Alois Švec

Sur la géométrie différentielle projective des surfaces réglées

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica, Vol. 1 (1960), No. 3, 141--159

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/142123`

1961 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE — MATHEMATICA NO. 3, PAG. 141—159.

SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE PROJECTIVE DES SURFACES RÉGLÉES

K PROJEKTIVNÍ DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRII PŘÍMKOVÝCH PLOCH

ALOIS ŠVEC

Dans ce travail je complète mes recherches sur les surfaces réglées plongées dans un espace projectif à dimension impaire en étudiant leurs invariants dans tous les cas et par conséquent je résolve les problèmes d'existence des correspondances quasiasymptotiques les plus remarquables qui existent entre deux surfaces.

1. Nous envisagerons une surface réglée π

(1) $$x(u, v) = y(v) + uz(v)$$

plongée dans un espace projectif P_{2n+1} à $2n + 1$ dimensions. Nous nous bornerons ici à l'étude des surfaces qui ont l'index de développabilité maximum et qui satisfont à la rélation

(2) $$(y, z, y', z', \ldots, y^{(n)}, z^{(n)}) \neq 0.$$

Les courbes $y = y(v)$, $z = z(v)$ soient les *quasiasymptotiques* de la surface π, c'est-à-dire l'espace osculater d'ordre $n + 1$ de la courbe en question au point $x \in \pi$ soit plongée dans l'espace osculateur d'ordre n de la surface π au point x; la courbe quasiasymptotique la plus générale est alors donnée par

(3) $$x \equiv x(v) = t_1y(v) + t_2z(v); \quad t_1, t_2 = \text{const.}$$

La normalisation

(4) $$(y, z, y', z', \ldots, y^{(n)}, z^{(n)}) = \pm 1$$

faite, on obtient les *équations différentielles fondamentales de la surface* π:

(5) $$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_iy^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_iz^{(i)},$$
$$z^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} c_iy^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} d_iz^{(i)}.$$

Les suppositions faites restent satisfaites si

1. on remplace y et z par

$$\eta = \lambda y + \mu z, \quad \xi = \nu y + \varrho z; \tag{6}$$
$$\lambda\varrho - \mu\nu = \pm 1; \quad \lambda, \mu, \nu, \varrho, \ = \text{const.},$$

ou si

2. on remplace y et z par

$$Y = \varrho y, \quad Z = \varrho z \tag{7}$$

pourvu que l'on remplace simultanément v par

$$V = \int |\varrho|^{\frac{2}{n}}\, dv. \tag{8}$$

Sans restreindre la généralité on peut supposer $\varrho > 0$; dans le cas $\varrho < 0$ on peut appliquer (6) avec $\lambda = \varrho = -1$, $\mu = \nu = 0$ et alors (7) avec $|\varrho|$. Les substitutions (6) peuvent être remplacées par

$$\eta = \lambda y + \mu z, \quad \zeta = \nu y + \varrho z, \quad \lambda\varrho - \mu\nu = 1, \tag{9}$$

eventuellement par (9) et

$$\eta = y, \quad \zeta = -z. \tag{10}$$

Si j'introduis sur chaque droite $[y, z]$ les coordonées locales (t_1, t_2) par

$$x = t_1 y + t_2 z, \tag{11}$$

on doit avoir après (9)

$$x = \tau_1 y + \tau_2 \zeta = (\lambda\tau_1 + \nu\tau_2)y + (\mu\tau_1 + \varrho\tau_2)z$$

de sorte que l'on doit associer à (9) la substitution contragrédient

$$t_1 = \lambda\tau_1 + \nu\tau_2, \quad t_2 = \mu\tau_1 + \varrho\tau_2. \tag{12}$$

Aux équations (5) correspondent les équations analogues

$$\eta^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i \eta^{(i)} + \beta_i \zeta^{(i)}), \quad \zeta^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} (\gamma_i \eta^{(i)} + \delta_i \zeta^{(i)}). \tag{13}$$

