

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Marie Kupčáková; Jan Royt

Vzácný tisk Dürerova „Pojednání“ v knihovně Ústavu pro dějiny umění UK

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 53 (2008), No. 3, 231--240

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141860>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2008

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Vzácný tisk Dürerova „Pojednání“ v knihovně Ústavu pro dějiny umění UK

Marie Kupčáková, Hradec Králové, Jan Royt, Praha

Úvodem o Dürerově tvorbě

V uměleckých sbírkách Čech, Moravy a Slezska jsou díla německého malíře Albrechta Dürera (narozen 21. května 1471 v Norimberku, zemřel 6. dubna 1528 tamtéž) vzácností. Avšak v pražské Národní galerii mají návštěvníci možnost obdivovat jeho výtvarně a ikonograficky pozoruhodný oltářní obraz *Růžencová slavnost* (Das Rosenkranzfest, 1505–1507), objednaný původně německými kupci pro benátský kostel S. Bartolomeo a přivezený do Prahy z příkazu samotného císaře Rudolfa II., který byl malířovým velkým obdivovatelem. Na první pohled zaujme vyváženost obrazu komponovaného do rovnostranného trojúhelníku. Jsou v něm zobrazeny nejvýznamnější postavy; na trůně sedí Marie s Ježíškem, vlevo klečí papež Julius II. a vpravo je císař Maxmilián. (Na pravé straně je autor sám.)

Albrecht Dürer byl vynikajícím portrétistou, tvůrcem intimních obrazů Madon stejně jako reprezentativních děl s náboženskou tematikou. Fascinující je Dürerova schopnost pozorování přírody, jak se o tom můžeme přesvědčit z jeho skic krajin, detailů rostlin i zvířat. Proslavené jsou jeho dřevořezy a rytiny, které svými náměty reagovaly na dobové politické události (viz např. cyklus *Apokalypsa*).

Dürerovy grafické cykly používali umělci po celé Evropě jako předlohu pro svá díla. V grafické sbírce Národní galerie i v některých lokálních uměleckých sbírkách pak nalezneme Dürerovy grafické listy tzv. „různých stavů“ (stavem výtvarní umělci nazývají otisky z originální plotny, ale z různých dob).

Underweysung der messung mit dem zirckel . . .

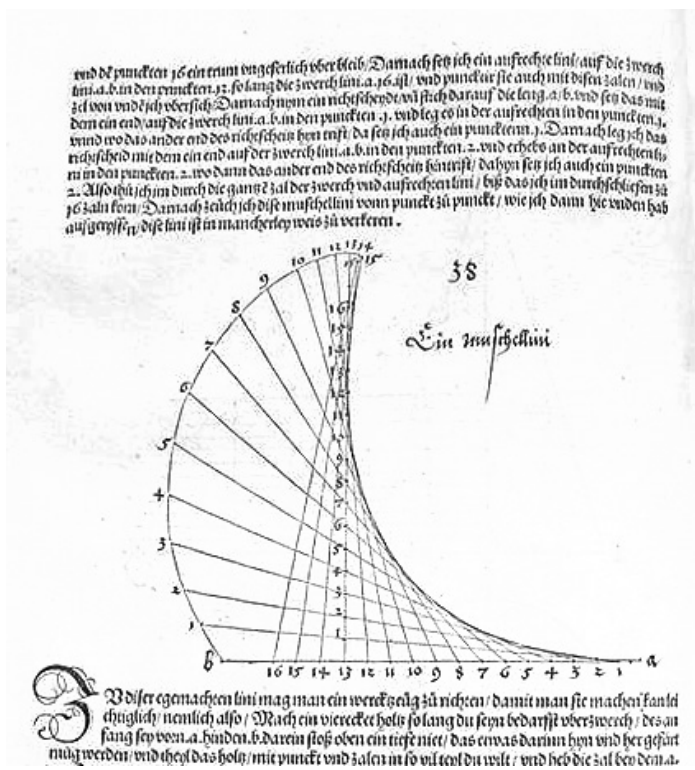
Ústav pro dějiny umění Filozofické fakulty Univerzity Karlovy vlastní vzácný tisk z pera Albrechta Dürera *Underweysung der messung . . .* vydaný v Norimberku v roce 1525, viz [1].

