdot 0 + 30 \cdot y}{36},$$
$$y = \frac{6 \cdot 0 + 30 \cdot z}{36},$$
$$z = \frac{5 \cdot C + 31 \cdot t}{36}$$

a máme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, z nichž lze vypočítat

$$t = \frac{10355}{22631} C;$$

očekávané výhry hráčů A, B jsou v poměru $t : (1 - t)$.

2.7.2. Spinozovo řešení

V r. 1687 byla v Haagu vydána anonymní práce obsahující jednak pojednání o duze, jednak pojednání o teorii pravděpodobnosti. V tomto „pravděpodobnostním" pojednání je uvedeno všech pět úloh z Huygensova dodatku a první z nich je řešena. V současné době se považuje za jisté, že autorem této práce byl známý nizozemský filozof Benedictus Spinoza; svědčí to o aktivním Spinozově přístupu k aktuálním problémům matematické teorie pravděpodobnosti oné doby. Podrobnosti lze najít v článku [10]; z matematického hlediska je Spinozovo řešení variantou řešení Huygensova, svědčí ale o tom, že Spinoza Huygensovu metodu dobře zvládl.

Základní myšlenkou Spinozova postupu je rozdělení úlohy do dvou částí. Nejprve řeší pomocnou úlohu:

A a B hrají se dvěma kostkami tak, že A vyhraje, když hodí jako první šest bodů, a B vyhraje, když hodí jako první sedm bodů. Každý z hráčů má dva hody za sebou, B hází jako první. Jaký je poměr očekávaných výher obou hráčů?

Postup řešení je „huygensovský". Označme

u = očekávaná výhra hráče A před prvním hodem hráče B,
v = očekávaná výhra hráče A před prvním vlastním hodem.

Platí (podle *Propositio III*)

$$u = \frac{6 \cdot 0 + \frac{30}{36} \cdot (6 \cdot 0 + 30 \cdot v)}{36},$$
$$v = \frac{5 \cdot C + \frac{31}{36} \cdot (5 \cdot C + 31 \cdot u)}{36},$$

a řešením této soustavy dostaneme

$$u = \tfrac{8375}{22631}\, C.$$

Pak Spinoza přechází k řešení původní Huygensovy úlohy a s využitím výsledku pomocné úlohy zjistí, že očekávaná výhra hráče A při ní je rovna

$$\frac{5 \cdot C + 31 \cdot \left(\frac{8375}{22631}\, C\right)}{36},$$

z čehož plyne Huygensův výsledek.

2.7.3. Bernoulliovo řešení

Jakob Bernoulli v *„Ars conjectandi"* podal také zcela odlišnou metodu řešení této a podobných úloh. Vyložíme ji zde pomocí dnešní terminologie, protože jinak bychom museli připojit obsáhlé předběžné úvahy.

Základní myšlenka této metody spočívá v použití součtu geometrické řady. Uvažujme nejprve nekonečnou posloupnost hráčů, z nichž postupně každý sehraje jednu hru, přičemž hráči č. 2, 3, 6, 7, 10, 11 atd. mají pravděpodobnost výhry rovnou q, zbývající hráči (tj. hráči č. 1, 4, 5, 8, 9 atd.) mají pravděpodobnost výhry rovnou p. Nyní všechny hráče s pravděpodobností výhry rovnou p nahradíme hráčem A, všechny hráče s pravděpodobností výhry rovnou q nahradíme hráčem B a dostáváme následující tabulku, v níž jsou pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů v jednotlivých hrách:

Číslo hráče	Hráč	Pravděpodobnost výhry
1	A	p
2	B	$(1-p)q$
3	B	$(1-p)(1-q)q$
4	A	$(1-p)(1-q)^2p$
5	A	$(1-p)^2(1-q)^2p$
6	B	$(1-p)^3(1-q)^2q$
7	B	$(1-p)^3(1-q)^3q$
8	A	$(1-p)^3(1-q)^4p$
9	A	$(1-p)^4(1-q)^4p$
⋮	⋮	⋮

