Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Paul R. Halmos

Logika od A do G. Návrh matematikova mechanického pomocníka volně zpracovaný tvůrčím matematikem

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 27 (1982), No. 2, 93--101

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139955`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1982

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

[23] MEDVEĎ M.: *Generic properties of parametrized vector fields I.* Czechosl. Math. J. *25* (1975), 376—380.
[24] MEDVEĎ M.: *Generic properties of parametrized vector fields II.* Czechosl. Math. J. *26* (1976), 71 to 83.
[25] MEDVEĎ M.: *Generic bifurcations of second order ordinary differential equations on differentiable manifolds.* Mathematica Slovaca *1* (1977), 9—24.
[26] MEDVEĎ M.: *Generic bifurcations of second order ordinary differential equations near closed orbits.* J. Differential Equations, *37*, 1 (1980), 97—107.
[27] RUELLE D., TAKENS F.: *On the nature of turbulence. Comm. Math. Phys. 20* (1971), 167—192.
[28] SACKER R. J.: *On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations.* New York Univ. IMM-NYU, 333 (1964).
[29] SMALE S.: *Differentiable dynamical systems.* Bull. A. M. S., *73* (1967), 747—817.
[30] SMALE S.: *Catastrophe theory.* Bull. A. M. S., *84,* 6 (1978). 1360—1367.
[31] SOTOMAYOR J.: *Generic bifurcations of dynamical systems. Dynamical Systems* (ed. PEIXOTO), Acad. Press, New York 1973, 561—582.
[32] SUSSMAN H., ZAHLER R.: *Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences — a critique.* Synthese *37* (1978), 117—216.
[33] ŠOŠITAJŠVILI A. N.: *O bifurkacii topologičeskogo tipa osobych toček vektornych polej, zavisjaščich ot parametrov.* Trudy seminara Petrovskogo, *1* (1975), 279—309.
[34] VLČEK J., ZIELENIEC J.: *O teorii katastrof.* PMFA *22* (1977), 246—262.
[35] ZAIKIN A. N., ZHABOTINSKII A. M.: *Concentration wave propagation in two-dimensional liquid--phase self-oscillating system.* Nature *225* (1970).

Logika od A do G

Návrh matematikova mechanického pomocníka volně zpracovaný tvůrčím matematikem

Paul R. Halmos, Santa Barbara, USA

Co je a co není logika

Původně „logika" znamenalo totéž co „zákony myšlení" a logikové studovali předmět ve víře, že mohou objevit lepší způsoby myšlení a jistější způsob, jak se vyhnout omylům, než znali jejich předchůdci, a ve víře, že tomuto umění mohou naučit lidstvo. Zkušenost však ukázala, že je to marná práce. Normální, zdravá lidská bytost má vrozeny všechny „zákony myšlení", které kdy kdo nalezl, a nezbývá nic, co by logikové člověka mohli

PAUL R. HALMOS: *Logic from A to G. A sketch for a mathematician's mechanical helper, flippantly annotated by a working mathematician.* Mathematic Magazine Vol. *50.* No. 1. January 1977, pp. 5—11.
Copyright © The Mathematical Association of America 1977

naučit o myšlení a vystříhání se omylů. Tím nechci říci, že člověk ví, *jak* myslí, a nechci tím ani říci, že se nikdy nedopouští omylů. Tato situace je podobna pohybovému ústrojí, s kterým se normální, zdravá lidská bytost rodí. Nevím, jak chodím, ale dělám to. Někdy klopýtnu. Zákony chůze mohou zajímat fyziology a fyziky; všechno, co já si přeji, je, abych chodil i nadále.

Předmět matematické logiky, který je předmětem tohoto článku, nečiní si nárok na objevování a vykládání zákonů myšlení. Nazývá se *matematickou* logikou ze dvou důvodů. Jedním je, že se zabývá tím druhem činnosti, kterou matematikové vyvíjejí při dokazování. Matematická logika studuje povahu důkazu a pokouší se předvídat všechno možné, co matematici budou vůbec kdy dokazovat, a všechno, co nikdy nebudou moci dokázat. Druhý důvod pro název *matematická* logika je ten, že je sama částí matematiky a dokazuje se v ní způsobem užívaným v ostatních částech matematiky, jejichž metodami se zabývá. Tato situace se podobá továrně na výrobu strojů, které mají vyrábět stroje. Dělník v takové továrně se neliší od dělníka v jiné továrně na stroje, možná s tou výjimkou, že rozumí trochu lépe tomu, co vytvářejí stroje povšechně (a o něco hůře, jak který stroj pracuje).