Přepis celého dlouhého názvu z originální titulní strany je *Vnderweysung der messung, mit dem zirckel vñ richt scheyt, in Linien ebenen vnnd gantzen corporen, durch Albrecht Dürer zů samem getzogē, vnd zů nutz allē kunstlieb habenden mit zů gehörigen figuren, in truck gebracht, im jar. M. D. XXv*. Překlady původního názvu

RNDr. MARIE KUPČÁKOVÁ, Ph.D., Katedra matematiky PdF, Univerzita Hradec Králové,
e-mail: Marie.Kupcakova@uhk.cz

Prof. PhDr. Ing. JAN ROYT, Ústav pro dějiny umění FFUK Praha, e-mail: royt@volny.cz

se velmi rozcházejí. Kniha nebyla nikdy vydána v českém překladu, proto ani v češtině nemáme pro název ustálený výraz. Některé zdroje uvádějí „*Pojednání o měření . . .*“, jiné „*Návod k měření . . .*“ či „*Návod ke konstrukcím užitím kružítka . . .*“. Další část názvu je sporná, nesporné je však to, že celou knihu textem i obrazy opatřil autor a věnoval ji milovníkům umění.



Obr. 1. Jak sestrojít parabolický oblouk a jak jej odvinout.

Pojednání mělo být teoretickým i praktickým podkladem pro porozumění geometrickým konstrukcím a perspektivě. Dürer patrně získal podněty k jeho vytvoření za své italské cesty roku 1506. Zde se mohl seznámit s teoretickými spisy i úvahami velkých osobností italské renesance, jako byli Leon Battista Alberti (1404–1472), Leonardo da Vinci (1452–1519) nebo Luca Pacioli (1445–1514). V Benátkách také zakoupil latinské vydání Eukleida vydané v roce 1505. S překlady řeckých a latinských textů mu pak pomáhal jeho nejbližší přítel Willibald Pirckheimer (1470–1530), radami z oblasti matematiky Johannes Werner (1468–1522).

Z roku 1514 je umělcova mědirytina *Melencolia I*, která obsahuje geometrické a matematické prvky, jako např. konstrukci v jednoúběžníkové perspektivě, mnohostěn podivného tvaru nebo magický čtverec (více viz [4]).

Dürer jako první vydal mapu severní oblohy a spolupracoval na výrobě globu s Johannem Stabiem (1460–1522). V *Underweysung* také zúročil své poznatky z praxe

středověkých „stavebních hutí“, jejichž působení v Norimberku bylo tehdy velmi významné.

Spis má jednotlivé listy označeny systémem: \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_{ii} , \mathfrak{A}_{iii} , ... atd., \mathfrak{E} , \mathfrak{E}_{ii} , \mathfrak{E}_{iii} apod., text je oboustranný (proto někdy výrazně prosvítá). Obrazy byly sestrojeny jako dřevořezy a jsou většinou číslovány.

Underweysung je rozdělen do čtyř kapitol nadepsaných Dürerem jako „*Knihy*“. Často bývá jejich obsah vyjádřen v různých naučných textech (v knihách, časopisech, na internetu) dvěma třemi větami, s důrazem na poslední velmi krátkou stat o perspektivě. Vzniká pak zkreslený dojem, o čem vlastně a v jakém rozsahu kniha pojednává.

Underweysung – Kniha první

Autor v první části spisu (25 listů) pomocí 51 dřevořezů objasňuje geometrické pojmy, jako jsou bod, přímá čára a křivka (linie), kružnice, oblouk, spirála (závitnice, voluta) a jejich využití v umění. Dále například studuje průměty prostorové spirálovité křivky, šroubovice.

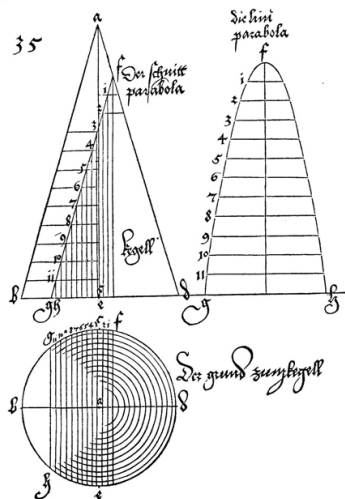
Právě praktickému uplatnění geometrických konstrukcí věnoval velkou pozornost. Při návrhu biskupské berly využil spirálovité struktury ulit měkkýšů. O mnoho století později se nechal obdobnou ulitou inspirovat americký architekt Frank Lloyd Wright (1869–1955) v projektu Guggenheimova muzea v New Yorku.

