Jaroslav Hančl; Lukáš Novotný; Jan Šustek

21. ročník Mezinárodní matematické soutěže Vojtěcha Jarníka

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 56 (2011), No. 3, 228--237

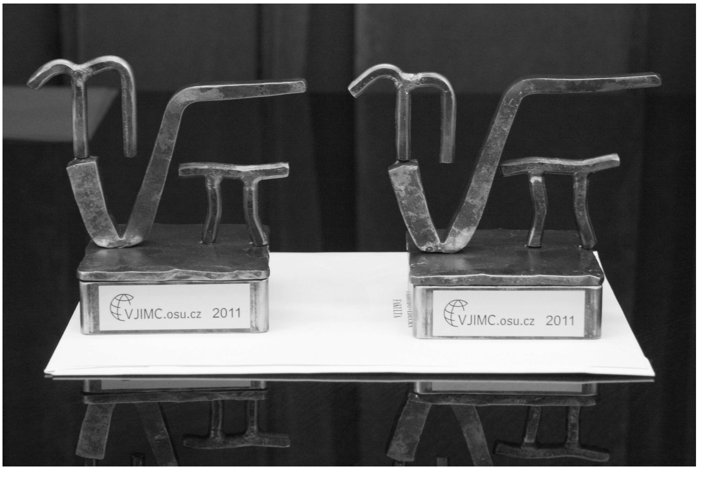
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/142010

21. ročník Mezinárodní matematické soutěže Vojtěcha Jarníka

Jaroslav Hančl, Lukáš Novotný, Jan Šustek, Ostrava

1. Úvod

Dne 31. 3. 2011 se v Ostravě uskutečnil již 21. ročník Mezinárodní matematické soutěže Vojtěcha Jarníka. Byla založena před 20 lety a navázala na mezinárodní studentskou soutěž ISTAM, která byla zrušena po rozpadu Jugoslávie. Soutěž byla z počátku pouze pro studenty Ostravské univerzity, ale během 20 let se rozrostla na jednu z největších matematických soutěží v Evropě určených pro vysokoškolské studenty. Je rozdělena do dvou kategorií. První je určena studentům 1. a 2. ročníku mladším 22 let, druhá pak všem ostatním studentům do 25 let. Den před samotnou soutěží zasedá mezinárodní porota složená z delegátů jednotlivých zúčastněných univerzit, která si zvolí svého předsedu a vybere 4 příklady do každé kategorie.



Trofeje pro vítěze

Letošního 21. ročníku se účastnilo 147 studentů ze 36 univerzit z 13 států a 3 kontinentů. Pravidelně se účastní nebo účastnili i úspěšní řešitelé Mezinárodní matematické olympiády, např. Przemysław Mazur (3 zlaté), Pavlo Mishchenko (2 zlaté), František Konopecký (zlatá + stříbrná) nebo Jaromír Kuben (stříbrná + 2 bronzové).

Doc. RNDr. Jaroslav Hančl, CSc., Mgr. Lukáš Novotný, RNDr. Jan Šustek, Ph.D., Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě, 30. dubna 22, 701 03 Ostrava 1,
e-mail: hancl@osu.cz, lukas.novotny@osu.cz, jan.sustek@osu.cz

2. Soutěžní problémy

První kategorie

Problém 1 (a) Existuje polynom P s reálnými koeficienty takový, že

$$P\Big(\frac{1}{k}\Big) = \frac{k+2}{k}$$

pro všechna přirozená čísla k?