Z toho je zřejmé, že pravděpodobnost výhry hráče A v celé sérii her je rovna

$$p+(1-p)(1-q)^2p+(1-p)^2(1-q)^2p+(1-p)^3(1-q)^4p+(1-p)^4(1-q)^4p+\cdots$$

a lze ji tedy vyjádřit jako součet dvou geometrických řad (sčítáme „ob jeden člen“), přičemž obě tyto řady mají stejný kvocient rovný $(1-p)^2(1-q)^2$; analogická úvaha platí i pro pravděpodobnost výhry hráče B. Po dosazení $p=\frac{5}{36}$, $q=\frac{6}{36}$ dostáváme řešení Huygensovy úlohy.

Bernoulli zde vlastně využívá metody úplné indukce, za jejíhož objevitele je považován Pascal (viz [1], II, str. 749); protože ale Bernoulli zřejmě Pascalův spis *„Traité du triangle arithmétique“* neznal (viz další část tohoto referátu), lze říci, že metodu úplné indukce objevil znovu nezávisle na Pascalovi.

2.8. Zbývající úlohy

PROBLEMA II. *Tři hráči A, B a C mají dvanáct kamenů, z nichž čtyři jsou bílé a osm je černých, a hrají spolu tak, že zvítězí ten z nich, který jako první naslepo vytáhne bílý kámen; jako první táhne A, pak B, poté C, pak zase A a tak dále. Jaký je poměr očekávaných výher všech tří hráčů?*

U této úlohy Huygens neuvedl výsledek. Jakob Bernoulli [8] upozornil na to, že zadání úlohy není jednoznačné; není jasné, zda každý hráč má svých dvanáct kamenů nebo zda všichni tři hráči tahají z jedné hromady, a není ani jasné, zda se vytažený kámen vrací nebo nevrací zpět. Pro všechny tyto varianty Bernoulli podal řešení;

z Huygensovy korespondence s van Huddem[21]), uskutečněné v r. 1665 (viz [6]), plyne, že Huygens měl na mysli variantu s vracením; pak nezáleží na tom, kolik hromádek kamenů je, a úlohu lze poměrně snadno řešit „huygensovsky“ (výsledek je 9 : 6 : 4). Van Hudde řešil úlohu bez vracení při společné hromádce kamenů (pak je výsledek 77 : 53 : 35). Úlohu bez vracení při individuálních hromádkách kamenů řešil Bernoulli a našel výsledek 6476548 : 4231370 : 2768457; výpočet je dost komplikovaný.

PROBLEMA III. *A vyhraje nad B, když ze čtyřiceti hracích karet, z nichž vždy deset má stejnou barvu, vytáhne čtyři karty různých barev, jinak vyhrává B. Jaký je poměr očekávaných výher obou hráčů?*
Odpověď: 1000 : 8139.

Úlohu opět zadal Huygensovi Fermat prostřednictvím Carcavyho; z dnešního hlediska jde o jednoduchou kombinatorickou úlohu.

PROBLEMA IV. *Hráči A a B mají opět dvanáct kamenů, čtyři bílé a osm černých, a hráč A vyhraje nad B, když naslepo vytáhne sedm kamenů, mezi nimiž se budou nalézat tři bílé; jinak vyhrává B. Jaký je poměr očekávaných výher obou hráčů?*

Huygens u této úlohy neuvedl odpověď, ale řešil ji v již zmíněné korespondenci s van Huddem (výsledek je 35 : 64). Van Hudde řešil i variantu této úlohy, při které A vyhraje, vytáhne-li nejméně tři bílé; pak je výsledek 14 : 19.