Dějiny logiky jako dějiny většiny věcí se odehrávaly ve špatném pořadí. Kdybych vám je vyprávěl věrně, byli byste úplně zmateni. Hodlám vám říci něco o dějinách logiky ve „správném" pořadí, jak se *měly* odehrát.

Především Boole a výroky

Podle mého pojetí dějin vše začalo u George Boola něco před sto lety. Boolovým příspěvkem bylo systematické studium nevinných slovíček, kterých užíváme denodenně svazujíce spolu výroky, tak zvaných výrokových spojek. Tyto spojky jsou v češtině

a, *nebo*, *ne*, *plyne* a *právě když*

Hodí se mít pro tato slova zkratky. Obvyklé matematické symboly užívané k jejich zkrácení jsou

$$\&, \vee, \neg, \Rightarrow \text{ a } \Leftrightarrow$$

Tak například, jsou-li P a Q výroky, potom je také $P \,\&\, Q$ výrok. Říká-li P „slunce svítí" a Q „je horko", potom $P \,\&\, Q$ říká „slunce svítí a je horko".

Dále Peano a čísla

Další osobou v naší upravené historii je italský matematik 19. století Peano, který studoval základy aritmetiky. Zvláště se zabýval vlastnostmi základních čísel *nula* a *jedna*, základních operací *sčítání* a *násobení* a základního vztahu *rovnosti*. Symboly těchto věcí jsou ovšem známy kdekomu: jsou to

$$0, 1, +, \times \text{ a } =$$

Tak například lidové rčení, že „dvě a dvě jsou čtyři" může být zapsáno v nezkráceném tvaru

$$(1 + 1) + (1 + 1) = 1 + (1 + (1 + 1)) .$$

Potom Aristoteles a kvantifikátor

Hned po Peanovi přichází Aristoteles, který žil před dobrými dvěma tisíciletími a kterému vděčíme za první rozbor základních slov *všechny* a *některé*. (Náhodou jsme teď dospěli na začátek abecedy: „A" v „Logice od A do G" znamená ovšem Aristoteles.) Ve zkratkách $\forall$ a $\exists$. K objasnění těchto symbolů vezměme dobře známou větu „Kdo zaváhá, je ztracen". Pedantsky to lze říci takto: „Pro všechna X, jestliže X zaváhá, pak je X ztracen". Užijeme-li $H(X)$ a $L(X)$ jako zkratky pro „X zaváhá" a „X je ztracen", můžeme napsat

$$\forall X(H(X) \Rightarrow L(X)) .$$

Pochybujeme-li o této výpovědi, to jest jestliže považujeme za možné zaváhat a nebýt nato ztracen, můžeme vyjádřit své pochyby formou

$$\exists X(H(X) \mathbin{\&} (\neg L(X))) .$$

Konečně Frege a mnoho kvantifikátorů

Podstatnou součástí aristotelovských zkratek je užití pomocných symbolů jako „X"; takové symboly zaujímají místo zájmen v logickém jazyce. Povšimněte si, že v uvedeném příkladu je „X" namísto „(ten) kdo". Symboly užívané tímto způsobem se nazývají *individuální proměnné* a následující historická postava, o které se zmíníme, je první, kdo jim pohlédl neohroženě v tvář. Jeho jméno je Frege a žil také v 19. století. Jeho význam dnes pro nás tkví v jeho přesvědčení, že *jedna* proměnná, to jest jedno zájmeno, je příliš sporé vybavení pro většinu vědeckých a matematických účelů. Tak například, chceme-li vyjádřit velmi skrovné tvrzení, že existují více než dvě čísla, to jest že existují alespoň tři různá čísla, uděláme to takto:

$$(\exists X)(\exists Y)(\exists Z)(\neg(X = Y) \mathbin{\&} \neg(Y = Z) \mathbin{\&} \neg(X = Z)) .$$