(b) Existuje polynom P s reálnými koeficienty takový, že

$$P\Big(\frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{2k+1}$$

pro všechna přirozená čísla k? [10 bodů]

Problém 2 Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neomezená rostoucí posloupnost kladných reálných čísel taková, že aritmetický průměr libovolných čtyř po sobě jdoucích prvků a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} patří do téže posloupnosti. Dokažte, že posloupnost a_{n+1}/a_n konverguje a najděte všechny možné hodnoty její limity. [10 bodů]

Problém 3 Dokažte, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{1+x^{2k+2}}{(1-x^{2k+2})^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(1-x^{k+1})^2}$$

pro všechna $x \in (-1, 1)$. [10 bodů]

Problém 4 Nechť a, b, c jsou prvky konečného řádu v nějaké grupě. Dokažte, že když $a^{-1}ba = b^2$, $b^{-2}cb^2 = c^2$ a $c^{-3}ac^3 = a^2$, potom $a = b = c = e$, kde e je jednotkový prvek. [10 bodů]

Druhá kategorie

Problém 1 Nechť $n > k$ a nechť $A_1, \ldots, A_k$ jsou matice $n \times n$ hodnosti $n-1$. Dokažte, že

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \neq 0\,.$$

[10 bodů]

Problém 2 Nechť k je přirozené číslo. Nalezněte

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=1}^{\infty} \frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_k (n_1 + \ldots + n_k + 1)}.$$

[10 bodů]

Soutěžící v učebně

Problém 3 Nechť p a q jsou komplexní polynomy takové, že $\deg p > \deg q$ a nechť $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$. Předpokládejme, že všechny kořeny polynomu p leží uvnitř jednotkového kruhu $|z| = 1$ a že všechny kořeny polynomu q leží vně jednotkového kruhu. Dokažte, že

$$\max_{|z|=1} |f'(z)| > \frac{\deg p - \deg q}{2} \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

[10 bodů]

Problém 4 Nechť $\mathbb{Q}[x]$ označuje vektorový prostor polynomů jedné proměnné x s racionálními koeficienty. Najděte všechny $\mathbb{Q}$-lineární zobrazení $\Phi\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ takové, že pro každý ireducibilní polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$ je polynom $\Phi(p)$ také ireducibilní.

(Polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$ se nazývá ireducibilní, jestliže není konstantní a není možné jej rozložit na součin nekonstantních polynomů $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}[x]$.) [10 bodů]

3. Řešení

První kategorie

Řešení problému 1 (a) ANO. Stačí uvažovat polynom

$$P(x) = 2x + 1.$$

(b) NE. Předpokládejme, že takový polynom P existuje. Definujme polynom F následovně

$$F(x) = (x + 2)P(x) - x.$$

Pak

$$F\Big(\frac{1}{k}\Big) = \Big(\frac{1}{k}+2\Big)P\Big(\frac{1}{k}\Big) - \frac{1}{k} = 0,$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Polynom F nabývá hodnoty 0 v nekonečně mnoha bodech. Tedy

$$(x+2)P(x) - x = 0,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Ale odtud dostáváme, že

$$P(x) = \frac{x}{x+2},$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což je spor.

Řešení problému 2 Z předpokladu $a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < a_{n+3}$ dostaneme

$$a_n < \frac{1}{4}(a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}) < a_{n+3},$$

čili $(a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3})/4 \in \{a_{n+1}, a_{n+2}\}$. Odtud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí právě jedna z následujících dvou identit:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 4a_{n+1} \tag{1}$$

nebo

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 4a_{n+2}\,. \tag{2}$$

Nechť A je množina indexů $n \in \mathbb{N}$, pro které platí (1), a nechť B je množina indexů $n \in \mathbb{N}$, pro které platí (2). Zřejmě $A \cup B = \mathbb{N}$, $A \cap B = \emptyset$.

Předpokládejme, že existuje k tak, že $k \in B$, $k+1 \in A$. Z (1) a (2) dostáváme

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} = 4a_{k+2} \qquad \text{a} \qquad a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} = 4a_{k+2}.$$

Odtud $a_k = a_{k+4}$, což je ve sporu s faktem, že a_n je rostoucí.