PROBLEMA V. *A a B mají po dvanácti mincích a hrají spolu třemi kostkami tak, že padne-li jedenáct bodů, pak A dá B jednu minci, padne-li ale čtrnáct bodů, obdrží A od B jednu minci. Hru vyhrává ten hráč, který jako první získá všechny mince. Jaký je poměr očekávaných výher obou hráčů?*
Odpověď: 244 140 625 : 282 429 536 481.

Úlohu zadal Huygensovi Pascal prostřednictvím Carcavyho; jako tzv. úloha o ruinování hráče se objevuje v různých variantách v učebnicích i dnes (např. [11], str. 336 a násl.), a proto se jejím historickým aspektům budeme věnovat poněkud podrobněji.

Bernoulli navrhuje řešit tuto úlohu indukcí podle počtu mincí, neukázal ale, jak si provedení indukce představuje. V [8], str. 71 a násl. řeší úlohu v případech, kdy hráči mají na začátku po jedné, dvou a třech mincích; tyto úlohy řeší obecně: písmenem b označuje počet případů příznivých hráči A (tj. v řešeném problému V. počet způsobů, jimiž může při házení třemi kostkami padnout 14 bodů (takže $b = 15$)), písmenem c označuje počet případů příznivých hráči B (tj. v řešeném problému V. počet způsobů, jimiž může při házení třemi kostkami padnout 11 bodů (takže $c = 27$)). Po vyřešení těchto tří případů uzavírá obecný rozbor úlohy slovy ([8], str. 74):

„Protože jsme nyní nalezli, že naděje A a B se k sobě mají jako čísla b a c, má-li každý hráč jednu minci, jako čtverce těchto čísel, má-li každý hráč dvě mince, a jako třetí mocniny, má-li každý hráč tři mince, pak zjišťujeme pomocí indukce, že při libovolně mnoha mincích jsou naděje vždy v poměru mocnin čísel b a c, jejichž exponenty jsou rovny počtu mincí, které má každý hráč na začátku.“

---

[21]) Johan van Waweren Hudde (některé prameny uvádějí jméno ve tvaru Hudden) (1628 až 1704) byl 30 let starostou Amsterodamu; zabýval se matematikou (viz [1], II, str. 801, 919), výpočty rent (viz [1], III, str. 48) a dalšími problémy.

Bernoulli bohužel neukazuje, jak tuto indukci provést, a z jeho výpočtů pro jednu, dvě a tři mince to není jasné; zdá se proto, že Bernoulli se zde nechal vést intuicí (ostatně správnou) a důkaz indukcí už neprováděl. Poznamenejme ještě, že na závěr této úlohy Bernoulli podal (bez důkazu) i její řešení v případě, že hráči nemají na začátku stejný počet mincí.

Tyto skutečnosti nás inspirovaly ke snaze pokusit se zrekonstruovat Huygensův postup řešení této úlohy; vycházíme přitom z postupů řešení úloh uvedených v *Propositiones I–XIV*, ale terminologii používáme dnešní. Toto „quasihuygensovské" řešení tedy mohlo podle našeho názoru vypadat takto:

Označme

p_i, $i = 0, 1, \ldots, 24$	pravděpodobnost výhry hráče A, má-li i mincí;
q_i, $i = 0, 1, \ldots, 24$	pravděpodobnost výhry hráče B, má-li i mincí;
P	pravděpodobnost výhry hráče A v jednotlivé hře;
Q	pravděpodobnost výhry hráče B v jednotlivé hře.