Le résultat principal d'E. Čech est le suivant: *Les n formes bilinéaires*

$$f_i(t, t^*) = -b_i t_1 t_1^* + a_i t_1 t_2^* - d_i t_2 t_1^* + c_i t_2 t_2^* \tag{14}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

sont invariantes pour les substitutions (9) *et* (12). Il s'ensuite que la même propriété a lieu pour les formes

$$f_i(t) = -b_i t_1^2 + (a_i - d_i) t_1 t_2 + c_i t_2^2 \tag{15}$$

et les expressions

$$j_i = a_i + d_i. \tag{16}$$

Pour (10) on a $\lambda = 1$, $\varrho = -1$, $\mu = \nu = 0$ et on obtient

$$a_i = \alpha_i\,, \quad b_i = \beta_i\,, \quad c_i = -\gamma_i\,, \quad d_i = \delta_i$$

de sorte que l'on a

$$f_i(t, t^*) = \beta_i \tau_1 \tau_1^* - \alpha_i \tau_1 \tau_2^* + \delta_i \tau_2 \tau_1^* - \gamma_i \tau_2 \tau_2^* = -\varphi_i(\tau, \tau^*); \tag{17}$$

les équations (17) précédentes ayant lieu aussi pour (6) avec $\lambda\varrho - \mu\nu = -1$. On trouve facilement que les expressions (16) sont invariantes pour (6).

Il nous reste d'étudier les changements des formes $f_i(t)$ et des expressions j_i après les substitutions (7) + (8). On a

$$\frac{\mathrm{d}^i Y}{\mathrm{d} V^i} = \varrho^{\frac{n-2i}{n}} y^{(i)} + s_{i,i-1} y^{(i-1)} + \ldots + s_{i,0}\, y,$$

$$\frac{\mathrm{d}^i Z}{\mathrm{d} V^i} = \varrho^{\frac{n-2i}{n}} z^{(i)} + s_{i,i-1} z^{(i-1)} + \ldots + s_{i,0}\, z$$

où $s_{i,j}$ sont les fonctions en ϱ, ϱ', ... Les équations fondamentales prennent la forme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^{n+1} Y}{\mathrm{d} V^{n+1}} &= \bar{a}_0 Y + \ldots + \bar{a}_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} Y}{\mathrm{d} V^{n-1}} + \bar{b}_0 Z + \ldots + \bar{b}_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} Z}{\mathrm{d} V^{n-1}}\,, \\ \frac{\mathrm{d}^{n+1} Z}{\mathrm{d} V^{n+1}} &= \bar{c}_0 Y + \ldots + \bar{c}_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} Y}{\mathrm{d} V^{n-1}} + \bar{d}_0 Z + \ldots + \bar{d}_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} Z}{\mathrm{d} V^{n-1}}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

On trouve facilement

$$\begin{aligned} a_i &= \varrho^{2\frac{n-i+1}{n}} \bar{a}_i + r_{i+1,i}\, \bar{a}_{i+1} + \ldots + r_{n-1,i}\, \bar{a}_{n-1} - r_{n+1,i}\,, \\ b_i &= \varrho^{2\frac{n-i+1}{n}} \bar{b}_i + r_{i+1,i}\, \bar{b}_{i+1} + \ldots + r_{n-1,i}\, \bar{b}_{n-1}\,, \\ c_i &= \varrho^{2\frac{n-i+1}{n}} \bar{c}_i + r_{i+1,i}\, \bar{c}_{+1} + \ldots + r_{n-1,i}\, \bar{c}_{n-1}\,, \\ d_i &= \varrho^{2\frac{n-i+1}{n}} \bar{d}_i + r_{i+1,i}\, \bar{d}_{i+1} + \ldots + r_{n-1,i}\, \bar{d}_{n-1} - r_{n+1,i} \end{aligned} \tag{19}$$

où

$$r_{i,j} = \varrho^{\frac{n+2}{n}} s_{i,j}\,. \tag{20}$$

Les équations (19) nous donnent finalement

$$f_i(t) = \varrho^{2\frac{n-i+1}{n}} \bar{f}_i(t) + r_{i+1,i}\, \bar{f}_{i+1}(t) + \ldots + r_{n-1,i}\, \bar{f}_{n-1}(t) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{21}$$

et

$$j_i = \varrho^{2\frac{n-i+1}{n}} \bar{j}_i + r_{i+1,i}\, \bar{j}_{i+1} + \ldots + r_{n-1,i}\, \bar{j}_{n-1} - 2 r_{n+1,i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{22}$$