To znamená, že musí existovat takové přirozené číslo n_0, že $A = \{1, \dots, n_0\}$ a $B = \{n_0+1, \dots\}$. Podle (2) posloupnost a_n vyhovuje lineární rekurenci $a_n + a_{n+1} - 3a_{n+2} + a_{n+3} = 0$ pro všechna $n > n_0$. Charakteristický polynom této lineární rekurence

$$\phi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$$

má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$. Odtud

$$a_n = C_1 + C_2(1-\sqrt{2})^n + C_3(1+\sqrt{2})^n, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}, \qquad n > n_0.$$

Poznamenejme, že $-1 < \lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 1$. Jestliže $C_3 \le 0$, pak je posloupnost a_n shora omezená. Odtud $C_3 > 0$, takže $a_n \sim C_3\lambda_3^n$ pro $n \to \infty$. Jednoduchý výpočet ukazuje, že posloupnost a_{n+1}/a_n konverguje a má limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda_3 = 1 + \sqrt{2}.$$

Řešení problému 3 Použijeme binomickou řadu

$$\frac{1}{(1-u)^2} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)u^j, \ \ |u| < 1,$$

abychom dostali

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{1+x^{2k+2}}{(1-x^{2k+2})^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k(1+x^{2k+2}) \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)x^{j(2k+2)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x^k(1+x^{2k+2})(j+1)x^{j(2k+2)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)x^{2j}\sum_{k=0}^{\infty} x^k(1+x^{2k+2})x^{j2k} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)x^{2j}\left(\frac{1}{1-x^{2j+1}} + \frac{x^2}{1-x^{2j+3}}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+1)x^{2j}}{1-x^{2j+1}} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{jx^{2j}}{1-x^{2j+1}} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2j+1)x^{2j}}{1-x^{2j+1}} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j=0}^{\infty}\log(1-x^{2j+1})\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{(1-x^{k+1})^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)x^{(k+1)j} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)x^j\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k x^{kj} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+1)x^j}{1+x^{j+1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j=0}^{\infty}\log(1+x^{j+1}).\end{aligned}$$

Nyní použijeme klasickou identitu

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2n+1}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n),$$

která může být dokázána následovně:

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-x^{2n}}{1-x^n} = \frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)} \\ &= \frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2n-1}}.\end{aligned}$$

Řešení problému 4 Nechť $r(g)$ označuje řád prvku $g \in G$. Předpokládejme, že tvrzení neplatí. Nechť p je nejmenší prvočíslo dělící $r(a)r(b)r(c)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $p \mid r(b)$ (jestliže $p \mid r(a)$ nebo $p \mid r(c)$, je úvaha stejná). Pak existuje k takové, že $r(b) = pk$. Nechť $d := b^k$. Pak $r(d) = p$.

Lemma 1 Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí $a^{-m}da^m = d^{2^m}$.

Důkaz: Nejdříve dokážeme, že

$$a^{-1}da = d^2.$$

Umocněním rovnice $a^{-1}ba = b^2$ na k-tou dostaneme

$$(a^{-1}ba)(a^{-1}ba)\cdots(a^{-1}ba) = b^2b^2\cdots b^2$$

a odtud

$$a^{-1}b^ka = (b^2)^k = (b^k)^2.$$

Tvrzení lemmatu plyne z následujících výpočtů:

$$\begin{aligned} d &= ad^2a^{-1} = a(ad^2a^{-1})^2a^{-1} = a^2d^{2^2}a^{-2} = a^2(ad^2a^{-1})^{2^2}a^{-2} \\ &= a^3d^{2^3}a^{-3} = \cdots = a^md^{2^m}a^{-m}. \end{aligned} \tag{3}$$

□

Podle Malé Fermatovy věty je $2^p \equiv 2 \pmod{p}$. Následně,

$$a^{-p}da^p = d^{2^p} = d^2 = a^{-1}da. \tag{4}$$

Jelikož $\gcd(r(a), p-1) = 1$, existují celá čísla r a s taková, že

$$r \cdot r(a) + s \cdot (p-1) = 1. \tag{5}$$

Z (4) dostaneme

$$a^{-l(p-1)}da^{l(p-1)} = d$$

pro všechna $l \in \mathbb{Z}$ (viz výpočet (3)). Položením $l := s$, obdržíme

$$d = a^{-s(p-1)}da^{s(p-1)} \overset{(5)}{=} a^{rr(a)-1}da^{-rr(a)+1} = a^{-1}da = d^2,$$

což implikuje, že $d = e$. Dostáváme spor s rovností $r(d) = p$.