Dürer umí sestrojít parabolický oblouk jako obálku tečen a také jeho evolventu (obr. 1). Pečlivě sestrojuje sdružené průměty eliptického, parabolického (obr. 2) a hyperbolického řezu na kuželi, včetně použití třetí průmětny – třista let před Gaspardem Mongem. Bývá proto považován za jednoho z předchůdců deskriptivní geometrie.

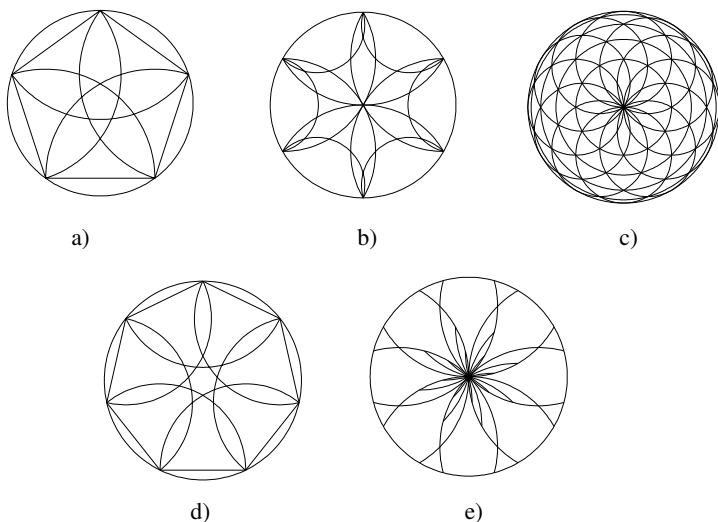
Underweysung – Kniha druhá

Druhá kniha má 11 listů, 36 dřevořezů a opět začíná důležitými základními kameny geometrie – úsečkou, kruhovým obloukem, pravým úhlem, Thaletovou větou. Následují trojúhelník a čtverec a jejich grafické proměny, konstrukce pravidelných mnohoúhelníků. Autor se věnoval i tomu, jak pracovat „*mit dem Zirckel*“, jak sliboval název knihy. Krásné kružby (viz obr. 3) jsou sestrojeny díky znalostem konstrukce pravidelného

Das auß dem grund alle freyten durch die kal/ von allen geraden linien die durch den sirtz des abgo schneyten sind: zu der aufrechten. f. vmb puncten sie zu beyden seiten / das die aufrechte. f. allweg in der mit kleib / Also darmit selich ich die formen in parabola / von puncten zu puncten wie ich das hietey hab außgegriffen.



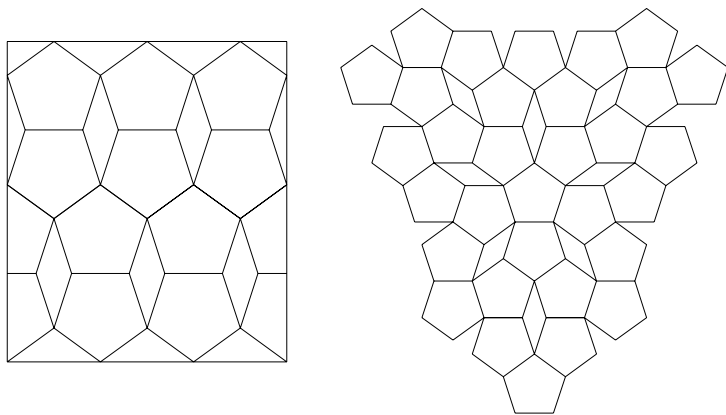
Obr. 2. Jak sestrojít parabolický oblouk jako řez na kuželi.



Obr. 3. Jak sestrojít kružby (překresleno).

pětiúhelníku (3a), šestiúhelníku (3b), dvanáctiúhelníku (3b, 3c), dvacetičtyřúhelníku (3e) a přibližné konstrukce sedmiúhelníku (3d).