Pro tyto pravděpodobnosti platí soustavy rovnic (z nichž se při řešení problému ruinování hráče vychází i dnes (viz [11]))

$$\begin{aligned} p_0 &= q_0 = 0, \\ p_i &= P \cdot p_{i+1} + Q \cdot p_{i-1} \quad \text{pro } i = 1, \ldots, 23, \\ q_i &= Q \cdot q_{i+1} + P \cdot q_{i-1} \quad \text{pro } i = 1, \ldots, 23, \\ p_{24} &= q_{24} = 1. \end{aligned}$$

Jak už bylo ukázáno, Huygens takovýchto rovnic pro řešení pravděpodobnostních problémů používal a není důvod domnívat se, že by jich nepoužil i zde. Jeho cílem ovšem nebylo řešit uvedené soustavy, ale najít poměr p_{12}/q_{12}. Lze proto předpokládat, že si při zkoumání poměrů p_i/q_i povšiml toho, že platí

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$$

pro $i = 2, \ldots, 24$. K tomuto poznatku lze dojít postupným výpočtem poměru p_i/q_i pro $i = 2, \ldots, 24$ a viděli jsme už, že právě takovými postupnými výpočty Huygens řešil úlohu o rozdělení sázky; obecně lze tento vztah dokázat indukcí podle i. Z uvedeného vztahu pak plyne

$$\frac{p_i}{q_i} = \left(\frac{Q}{P}\right)^{i-1} \frac{p_1}{q_1};$$

protože $p_{24} = q_{24} = 1$, je podle předešlého

$$\frac{p_1}{q_1} = \left(\frac{P}{Q}\right)^{23}$$

a z toho plyne pro hledaný poměr

$$\frac{p_{12}}{q_{12}} = \left(\frac{P}{Q}\right)^{12},$$

což je obecný výsledek Bernoulliův a po dosazení hodnot z problému V. dostáváme Huygensův výsledek.

I když pochopitelně nemůžeme dokázat, že Huygens řešil danou úlohu právě takto, domníváme se, že předložený postup je plně v souladu se způsobem, kterým Huygens řešil jiné úlohy; navíc je určitě jednodušší než způsob navržený Bernoullim. Považovali jsme proto za vhodné zde tento pokus o rekonstrukci Huygensova řešení uvést.

3. Závěrečné poznámky

3.1. Kombinatorika a pravděpodobnost

V dnešním pojetí je elementární teorie pravděpodobnosti neoddělitelně spjata s kombinatorikou, Huygensův spis ale svědčí o tom, že tato vazba nebyla vždy tak těsná. Uveďme zde pro úplnost základní fakta o vývoji kombinatoriky.

Základní kombinatorické představy jsou součástí matematiky takřka od počátku její historie; [4] na str. 42 uvádí jako první příklad kombinatorických úvah pythagorejské zkoumání trojúhelníkových čísel. Kombinatorickou problematiku lze pak sledovat v průběhu celé historie matematiky v rámci aritmetiky a algebry; v polovině 17. století se kombinatorika začíná vyčleňovat jako relativně samostatná část matematiky, což podle našeho názoru souviselo právě s formováním teorie pravděpodobnosti.

Za první samostatnou práci věnovanou kombinatorické problematice by podle našeho názoru bylo možno považovat již zmíněnou Pascalovu práci *„Traité du triangle arithmétique“*, napsanou r. 1654 a vydanou r. 1665. Tato práce není příliš rozsáhlá (ve vydání [7], ze kterého zde vycházíme, je obsažena na str. 177–214) a lze ji rozdělit do dvou částí: na vlastní pojednání o aritmetickém (dnes: Pascalově) trojúhelníku (str. 177–189) a na různé příklady jeho užití (číselné řady (str. 190–192), kombinace (str. 192–198), úloha o rozdělení sázky (str. 198–211) a binomická věta (str. 211–214)). Z uvedeného je zřejmé, že Pascal sám asi kombinatoriku za samostatný okruh problémů nepovažoval a chápal ji spíš jako aplikační oblast aritmetiky, nicméně z dnešního hlediska lze obsah tohoto Pascalova pojednání hodnotit jako kombinatorický a pravděpodobnostní. Připomeňme ještě, že na základě tohoto spisu je Pascal považován za objevitele metody úplné indukce ([1], II, str. 749).