Druhá kategorie

Řešení problému 1 Mějme dva lineární operátory $V \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} V$ nějakého n-dimenzionálního vektorového prostoru V. Jestliže $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$, pak $\dim(\mathrm{Im}(fg)) = \dim(\mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$. V obecném případě ale platí nerovnost

$$\dim(\mathrm{Im}(fg)) \geq \dim(\mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Ker}(f))\,.$$

Z korespondence mezi lineárními operátory a maticemi dostaneme nerovnost

$$\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank} B - (n - \operatorname{rank} A)$$

pro každé dvě matice A a B. Nerovnost

$$\operatorname{rank}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \geq (\operatorname{rank}(A_1) + \ldots + \operatorname{rank}(A_k)) - (k-1)n$$

můžeme odvodit z nerovnosti

$$\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n$$

jednoduchou indukcí. V našem případě dostaneme nerovnost

$$\operatorname{rank}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \geq k(n-1) - (k-1)n = n - k\,.$$

Tudíž, jestliže $k < n$, pak $\operatorname{rank}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \geq 1$ a součin $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$ nemůže být roven nule.

Řešení problému 2

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty}\frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_k(n_1+\ldots+n_k+1)}\\
&= \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty}\frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_k}\int_0^1 x^{n_1+\ldots+n_k}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty}\frac{x^{n_1+\ldots+n_k}}{n_1 n_2 \ldots n_k}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-\log(1-x))^k\,\mathrm{d}x = [1-x=\mathrm{e}^{-u}]\\
&= \int_0^{\infty} u^k \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \Gamma(k+1) = k!
\end{aligned}$$

Řešení problému 3 Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že funkce $|f|$ nabývá maxima v bodě 1.

Nechť $p(z) = a\prod_{k=1}^{n_1}(z-c_k)$ a $q(z) = b\prod_{\ell=1}^{n_2}(z-d_\ell)$ kde $n_1 = \deg p$ a $n_2 = \deg q$. Pak

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n_1}\frac{1}{z-c_k} - \sum_{\ell=1}^{n_2}\frac{1}{z-d_\ell}\,.$$

Jelikož $|c_k| < 1$ a $|d_\ell| > 1$ pro všechna k a ℓ, máme

$$\operatorname{Re}\frac{1}{1-c_k} > \frac{1}{2}$$

a

$$\operatorname{Re}\frac{1}{1-d_k} < \frac{1}{2}.$$

Tudíž

$$\frac{|f'(1)|}{|f(1)|} \geq \operatorname{Re}\frac{f'(1)}{f(1)} > n_1\cdot\frac{1}{2} - n_2\cdot\frac{1}{2} = \frac{\deg p - \deg q}{2}$$

a

$$\max_{|z|=1}|f'(z)| \geq |f'(1)| = \frac{|f'(1)|}{|f(1)|}\cdot|f(1)| \geq \frac{\deg p - \deg q}{2}\max_{|z|=1}|f(z)|\,.$$

Řešení problému 4 Odpověď je $\Phi(p(x)) = ap(x)(bx + c)$ pro $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ a pro nějaká nenulová racionální čísla a, b a nějaké racionální c. Je jasné, že takovýto operátor zachovává ireducibilitu. Dokážeme, že každý operátor zachovávající ireducibilitu má tento tvar.

Lemma 2 Předpokládejme, že $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ jsou dva polynomy takové, že pro všechna racionální čísla c je polynom $f + cg$ ireducibilní. Pak buď $g \equiv 0$, nebo f je nekonstantní lineární polynom a g je nenulová konstanta.