J'introduis la notation

(23) $$A_i = -b_i, \quad 2B_i = a_i - d_i, \quad C_i = c_i$$

de sorte que j'ai

(24) $$f_i(t) = A_i t_1^2 + 2B_i t_1 t_2 + c_i t_2^2;$$

les expressions

(25) $$\varDelta_i = B_i^2 - A_i C_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

(26) $$\Theta_{ij} = 2B_iB_j - A_iC_j - A_jC_i \quad (i > j; i = 1, \ldots, n-1; j = 0, \ldots, n-2)$$

sont invariantes après (6). En utilisant (7) + (8) on trouve

(27) $$\varDelta_i = \varrho^{4\frac{n-i+1}{n}} \overline{\varDelta}_i + \sum_{*} r_{k,i}^2 \overline{\varDelta}_k + \sum_{**} l_{st} \overline{\Theta}_{st},$$

$$\Theta_{ij} = \varrho^{2\frac{2n-i-j+2}{n}} \overline{\Theta}_{ij} + \sum_{+} k_r \overline{\varDelta}_r + \sum_{++} m_{st} \overline{\Theta}_{st}$$

où

$* = (n-1 \geq k \geq i+1)$, $** = (s > t;\ n-1 \geq s \geq i+1;\ n-1 \geq t \geq i)$;
$+ = (n-1 \geq r \geq i)$, $++ = (s > t; n-1 \geq s \geq i; n-1 \geq t \geq j; [s,t] \neq [i,j])$.

Considérons la suite

(28)
$$\begin{array}{l}
\varDelta_{n-1}, \\
\Theta_{n-1,n-2}, \quad \varDelta_{n-2}, \\
\Theta_{n-1,n-3}, \quad \Theta_{n-2,n-3}, \quad \varDelta_{n-3}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Theta_{n-1,i}, \quad \Theta_{n-2,i}, \quad \ldots, \quad \Theta_{i+1,i}, \quad \varDelta_i, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Theta_{n-1,0}, \quad \Theta_{n-2,0}, \quad \ldots\ldots\ldots; \quad \Theta_{10}, \ \varDelta_0
\end{array}$$

formée des expressions (25) + (26). Évidemment on a

$$\begin{array}{l}
\alpha)\ \varDelta_i \to \varDelta_j \Leftrightarrow i < j, \\
\beta)\ \varDelta_i \to \Theta_{rs} \Leftrightarrow i > s, \\
\gamma)\ \Theta_{kl} \to \Theta_{rs} \Leftrightarrow l > s \quad \text{ou} \quad l = s,\ k > r.
\end{array}$$

Les équations (27) peuvent alors être écrites sous la forme

(29) $$\varDelta_i = \varrho^{4\frac{n-i+1}{n}} \overline{\varDelta}_i + \sum_{\overline{\varDelta}_r \to \overline{\varDelta}_i} k_r \overline{\varDelta}_r + \sum_{\overline{\Theta}_{st} \to \overline{\varDelta}_i} l_{st} \Theta_{st},$$

$$\Theta_{ij} = \varrho^{2\frac{n-i-j+2}{n}} \overline{\Theta}_{ij} + \sum_{\overline{\varDelta}_r \to \overline{\Theta}_{ij}} k_r \overline{\varDelta}_r + \sum_{\overline{\Theta}_{st} \to \overline{\Theta}_{ij}} m_{st} \overline{\Theta}_{st}.$$

On voit facilement que *la détermination des invariants différentiels projectifs unimodulaires d'une surface réglée est équivalente au problème de trouver les invariants des formes $f_i(t)$ et des expressions j_i.*

2. Lors de l'étude des surfaces réglées dans les espaces projectifs un rôle important est joué par les formes $f_i(t)$ et par les fonctions j_i. J'ai les utilisé pour l'étudier les correspondances entre deux surfaces, voir [4], [5]. Maintenant je vais expliquer les résultats les plus importants.