Za první samostatné kombinatorické pojednání je obvykle považována Leibnizova[22]) práce citovaná obvykle jako *„Ars combinatoria“*; její úplný název (podle vydání z r. 1690) zní[23])

---

[22]) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) po získání doktorátu práv v r. 1666 vstoupil do diplomatických služeb mohučského kurfiřta, což ho přivedlo na čtyři roky (1672–1676) do Paříže, kde navázal řadu vědeckých kontaktů (včetně matematických). Od r. 1676 působil v Hannoveru jako knihovník a dvorní rada. Jeho vědecké zájmy byly neuvěřitelně široké; v dějinách matematiky je znám hlavně jako jeden ze zakladatelů infinitezimálního počtu.

[23]) „ARS COMBINATORIA *Gottfrieda Wilhelma Leibnize z Lipska, ve které je vybudována na základech aritmetiky nauka o spojování a přemísťování s novými pravidly, & je ukázáno použití obojího na veškerém okruhu věd; rovněž jsou obsaženy nové základy umění přemýšlet*

GOTTFREDI GUILIELMI LEIBNÜZII *Lipsiensis,* ARS COMBINATORIA, *in qua ex arithmeticæ fundamentis Complicationum ac Transpositionum Doctrina novis præceptis exstruitur, & usus ambarum per universum scientiarum orbem ostenditur; nova etiam Artis Meditandi, seu Logicæ inventionis semina sparguntur.*

Præfix est Synopsis totius Tractatus, & additamenti loco Demonstratio Existentiæ Dei ad Mathematicam certitudinem exacta.

Spis byl vydán v r. 1666, kdy bylo Leibnizovi 20 let a matematikou se ještě vůbec nezabýval; plný název spisu nasvědčuje tomu, že Leibnizovi vlastně o matematiku ani nešlo a používal ji pouze jako nástroje k řešení problémů, které bychom dnes nejspíše označili jako logicko-filozofické (ostatně v některých vydáních Leibnizových spisů je tento spis řazen mezi spisy filozofické). Spis má zhruba 100 stran a problematice matematické je věnována (nejvýše) polovina z nich; z historického hlediska je třeba konstatovat, že se zde znovu (nezávisle na Pascalovi) objevuje aritmetický (tj. Pascalův) trojúhelník i některé další pojmy a výsledky kombinatorické.

Podle našeho názoru lze formování kombinatoriky jako relativně samostatné části matematiky považovat za završené knihou Jakoba Bernoulliho *„Ars conjectandi"*; druhá ze čtyř částí této knihy je celá věnována kombinatorice. Z historického hlediska je zajímavé, že Bernoulli zde uvádí jako své předchůdce Schootena, Leibnize, Wallise a Presteta[24]), ale ne Pascala, jehož práci o aritmetickém trojúhelníku zřejmě neznal.

Pro naše účely považujeme tento stručný přehled základních historických faktů o vývoji kombinatoriky v 17. století za postačující; podrobnější výklad lze nalézt v již často citovaných knihách [1–4][25]).

3.2. Závěr

Jak už bylo řečeno v úvodu, Huygensův spis *„De ratiociniis in ludo aleæ"* byl prvním a dlouho jediným tištěným pojednáním o úlohách teorie pravděpodobnosti; jeho vliv na počáteční období formování teorie pravděpodobnosti byl značný. Mluvímeli ovšem dnes o teorii pravděpodobnosti, pak předpokládáme, že je zde obecně (tj. teoreticky) zkoumáno cosi, co se nazývá „pravděpodobnost". Pokusme se nyní na závěr posoudit studovaný Huygensův spis z tohoto hlediska.

---

neboli logiky vynalézání. Předeslán je přehled celého traktátu, & jako dodatek přesný důkaz existence Boží dovedený k matematické jistotě."