Stojí za povšimnutí, že námi označená mandala 3e není osově, ale středově souměrná. To přirozeně vyplynulo z toho, jak postupně za sebou šly středy kružnicových oblouků — po vrcholech pravidelného dvacetičtyřúhelníku vepsaného do kružnice.



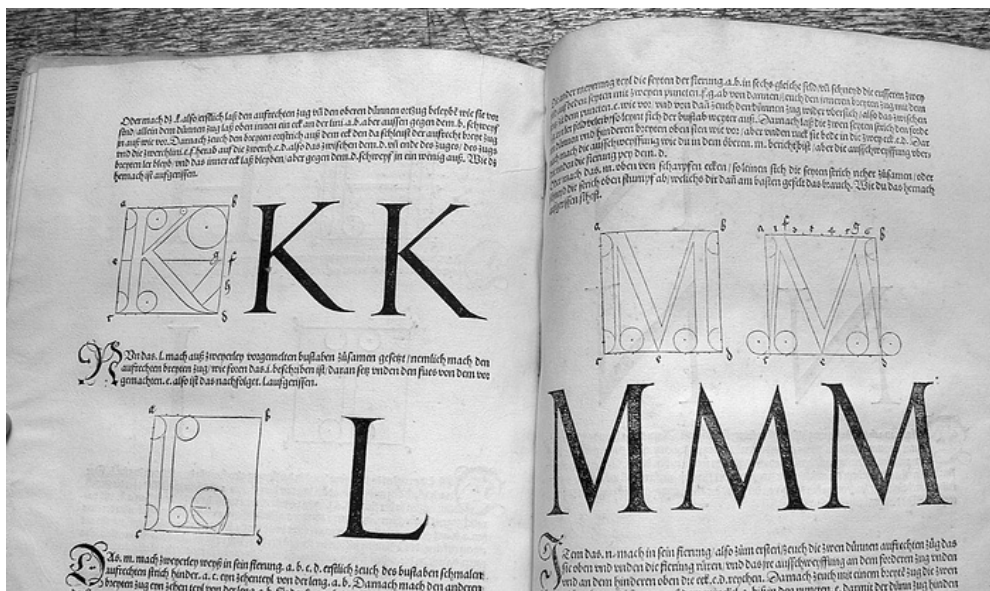
Obr. 4. Jak pracovat s pravidelnými pětiúhelníky (překresleno).

Dürer nabízí náměty různých parketází, např. z rovnostranných trojúhelníků, čtverců, kosočtverců, z kombinací pětiúhelníků a kosočtverců (obr. 4) apod. V *Knize druhé* nechybí ani Pythagorova věta.

Underweysung – Kniha třetí

Třetí kniha má 27 listů a 27 označených obrazů. Najdeme zde sdružené průměty *n*-bokých hranolů a jehlanů, jejichž výška je mnohonásobně větší než průměr podstavy. Za povšimnutí stojí ironický návrh Památníku vítězství zřejmě bitvy u Frankenhausenu (druhá etapa selských válek).

Jedna z partií třetí knihy je zasvěcena konstrukci slunečních hodin. Rozsáhlá pozornost, 14 listů, je však věnována geometrickým konstrukcím písmen, tyto obrazy nejsou číslovány (obr. 5).



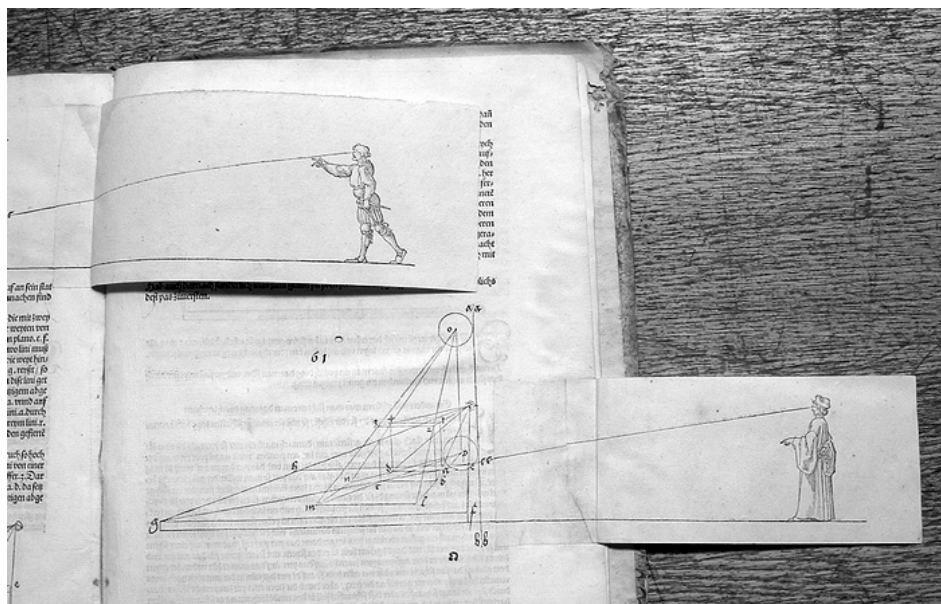
Obr. 5. Jak sestrojovat písmo.