K tomu zcela zřetelně potřebujeme alespoň tři proměnné. Abychom vyjádřili, že existuje více než deset čísel, potřebujeme alespoň jedenáct proměnných. K vyjádření netriviální oblasti matematiky potřebujeme (alespoň potenciálně) nekonečnou zásobu proměnných. Účinný způsob, jak takovou zásobu získat (protože obyčejné abecedy jsou až příliš omezené) je: užít jednoho písmene, řekněme „X" a dalšího symbolu, řekněme odsuvníku $'$ a potom jako proměnných užít symbolů

$$X, X', X'', X''', X'''' \text{ atd.}$$

Jako doplněk všech symbolů, o kterých jsem se dosud zmínil, jsou dva další, kterých jsem již užil, a čest z donucení mě nutí připojit je k seznamu. Symboly, které mám na mysli, jsou *levá* a *pravá závorka*, značené ovšem

$$($$

a

$$).$$

Kolik symbolů?

Ukazuje se, že povážlivě velká část matematiky, totiž celá aritmetika může být vyjádřena pomocí symbolů, které jsem dosud vyjmenoval. (Tak například Eulerova proslulá věta, že každé přirozené číslo je součtem čtyř čtverců, může být zapsána takto

$$(\forall X)\,(\exists X')\,(\exists X'')\,(\exists X''')\,(\exists X'''')\,(X = (X' \times X') + ((X'' \times X'') + \\ + ((X''' \times X''') + (X'''' \times X''''))))\,.)$$

Něco by se dalo ovšem uspořit; některé symboly lze přirozeně a snadno definovat pomocí ostatních. Náš seznam může být seškrtán právě na tucet, totiž na

$$\& \; \neg \; + \; \times \; 0 \; 1 \; \exists \; X \; ' \; = \; (\;) \, .$$

Abychom dostali $\vee$, stačí si všimnout, že $P \vee Q$ je totéž jako $\neg(\neg P \,\&\, \neg Q)$. Abychom dostali $\Rightarrow$, všimněte si, že $P \Rightarrow Q$ je totéž jako $\neg P \vee Q$. Co se týče $\forall$, všimněte si, že $(\forall X)\ P(X)$ je totéž jako $\neg(\exists X)\,(\neg P(X))$. Slovy: říci, že nikdo nemá rád špenát, je totéž jako popřít, že je někdo, kdo jej má rád. Je sice jakási technická výhoda v takových úsporách, ale nemá smysl si tím příliš vázat ruce. Kdykoliv to bude třeba, budu stále užívat $\vee$ a $\Rightarrow$ a $\forall$ a budu dokonce užívat Y, Z, U, V a tak podobně jako proměnných. Správný způsob, jak vysvětlit tyto nepravidelnosti, je teď zřejmý: nahraďte $\vee$, $\Rightarrow$, $\forall$ a podobně jejich definicemi a nahraďte Y, Z, U, V a podobně X', X'', X''', X'''' atd.

Teď by bylo na místě uvést dva vedlejší postřehy. První: co jsme právě udělali pro elementární aritmetiku, lze právě tak udělat pro *celou* matematiku. Technický aparát, to je symbolismus a pravidla, která jej ovládají, by nebyl o mnoho složitější: jediný rozdíl je v tom, že bychom musili usilovněji přemýšlet. Protože to je zřejmě nežádoucí, zůstanu u elementární aritmetiky. Druhý: není nic magického na čísle dvanáct. Tucet symbolů stačí pro aritmetiku a vlastně na celou matematiku (třebas bychom mohli najít pro to jiný tucet). S trochou péče a lakotnosti by bylo možno tucet ještě snížit a nejlepší možný výsledek, ve který byste mohli věřit v nejdivočejším snu, jsou dva symboly. Úplný výklad celé matematiky zapsaný, řekněme, způsobem čárka, tečka Morseovy abecedy není příliš vzrušující čtení, ale je v zásadě úplně možný.

Mechanický matematik

Dejme se nyní do sestavování mechanického matematika k záhubě všech matematiků.

Přednosti tohoto stroje jsou čistě pomyslné; žádná praktická výhoda v jeho konstrukci není. A nikdy nenahradí živoucího matematika.