[24]) O Schootenovi a Leibnizovi už byla řeč. John Wallis (1616–1703) byl kaplanem anglického krále Karla II. ([1], II, str. 765) a profesorem geometrie v Oxfordu ([1], II, str. 687). Kromě jiného vydal v r. 1685 spis *„Treatise of Algebra both historical and practical with some additional treatises"*, jehož část je věnována kombinatorice a je o ní řeč v [3], str. 34–36. Jean Prestet (?–1690) vydal v r. 1675 učebnici *„Elemens des Mathématiques"*, která byla velmi ceněna ([1], III, 102); další podrobnosti se nám nepodařilo zjistit.

[25]) Bylo by rovněž možné zkoumat vztah mezi vznikem teorie pravděpodobnosti na straně jedné a rozvojem demografie a pojišťovnictví na straně druhé (je známo, že Huygens měl k této problematice blízko), případně studovat postoje tehdejších filozofů k otázce náhody a pravděpodobnosti; tyto otázky ponecháme stranou.

Pokud se teorie týče, v Huygensově spisu je jí velice málo; dalo by se říci, že celý spis obsahuje tři definice (*Propositiones I–III*) a jednu větu (*Propositio IX*), která však neudává žádnou obecnou vlastnost nějakého obecného pojmu nebo souvislost mezi pojmy, ale obsahuje obecně formulovanou metodu řešení jistého problému. Za hlavní přínos spisu lze považovat zavedení střední hodnoty diskrétní náhodné veličiny (nazývané ovšem „očekávaná výhra" nebo podobně); většina spisu je věnována využití tohoto pojmu při řešení problémů pocházejících většinou od Pascala a Fermata. To nic nemění na našem hodnocení tohoto spisu, které bylo vysloveno hned v úvodu a znovu připomenuto v předešlém odstavci. Současně ale považujeme za nutné vyslovit názor, že prvním skutečně teoretickým výsledkem v této oblasti byla první formulace a důkaz zákona velkých čísel ve čtvrté části spisu Jakoba Bernoulliho *„Ars conjectandi"*; soudíme, že až od tohoto spisu lze mluvit o skutečné teorii pravděpodobnosti.

Co se pojmu „pravděpodobnost" týče, nevyskytuje se ani u Huygense, ani v žádném jiném matematickém spisu z té doby; první pokus o matematickou definici tohoto pojmu se objevuje opět až ve čtvrté části *„Ars conjectandi"*[26]). Domníváme se ale, že lze předpokládat u Huygense (i u Pascala a Fermata) intuitivní chápání tohoto pojmu ve smyslu tzv. klasické definice pravděpodobnosti, čemuž nasvědčuje i Bernoulliova definice. V souvislosti s tím stojí však za povšimnutí, že prakticky současně s tímto pojetím pravděpodobnosti se objevují i jiná pojetí. Demografické výzkumy prováděné v oné době (viz např. [3], kap. V) (např. otázka poměru počtu narozených chlapců a dívek) vedly postupně k tzv. statistické definici pravděpodobnosti, a u E. Halleye[27]) se objevuje myšlenka znázornit pravděpodobnostní úlohu geometricky ([3], str. 43), což lze považovat za první náznak tzv. geometrické definice pravděpodobnosti. Všechny tyto definice (dnes bychom asi spíš řekli: přístupy) jsou dodnes používány při řešení různých úloh, protože jsou jednoduché a každá z nich vystihuje některou stránku problému; obecná axiomatická definice pravděpodobnosti byla podána až v první polovině tohoto století.

Shrneme-li tedy vše, co zde bylo řečeno, pak lze dle našeho názoru říci, že Huygensův spis *„De ratiociniis in ludo aleæ"* byl posledním přípravným krokem k tomu, aby ve spisu Jakoba Bernoulliho *„Ars conjectandi"* začala vznikat teorie pravděpodobnosti v dnešním pojetí této matematické disciplíny.

Literatura

[1] CANTOR, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Bd. II, III. 2. Auflage, Teubner, Leipzig 1900, 1901.