Underweysung – Kniha čtvrtá

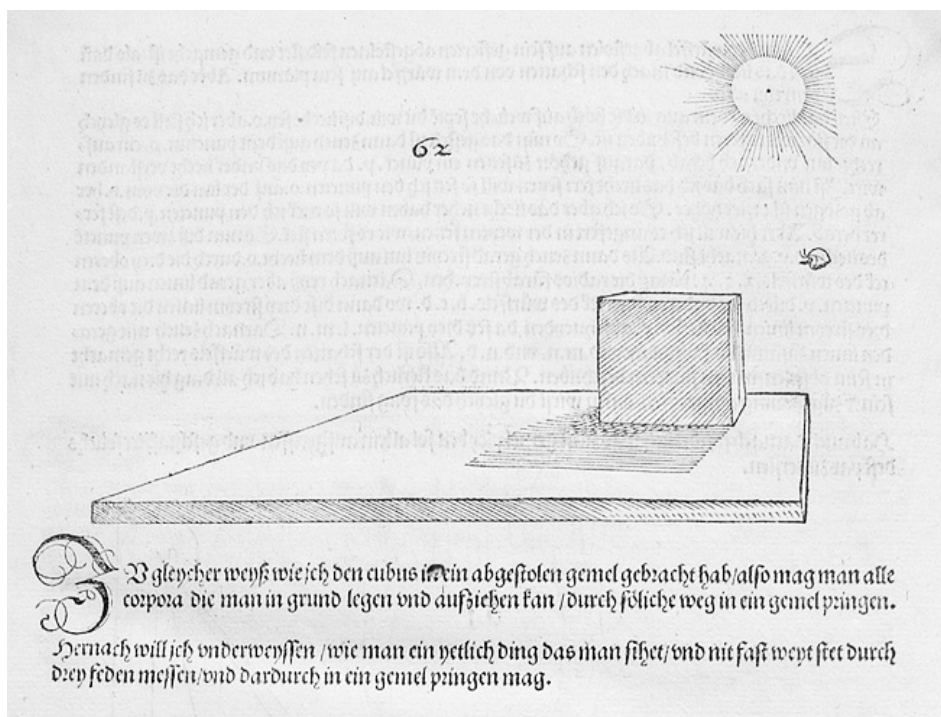
Poslední kniha (20 listů) začíná konstrukcí pravidelného čtyřstěnu, následují průměty a sítě dalších pravidelných mnohostěnů, konstrukce přibližné sítě kulové plochy a sítě některých archimédovských mnohostěnů. V samém závěru spisu se objasňuje princip středového osvětlení krychle a konstrukce jejího vrženého stínu.

Kniha je půvabná právě v původním provedení, jak je vidět na fotografii – obr. 6, kde jsme spis rozevřeli na stránkách zabývajících se zákonitostmi vidění.

Dürerův spis rozhodně není učebnicí lineární perspektivy, pouze se o ní zmiňuje; výklad začíná a končí perspektivním obrazem osvětlené krychle (obr. 7).



Obr. 6. Jak souvisí lidské vidění s perspektivním zobrazením (dřevořez 61).



Degleycher weyß, wie ich den cubus in ein abgestolen gemel gebracht hab / also mag man alle corpora die man in grund legen vnd aufziehen kan / durch solche weg in ein gemel pringen. Demnach will ich vnderweyßfen / wie man ein heylich ding das man sieht / vnd nit fast weyt stet durch drey seden messen / vnd dardurch in ein gemel pringen mag.