Prvním krokem je umístit do stroje pásku, dvanáct klapek (každá má na sobě jeden z dvanácti základních symbolů) a pokud možno nekonečně dlouhý list papíru. Vtip je v tom, že stisknete-li jistý významný knoflík, stroj začne tisknout a tiskne jedno po druhém vše, co je vůbec schopen vytisknout. Jeden způsob, jak to programovat, je uspořádat těch dvanáct symbolů v libovolném pořadí (nazveme je abecedním) a potom nařídit stroji, aby vytiskl nejdříve všech dvanáct symbolů („písmen") abecedy, potom všech 144 dvoupísmenných „slov", nato všech 1728 třípísmenných atd. až *do nekonečna*. Takto navržený stroj by vytiskl řadu nesmyslů (např.

$$= = = (((0 + '\,)$$

a řadu lží (např.

$$(\exists X)((0 \times X) = 1)),$$

avšak také, dříve či později, všechna aritmetická tvrzení.

Trvejte na gramatice

Abychom vytvořili stroj podobnější matematikovi z masa a krve, musíme nejdříve uspořádat věci tak, aby ze stroje vycházely třeba lži, ale ne holé nesmysly. To je v zásadě velmi prosté. Nemá smyslu vypisovat zde všechna omezení, která je třeba stroji uložit, ale podívejme se na pár příkladů. Především naučme stroj nějaké „gramatice". Řekněme, že *jméno* je libovolná posloupnost symbolů vytvořená z 0 a 1 postupně prokládaných + a × a výsledky vhodně oddělovanými závorkami. Příklady:

$$0\,,$$
$$1 + 1\,,$$
$$((1 + 1) \times (1 + (1 + (1 + 1))))$$

jsou v tomto smyslu jména. Řekněme podobně, že *zájmeno* je cosi vytvořené z X postupným přidáváním odsuvníků. Takže zájmena jsou

$$X, X', X'', X''' \text{ atd.}$$

Budeme-li pokračovat ve stejném duchu, *substantivum* bude řada jmen a zájmen spojovaných spolu prostřednictvím sčítaní a násobení (a na pomoc se vezmou závorky) stejným způsobem, jak byla původně utvořena jména z nul a jedniček. Není vůbec těžké navrhnout stroj tak, aby byl schopen poznat substantivum, pokud je uvidí. Když to je hotovo, můžeme nařídit stroji: „Začni tisknout substantiva (v nějakém systematickém pořadí). Když nějaké napíšeš, vytiskni rovnítko a potom jiné substantivum. Nauč se poznávat posloupnosti napsané tímto způsobem (substantivum, rovnítko, substantivum)" a nazvi každou takovou posloupnost *větou*." Náš stroj teď může psát rozumné věty a také je rozeznávat. Odtud je jenom krůček k tomu naučit stroj tisknout a rozeznávat *složené věty*. Znamená to skládat věty spolu, a to patřičným a vymezeným užíváním logických operátorů *a*, *ne* a *nějaký* (*existuje*). Stroj, který tiskne pouze věty, je tedy pomyslně dosažitelný. Takový stroj může stále ještě tisknout neúplné věty (např. $X = 0$) a lži (např. $1 = 0$), avšak nebude již tisknout hatlaniny,

Náhodná zmínka o „neúplných větách" napovídá, co by ještě měl mechanický matematik umět. Neúplnou větou, jak si to teď představuji, je něco jako „on je ztracen". Přirozenou reakcí při uslyšení nebo přečtení těchto slov je otázka: „Kdo je ztracen?" Podobně „$X = 0$" vyvolá reakci „co je X?" Věty s volnými zájmeny, jako „on" ve větě „on je ztracen" a jako „X" v „$X = 0$" jsou právě ty, které mám zde v úmyslu nazvat neúplnými. Větu bez volných zájmen nazveme *sentencí*. Dalším krokem při zdokonalování mechanického matematika je naučit jej poznávat sentence, pokud se s nimi setká, a vštípit mu naučení tisknout pouze úplné věty (tj. nikoliv neúplné věty). Stiskne-li se teď knoflík, stroj začne tisknout pouze rozumné věty. Nikdy se ve strojovém operátoru neobjeví již věta „$X = 0$". Může vyslovit něco nezajímavého (např. $(\exists X)(X = 0)$) nebo lživého (např. $(\forall X)(X = 0)$), avšak vždy rozhodně cosi řekne.