[26]) *„Pravděpodobnost totiž je stupněm jistoty a liší se od ní jako část od celku. Jestliže totiž celá a absolutní jistota, kterou označíme písmenem a nebo jednotkou* 1, *se podle předpokladu skládá například z pěti pravděpodobností jako částí, z nichž tři jsou pro existenci nebo budoucí výskyt nějakého jevu, ostatní jsou proti: o onom jevu bude řečeno, že má* $\frac{3}{5}a$ *nebo* $\frac{3}{5}$ *jistoty."* (Přeloženo podle II. svazku [8], str. 72.) Podle Hackinga ([12], str. 125) zde Bernoulli vycházel z Leibnizových názorů.

[27]) Jde o známého astronoma Edmunda Halleye (1656–1742), který v r. 1693 uveřejnil v časopise *„Philosophical Transactions"* článek *„An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives"*.

[2] JUŠKEVIČ, A. P. (red.): *Istorija matematiki.* T. II, III. Nauka, Moskva 1970, 1972.
[3] TODHUNTER, I.: *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* 1. vyd. Cambridge 1865, přetisk Chelsea Publ. Co. New York 1965.
[4] MAJSTROV, L. E.: *Teorija verojatnostěj. Istoričeskij očerk.* Nauka, Moskva 1967.
[5] CHRISTIANI HUGENII a Zulichem, dum viveret Zelhemi Toparchæ *Opera varia.* Volumen secundum. Lugduni Batavorum, MDCCXXIV.
[6] HUYGENS, CH.: *Œuvres complètes.* T. XIV. M. Nijhoff, La Haye 1920.
[7] PASCAL, B.: *Œuvres complètes.* T. I. Ollendorf, Paris (rok vydání neuveden; dle katalogu Národní knihovny v Praze r. 1923).
[8] BERNOULLI, J.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ars conjectandi).* Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 107, 108, Leipzig 1899.
[9] GNĚDĚNKO, B. V.: *Kurs teorii verojatnostěj.* 4. vyd. Nauka, Moskva 1965.
[10] DUTKA, J.: *Spinoza and the Theory of Probability.* Scripta mathematica *19* (1953), 1, 24–33.
[11] FELLER, W.: *Vvedenije v teoriju verojatnostěj i jejo priloženija.* (Překlad z angličtiny). Mir, Moskva 1967.
[12] HACKING, I.: *The Emergence of Probability.* Cambridge Univ. Press, London 1975.

9 let vysokoteplotní supravodivosti

Stanislav Daniš, Praha

Roku 1986 ohlásili badatelé J. G. Bednorz a K. A. Müller z laboratoří IBM v Curychu možnou supravodivost v *keramické* sloučenině obsahující lanthan, baryum, měď a kyslík. Z této první vlaštovky se krátce nato stal jeden z význačných fenoménů současné fyziky pevných látek [1]. Od objevu uplynulo již 9 let (článek byl napsán v roce 1995), pokusme se proto zde o jakési ohlédnutí. Jako v každém oboru lidské činnosti je i zde výběr z množství nových poznatků značně subjektivní, a kdyby tyto řádky psal jiný autor, zcela jistě by kladl důraz na některé jiné skutečnosti.

Trocha historie a teorie aneb abychom si rozuměli

Jev supravodivosti některých látek je znám vědcům už od roku 1911, kdy jej poprvé u rtuti pozoroval holandský fyzik Heike Kamerlingh-Onnes [2]. Na obr. 1 je ukázán průběh tohoto dnes již historického a slavného experimentu. Elektrický odpor rtuťového

---

Mgr. STANISLAV DANIŠ (1970) je doktorandem na MFF UK, pracuje v Sekci nízkých teplot Fyzikálního ústavu AV ČR v Řeži u Prahy. Zabývá se transportními vlastnostmi vysokoteplotních supravodičů a slabou supravodivostí.