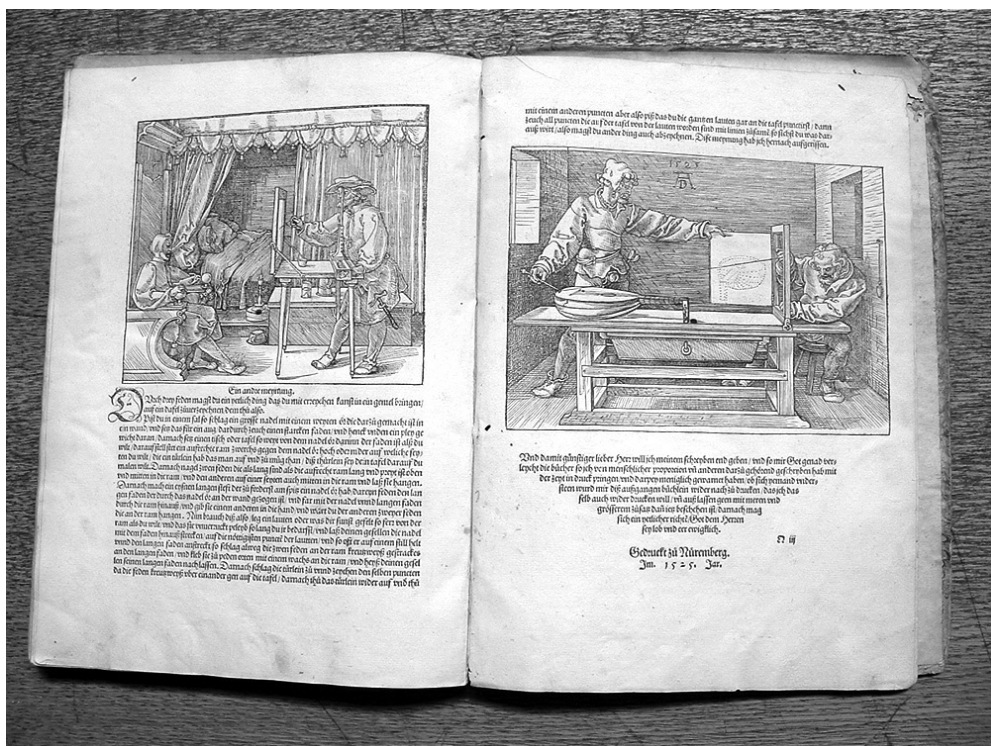
Obr. 7. Jak nakreslit perspektivní obraz osvětlené krychle (dřevořez 62).

O věhlasu *Underweysung*

Pojednání celosvětově proslavila poslední dvojstrana, následující hned za osvětlenou krychlí (fotografie – obr. 8). Jsou zde vyobrazeny dva různé způsoby, jak může malíř prakticky postupovat, když chce kreslit perspektivní průmět.

Na prvním dřevorezu (vlevo) malíř kreslí průmět hlavy na svislou průmětnu – poloha jeho oka je v prostoru pevně definována v jediném bodě pomocí ukotveného průhledu.

Na druhém dřevorezu malíř vykresluje detaily loutny. Lidské oko zde nahradilo „očko“, zorný paprsek nahradila niť zatížená olůvkem. Průmět bodu je určen jako průsečík napnuté nitě s nití, která je voskem přilepená k rámu. Pak se napnutá nit odstraní, okénko zavře a na papíru, který je na rámu napnut, se udělá tečka. Takto se pracně bod po bodu vyhledá obraz celé loutny, viz [3].



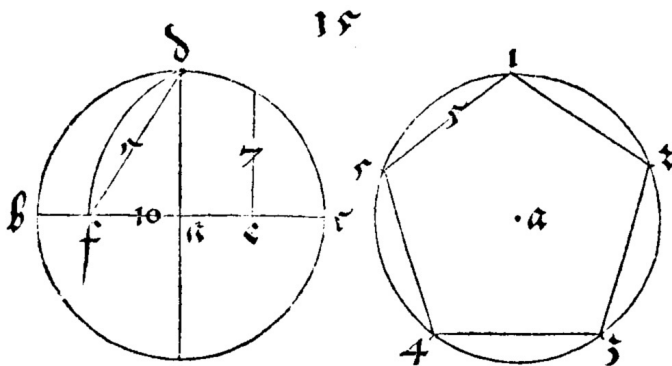
Obr. 8. Jak kreslit perspektivní průměty.