Stanovte axiómy

Stroj teď ví, jak mluvit; další krok je naučit jej, jak dokazovat. Ani stroj, ani jeho vzor z masa a krve však nemůže dokázat nic z ničeho. Živoucí matematik má své axiómy; do stroje je třeba vložit jisté sentece, z nichž má vycházet. Nazvěme je *axiómy*. Nebudu zde přesně definovat, jaké sentence by měly být axiómy pro aritmetiku, ale ukáži pár příkladů. (Úplná definice „axiómu" pro elementární aritmetiku není ani příliš dlouhá, ani složitá. Avšak na technické otázky tu není ani čas, ani místo.) Tak tedy: stroj může být poučen, že jsou-li P a Q sentence, potom sentenci

$$P \Rightarrow (P \vee Q) \tag{A}$$

vytiskne červeným inkoustem. To ovšem znamená, že každá taková sentence bude platit za axióm. Podobně můžeme říci, jsou-li $P(X)$, $Q(X)$ věty (obsahující volné zájmeno „X", ale žádné jiné), potom sentence

$$(\exists X)(P(X) \vee Q(X)) \Rightarrow (\exists X)(P(X) \vee (\exists X)(Q(X)) \tag{B}$$

bude vytištěna červeně. Konečná ukázka: tato sentence

$$(\forall X)(\forall Y)(X + Y = Y + X) \tag{C}$$

by mohla být axiómem elementární aritmetiky. (Příklady interpretací: (A) Je-li horko, pak je buď horko nebo svítí slunce nebo obojí. (B) Má-li někdo rád špenát nebo kapustu, pak někdo má rád špenát nebo někdo má rád kapustu. (C) $2 + 3 = 3 + 2$.)

Vtip je v tom: jakýmsi citlivým a systematickým způsobem se ze všech sentencí, které stroj může vytisknout, vybere jistá množina sentencí a stroj se poučí, aby tyto speciální sentence tiskl červeně. Červené sentence se pojmenují axiómy.

Programujte postup

Řekl jsem dříve, že nikdo nemůže dokázat nic z ničeho, a proto jsem vybavil mechanického matematika počátečními sentencemi. Avšak právě tak je pravda ,že nikdo nemůže dokázat nic *bez* ničeho. Stroj může tisknout černé a červené sentence a jestliže byly axiómy zvoleny v souhlase s přáním rozumné bytosti, jsou červené sentence (axiómy) pravdivé. Stroj může přesto stále tisknout spoustu lží a nemá dosud prostředky, jak vytvářet nové pravdivé sentence ze starých.

Postup výchovy stroje dosáhl nyní svého vrcholu. V tomto období se stroj musí naučit rozeznávat jisté vzory sentencí a je za to odměněn tím, že smí použít více červeného inkoustu. Úplný seznam takových *pravidel postupu* (tj. odvozovacích pravidel, pozn. př.) není dlouhý a seznam jejich dvou příkladů, který hodlám ve skutečnosti uvést, je ještě kratší. Možné pravidlo jedna: Je-li P červená sentence a je-li $P \Rightarrow Q$ červená sentence, potom vytiskni Q červeně. (Interpretace: jestliže „slunce svítí“ je axióm nebo již bylo dokázáno a platí-li totéž pro „jestliže slunce svítí, pak je horko“, potom můžeme mít za to, že jsme dokázali „je horko“.) Možné pravidlo dvě: jestliže neúplná věta $P(X)$ obsahující volné zájmeno X (a žádné jiné) je taková, že $P(0)$ je červená ($P(0)$ je sentence získaná z $P(X)$ dosazením 0 za X), potom vytiskni červeně sentenci $(\exists X)\,(P(X))$. (Interpretace: dosadíme-li 0 za X v „$1 + X = 1$“, dostaneme„ $1 + 0 = 1$“. Je-li tato sentence axióm nebo byla již dokázána, pak se lze domnívat, že jsme dokázali „$1 + X = 1$ pro nějaké X“.)