Důkaz: Nechť $g(x_0) \neq 0$ pro nějaké racionální x_0. Potom pro $c = -f(x_0)/g(x_0)$ dostáváme $(f + cg)(x_0) = 0$, takže polynom $f + cg$ je dělitelný $x - x_0$. Odtud $f + cg = C(x - x_0)$ pro nějaké nenulové racionální C. Vyberme $x_1 \neq x_0$ takové, že $g(x_1) \neq 0$. Jelikož $f(x_1) + cg(x_1) = C(x_1 - x_0) \neq 0$, pak pro $c_1 = -f(x_1)/g(x_1) \neq c$ máme $f + c_1 g = C_1(x - x_1)$. Odečtením dostaneme, že $(c_1 - c)g$ je lineární, a proto g je lineární a odtud je f taky lineární. Jestliže $f(x) = ax + b$, $g(x) = a_1 x + b_1$, potom $a \neq 0$ (jestliže f je ireducibilní) a jestliže $a_1 \neq 0$, potom pro $c = -a/a_1$ je polynom $f + cg$ konstantní, a tedy není ireducibilní. Tedy $a_1 = 0$. □

Nyní označme $g_k = \Phi(x^k)$.

Lemma 3 g_0 je nenulová konstanta a g_1 je nekonstantní lineární funkce.

Důkaz: Jestliže $x + c$ je ireducibilní pro nějaké racionální c, dostaneme, že $g_1 + cg_0$ je ireducibilní pro nějaké racionální c. Z lemmatu 2 dostaneme, že buď $g_0 = 0$, nebo g_0 je konstantní a g_1 je lineární. Předpokládejme, že $g_0 = 0$. Poznamenejme, že pro nějaké racionální α můžeme najít racionální β takové, že $x^2 + \alpha x + \beta$ je ireducibilní, odtud $g_2 + \alpha g_1 = \Phi(x^2 + \alpha x + \beta)$ je ireducibilní pro nějaké racionální α. Z lemmatu 2 plyne, že g_1 je konstantní, čili není ireducibilní. Což je spor, a tedy $g_0 \neq 0$. □

Označme $g_0 = C$, $g_1(x) = Ax + B$. Uvažujme nový operátor $p(x) \mapsto C^{-1}\Phi(p(A^{-1}Cx - A^{-1}B))$. Tento operátor zachovává ireducibilitu, uvažujme ho místo Φ.

Nyní $g_0 = 1$, $g_1(x) = x$ a náš cíl je dokázat, že $g_n = x^n$ pro všechna přirozená čísla n. Použijeme indukci přes n. Předpokládejme, že $n \geq 2$ a $g_k(x) = x^k$ je již dokázáno pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Označme $h(x) = g_n(x) - x^n$ a předpokládejme, že h není identicky rovno 0. Pro libovolný normovaný ireducibilní polynom f stupně n máme $\Phi(f) = f + h$, odtud $f + h$ je také ireducibilní. Vyberme racionální x_0 tak, že $h(x_0) \neq 0$, náš cíl je najít ireducibilní f takové, že $f(x_0) = -h(x_0)$ a odtud $f + h$ nemá kořen x_0.

Je mnoho způsobů, jak to udělat. Jedním z nich je:

Eisensteinovo kritérium. Předpokládejme, že $f(x) = \frac{b_n}{c_n} x^n + \cdots + \frac{b_0}{c_0}$ $(\gcd(b_n, c_n) = 1)$ je polynom s racionálními koeficienty a p je prvočíslo takové, že b_k je dělitelné p pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$, b_n a c_n nejsou dělitelné p a b_0 není dělitelné p^2. Potom $f(x)$ je ireducibilní.