Konstrukce pravidelného pětiúhelníku

Nezvyklý zájem veřejnosti o spis *Underweysung* jsme zaznamenali v roce 2006, kdy vyšel v nakladatelství Argo překlad knihy Maria Livia „Zlatý řez. Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě“, [2]. Dürerovo *Pojednání* je zde zmiňováno. Liviov popis

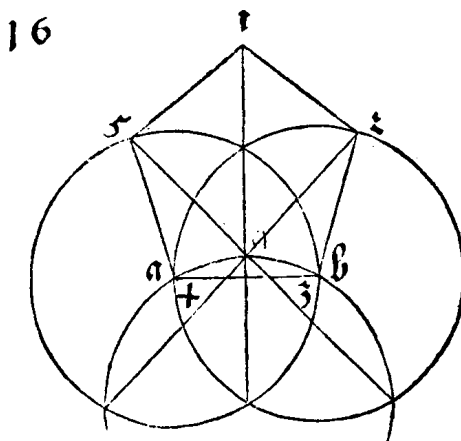
obsahu historického spisu je však dosti povrchní a stručný. Na druhou stranu nás upozornil na pěknou matematickou úlohu.

Livio uvádí: „*Druhá kniha obsahuje přesné i přibližné metody konstrukce řady mnohoúhelníků, a jsou zde i dva způsoby konstrukce pětiúhelníku (jeden přesný a druhý přibližný,*“ [2], s. 126.



Obr. 9. Jak vepsat do kružnice se středem a pětiúhelník.

Tato poznámka nás přivedla k tomu, že jsme se na Dürerovy konstrukce pětiúhelníku v *Knize druhé* podívali podrobně. Vyobrazení „15“ obsahuje známý Ptolemaiův postup, jak určit velikosti stran pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku vepsaných do kružnice, včetně přibližné konstrukce pravidelného sedmiúhelníku (obr. 9).

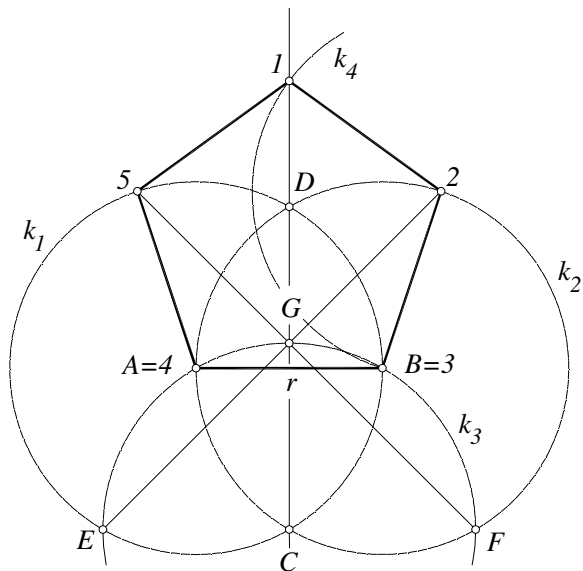


Obr. 10. Jak doplnit k úsečce ab pětiúhelník.

Je zde však ještě konstrukce „16“, kterou jsme neznali (obr. 10). Dürer v textu uvádí, že má dānu úsečku ab a má za úkol najít další vrcholy pětiúhelníku tak, aby byly „dokola“ a aby byly jeho strany stejné.

Geometrický problém může být zadán i středoškolákům a formulován třeba takto:

Úloha: Zjistěte, zda Dürerem označený pětiúhelník 12345 z obr. 10 je pravidelný.



Obr. 11. Jaký je postup konstrukce pětiúhelníku (rekonstrukce).