Po poslední úpravě se můžeme uložit na vavříny. Jestliže chceme, můžeme změnit vnitřní ústrojí stroje tak, že nebude tisknout již nic jiného než červené sentence. Po stisknutí knoflíku stroj začne tisknout axiómy a pomocí odvozovacích pravidel pokračuje v tisknutí *teorémů,* které může „odvodit“ z axiómů. Může to dělat v jistém systematickém (řekněme abecedním) pořadí.

Milenium nadešlo; mechanický matematik je hotov. Stiskni knoflík a opři se v křesle. Jeden po druhém se na pásce budou objevovat teorémy elementární aritmetiky. Budete-li dost dlouho čekat, spatříte dříve či později všechny teorémy přecházet před vašima očima. Stroj nikdy nevysloví nesmysl a nikdy neřekne lež. Shledáte-li, že je poněkud únavný, že se poněkud opakuje a je příliš, příliš pomalý pro vaši čistě lidskou trpělivost, není to jeho vina.

Existují rozpory?

Vložili jsme do stroje vše, co my sami, jeho stavitelé víme o elementární aritmetice. Jeho vnitřní ústrojí *je* elementární aritmetika. Vnější teorie stroje, jeho pojetí a jeho strukturální vlastnosti jsou součástí jiné disciplíny často nazývané *metamatematika* (nebo v tomto případě metaaritmetika). Následující otázka je typická pro metamatematiku: „Zdali někdy stroj napíše jak sentenci P, tak její negaci $\neg P$?“ Pokud by se tak někdy stalo, vyjádřili bychom asi svou nespokojenost slovy, že elementární aritmetika je sporná (nekonzistentní). Naštěstí tomu tak není: aritmetika je bezesporná (konzistentní).

Důkaz bezespornosti*) záleží ve velmi důvtipném, zcela neelementárním studiu struktury „stroje", který jsme popisovali. Toto studium je neelementární hned v několikerém smyslu. Nejpřesněji jde v technickém smyslu o skutečnost, že důkaz bezespornosti stroje není teorémem, který je stroj sám schopen dokázat. Tedy znovu: stroj si nebude nikdy odporovat, ale není schopen to dokázat.

Může být cokoliv dokázáno?

Jiná zajímavá metamatematická otázka je: Je stroj úplný v tom smyslu, že každou sentenci elementární aritmetiky buď dokáže, nebo dokáže její negaci? Ve skutečnosti jsem již na tuto otázku odpověděl, avšak tento bod lze zopakovat. Jak teď stroj vypadá, vše, co natiskne, dokáže. Zajímá-li mě určitá aritmetická sentence, mohu si ji napsat na kus papíru a potom, co jsem spustil stroj, srovnávat jeho výplody se svým připraveným lístkem. Je-li na lístku P a ve stroji se ukáže P, vítězně odejdu: mé P je dokázáno. Říká-li lístek P a jestliže stroj v určitém okamžiku řekne $\neg P$, odejdu s hanbou: mé P naplatí. Není tu však třetí možnost? Nemůže se stát, že stroj nenapíše nikdy ani P, ani $\neg P$? Nemůže se stát, že stroj nikdy nerozhodne spor P proti $\neg P$? Může a stane a tím jsme se dostali ke konci abecedy. G je od Gödela, skvělého logika dvacátého století.*) V raných letech 1930 Gödel dokázal jemným a důvtipným rozborem aritmetického stroje, že jsou sentence (a je jich mnoho), jež stroj nikdy nerozhodne. Jeho důkaz je zcela explicitní: podává úplnou sbírku návodů, jak napsat nerozhodnutelnou sentenci. Důkaz, že sentence získaná následováním jeho návodů, je nerozhodnutelná, záleží v podrobném zkoumání těchto návodů samých. Tady není nic špatně, žádný paradox, a vše souhlasí. Skutečnost, že se dosud nikdo neobtěžoval napsat Gödelovu nerozhodnutelnou sentenci, je opět vinou nedostatku lidské trpělivosti a pomíjivosti lidského života.