Bez újmy na obecnosti, $x_0 = 0$ (jinak označme $x - x_0$ jako novou proměnou). Potom chceme najít ireducibilní polynom $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x - h(0)$. Označme $-h(0) = u/v$ pro nesoudělná přirozená čísla v a u. Vezměme $L = 6uv$ a uvažujme prvočíselného dělitele p čísla $vL^n/u - 1$. Je zřejmé, že p nedělí $6uvL$. Pak uvažujme polynom $(x+L)^n - L^n + u/v$. Jestliže $vL^n/u - 1$ není dělitelné p^2, potom jsme podle Eisensteinova kritéria hotovi (s novou proměnou $y = x + L$). Jestliže $vL^n/u - 1$ je dělitelné p^2, potom přidáme px do našeho polynomu a jsme opět podle Eisensteinova kritéria hotovi.

Pokud není $h(x) = -x^n + \dots$, potom polynom $f + h$ není lineární a tudíž není ireducibilní. Jestliže $n \geq 3$, potom můžeme přidat px^2 nebo $2px^2$ do našeho polynomu f a dostaneme nelineární $f + h$ (ale pořád ireducibilní f). Nakonec, jestliže $n = 2$, a $h(x) = -x^2 + ax + b$, potom vybereme ireducibilní polynom ve tvaru $f(x) = x^2 - ax + c$ a dostaneme $f + h$ konstantní (není ireducibilní). Indukční krok a celý důkaz je tímto ukončen.

Opravování příkladů porotou

4. Výsledky

Níže je uvedeno pořadí 10 nejúspěšnějších studentů v každé kategorii.

První kategorie:

Pořadí	Jméno	Město	Pr. 1	Pr.2	Pr.3	Pr.4	$\sum$
1.	Mikołaj Frączyk	Krakov	10	9	10	10	39
2.	Bertram Arnold	Bonn	8	10	10	10	38
2.	Jakub Oćwieja	Varšava	10	10	8	10	38
4.	Gleb Nenashev	Petrohrad	10	7	10	10	37
5.	Malte Lackmann	Bonn	10	10	6	10	36
6.	Dániel Nagy	Budapešť	8	10	7	10	35
7.	Josef Tkadlec	Praha	10	10	10	2	32
8.	Simon Buchholz	Bonn	10	10	9	2	31
8.	Jiajun Wu	Singapur	2	9	10	10	31
10.	Mikołaj Bińkowski	Krakov	9	9	10	2	30

Druhá kategorie:

Pořadí	Jméno	Město	Pr. 1	Pr.2	Pr.3	Pr.4	$\sum$
1.	Przemysław Mazur	Krakov	10	10	9	4	33
2.	Jacek Jendrej	Varšava	10	10	10	0	30
2.	Pavlo Mishchenko	Moskva	10	10	10	0	30
2.	Vladislav Volkov	Petrohrad	10	10	2	8	30
5.	Diego Cifuentes	Bogota	10	10	3	1	24
6.	Stefan Mehner	Bonn	10	10	2	1	23
7.	Daniel Harrer	Mnichov	10	10	0	2	22
7.	Jakub Konieczny	Krakov	10	10	0	2	22
7.	László Miklós Lovász	Budapešť	10	10	0	2	22
7.	Michał Pilipczuk	Varšava	10	10	2	0	22
7.	Pavel Zatitskii	Petrohrad	10	10	2	0	22

Vítěz druhé kategorie – Przemyslaw Mazur

5. Závěr

Příklady jsou vybírány tak, aby jejich pořadí odpovídalo jejich obtížnosti. Tedy že nejlehčí je první příklad a nejtěžší čtvrtý. Z výsledků soutěže je zřejmé, že letos se toto pravidlo potvrdilo beze zbytku. V první kategorii byl nejlehčí příklad první, z něhož téměř všichni studenti získali aspoň jeden bod a nejtěžší byl příklad čtvrtý, neboť pouze 7 studentů z 66 z něj získalo plný počet bodů. V druhé kategorii byl také nejlehčí příklad první, neboť více než polovina soutěžících z něho získala plný počet bodů a nejtěžší byl příklad čtvrtý, pouze 10 studentů získalo aspoň jeden bod a žádný z nich nezískal plný počet bodů.