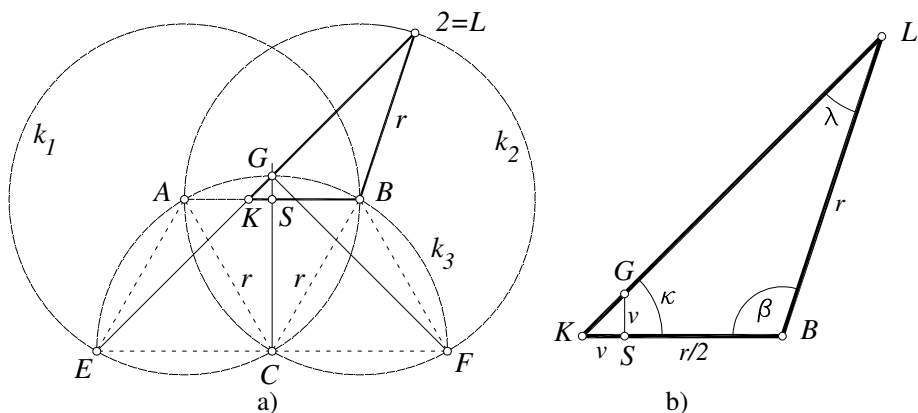
Z Dürerovy mědirytiny **16** i její rekonstrukce na obr. 11. je zřejmé, že rýsování je provedeno přímým pravítkem a při jednom rozevření kružítká (postupně jsou rýsovány kružnice k_1 až k_4) a že tedy všechny strany pětiúhelníku **12345** jsou shodné. Zbývá rozhodnout, zda má pětiúhelník všechny vnitřní úhly o velikosti 108° – pak bude pravidelný.

Pouhé oko, úhloměr či průsvítka to nezjistí, kótovací počítačový program už ano. Řešili jsme však úlohu geometricky. Postupy řešení úlohy mohou být různé, například tento:

Dorýsovali jsme a vyznačili další vztahy podle obr. 12 a. (Úsečka AB má délku r , střed S . Pro pojmenování bodů jsme použili písmena, nikoliv čísla. Průsečík úseček EL a AB jsme označili K .)

Cílem bylo určit velikost úhlu β při vrcholu B . Hledali jsme nejprve velikost úhlu λ při vrcholu L (obr. 12 b). Délka strany KB je $v + \frac{r}{2}$, kde v je rozdíl poloměru r kružnice a výšky rovnostranného trojúhelníku ABC . Proto $v = r - \frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{3})$. Tedy $|KB| = \frac{r}{2}(3 - \sqrt{3})$. V trojúhelníku KBL je podle sinové věty $\sin \lambda = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) \cdot \sin 45^\circ$, tj. $\lambda = 26,6339^\circ$ (přibližně). Proto je hledaná velikost $\beta = 108,3661^\circ$, tedy různá od 108° .

Zjistili jsme, že Dürerem sestrojený pětiúhelník **12345** není pravidelný. Ale odchylky i jeho ostatních vnitřních úhlů od 108° jsou natolik malé, že při řemeslnické práci, například kamenické nebo kovářské, byly nevýznamné. Proto lze uvedený návod považovat za přibližnou a vcelku pohodlnou konstrukci pravidelného pětiúhelníku s použitím kružítká a pravítka.



Obr. 12 a, b: Jak určit vnitřní úhel při vrcholu B (b – detail).

Závěrem

Underweysung nebyl jediný Dürerův teoretický spis; v roce 1528 vydal ještě příručku nazvanou *Vier bücher von menslicher Proportion*, pojednávající o tělesných proporcích. Také tuto knihu doprovázejí jeho ilustrace.

Spis *Underweysung der messung ...* byl od dob Dürerových několikrát vydán. Jak bylo řečeno úvodem, jeden z původních originálních výtisků z roku 1525 uchovává knihovna Ústavu pro dějiny umění Filozofické fakulty Univerzity Karlovy. V současné době prošla tato vzácná památka restaurátorskými pracemi, a tak důstojně oslaví své pětisté narozeniny.

L i t e r a t u r a

- [1] DÜRER, A.: *Underweysung der messung mit dem zirckel un richt scheyt in Linien, eben vnnnd gantzen corporen*, Norimberk 1525.
- [2] LIVIO, M.: *Zlatý řez. Příběh ϕ , nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Argo/Dokořán, Praha 2006.
- [3] KADEŘÁVEK, F.: *Perspektiva – příručka pro architekty, malíře a přátele umění*, Praha 1922.
- [4] KUPČÁKOVÁ, M.: *Dürerova „Melencolia I“ aneb detektivní geometrie*. Dějiny matematiky, svazek 32, Matematika v proměnách věků IV, s. 67–102. Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007.