Řekl jsem, když jsem položil otázku úplnosti, že jsem na ni již odpověděl. Skutečně, pomysleme si sentenci (napsanou formálně s pomocí dvanácti aritmetických symbolů), která říká, že aritmetika je bezesporná. Není zcela jasné, zda zřejmě chudý formální aparát aritmetiky je schopen vyjádřit takovou sentenci; je to jeden z Gödelových výkonů, že ukázal, že toho schopen je. Považujeme-li to za zaručené a nazveme-li tuto

---

) Důkaz bezespornosti aritmetiky náleží GERHARDU GENTZENOVI (24. 11. 1909 Greifswald, † 4. 8. 1945 Československo). Podal jej v roce 1936: *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie* (Math. Annalen *112*, No. 4 (1936), 493—565) a v upravené verzi: *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie* (Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge, Heft 4 (1938), Leipzig, G. Hirzel, 19—44) s použitím transfinitní indukce až do ordinálního čísla ε_0. Těmto pracím předcházely významné *Untersuchungen über das logische Schliessen* (Math. Zeitschrift *39* (1935), 176—210, 405—431), které spolu s oběma pozdějšími pracemi založily tzv. teorii důkazu. Gentzen přednášel od podzimu 1943 do května 1945 jako docent na pražské německé univerzitě. Jméno tohoto pronikavého logika zaslouží být zde uvedeno. (Pozn.př.)

*) Také KURT GÖDEL prožil část svého života v Československu. Narodil se 28. 4. 1906 v Brně v německy mluvící rodině. Prožil zde svá gymnaziální léta až do roku 1924, kdy po maturitě odešel studovat do Vídně na univerzitu. Zemřel 14. 1. 1978 v Princetonu, N. J., USA. (Pozn. př.)

sentenci P, potom víme, že P není dokazatelné v elementární aritmetice. A co $\neg P$? Ani $\neg P$ nemůže být zřejmě dokázáno. Důvod: co je dokazatelné, je pravdivé, jak již víme z předchozích úvah o tomto předmětu. (Souvisí to s bezesporností aritmetiky.) Sentence $\neg P$ určitě není pravdivá. (Vzpomeňte si, že $\neg P$ popírá bezespornost aritmetiky.) Závěr: ani P, ani $\neg P$ není dokazatelné. (Poznámka: z těch dvou sentencí je P pravdivá.)

Je toho ještě víc

To je konec cesty, pro nás, pro tuto chvíli. Není to v žádném případě konec cesty matematické logiky. To, o čem jsem vám vyprávěl, událo se v třicátých letech tohoto století a věda se od těch časů nezastavila. Gödel sám přispěl několika strhujícími výsledky k našim znalostem formální logiky. Mnoho jiných se chopilo této oblasti a objevily se nečekané aplikace a komplikace. Kdo se například odvážil předvídat, že se formální logika promění v jeden z nejmocnějších nástrojů při sestavování opravdových elektronických počítačů? Matematická logika je živá a v pořádku; zbývá toho ještě mnoho udělat; uplyne mnoho času, než někdo bude moci popsat matematickou logiku od A do Z.

Přeložil Přemysl Vihan

Lemma 1

Helga Königsdorf, Berlín

Čas od času se objeví, že poznatek již prohlášený za významný pokrok ve vědě byl založen na chybné úvaze. Nadále zajištěnou existenci však mají ti, kteří svůj pocit úlevy nad takovým vývojem událostí maskují zdvořilým politováním.

Nelze domyslet, jaké by nám byly vznikly těžkosti, kdyby se Jana Bocková nebyla zmýlila.

HELGA KÖNIGSDORF: *Lemma 1.* In: *Meine ungehörigen Träume, Geschichten.* Berlin, Aufbau — Verlag, Edition Neue Texte, 1978. Přeložil PETR MATOUŠ.

© Aufbau — Verlag Berlin 1978

Autorka studovala fyziku v Jeně a v Berlíně. Je univerzitní profesorkou, vede oddělení ústavu Akademie věd NDR. Vědecky pracuje v matematice. V roce 1978 jí byla udělena záslužná medaile matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Své povídky píše pod pseudonymem.

Překladatel je vědeckým pracovníkem MFF UK a podobně jako autorka si přál otisknout svůj překlad pod pseudonymem.