Soit donnée dans P_{2n+1} une surface (1), (5) et envisagerons encore la surface

$$\bar{x}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{y}(\bar{v}) + u\bar{z}(\bar{v}), \tag{30}$$

$$\bar{y}^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i \bar{y}^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{b}_i \bar{z}^{(i)}, \tag{31}$$

$$\bar{z}^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{c}_i \bar{y}^{(i)} + \sum_{i+0}^{n-1} \bar{d}_i \bar{z}^{(i)};$$

π soit plongée dans P_{2n+1} ou dans un autre espace $\bar{P}_{2n+1}$. Soit donnée une *correspondance quasiasymptotique T* etre π et $\bar{\pi}$ qui fait correspondre projectivement les génératrices de l'une des surfaces aux génératrices de l'autre; nous supposerons que T est donné par

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}. \tag{32}$$

T est toujours la déformation projective du $n^{\text{ième}}$ ordre des deux surfaces π et $\bar{\pi}$. Même des homographies $K = K(v) : \bar{P}_{2n+1} \to P_{2n+1}$ existent qui font, pour chaque $v = v_0$, correspondre la surface $\bar{\pi}$ à la surface π de telle manière que les surfaces $K\bar{\pi}$ et π ont pour chaque (u, v_0) un contact analytique du $n^{\text{ième}}$ ordre. Les plus générales de ces homographies sont données par les équations

$$K\bar{y}^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_j y^{(i-j)}, \quad K\bar{z}^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_j z^{(i-j)} \quad (i = 0, \ldots, n) \tag{33}$$

où $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ sont arbitraires. Envisagerons le point

$$\mathscr{L} = K\bar{x}^{(n+1)} - \sum_{i+0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} x^{(i)} \tag{34}$$

et appellons la droite $[x, \mathscr{L}]$ la *droite K-linéarisante* au point x. Dans le cas où $\mathscr{L} = (.)x$ nous dirons que la droite K-linéarisante au point x est indéterminée.

L'intérprétation géométrique de la droite K-linéarisante peut être établie grâce à l'équation (34): soit γ une courbe de la surface π qui passe par le point $x(u, v)$ et soit $\bar{\gamma} \supset \bar{\pi}$ la courbe correspondante. Pour que les courbes γ et $K\bar{\gamma}$ aient un contact analytique de l'ordre $n + 1$ il faut et il suffit que la droite K-linéarisante au point x soit indéterminée. Si la droite K-linéarisante est bien déterminée et tangente en même temps aux courbes γ et $K\bar{\gamma}$, ces courbes ont un contact géométrique de l'ordre $n + 1$. Si elle n'est pas la tangente commune, elle est le lieu géométrique des points $w \neq x$ qui ont la propriété suivante: les projections des courbes γ et $K\bar{\gamma}$ du point w comme centre dans l'hyperplane quelconque de l'espace P_{2n+1} ont un contact analytique de l'ordre $n + 1$.

Nous dirons que la correspondance (32) est une *correspondance* $T_{pq}(-1 \leq p, 0 \leq q, p \leq q)$ si pour chaque $v = v_0$ il existe une homographie (33) telle que pour chaque u la droite K-linéarisante au point (u, v_0) appartient à la jonction de l'espace p-osculateur de la courbe quasiasymptotique au point $x(u, v_0)$ avec l'espace q-osculateur de la surface π au point x, c'est-à-dire qu'elle appartient à l'espace déterminé par les points

$$y, z, y', z', \ldots, y^{(p)}, z^{(p)}, y^{(p+1)} + uz^{(p+1)}, \ldots, y^{(q)} + uz^{(q)}. \tag{35}$$

Parmi les homographies (33) on peut caractériser géométriquement les *homographies locales*, voir [5],

$$K\bar{y}^{(i)} = y^{(i)}; \quad K\bar{z}^{(i)} = z^{(i)} \quad (i = 0, \ldots, n). \tag{36}$$

On définit les correspondances T°_{pq} comme un cas spécial des correspondances T_{pq} on utilisant seulement l'homographie locale (36).

Si la correspondance (32) *est du type* T_{pq}, *on a*

$$f_i(t) = \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j \bar{f}_{i+j}(t) \quad (i = n-1, n-2, \ldots, p+1), \tag{37}$$

$$\sum_{k=0}^{n-i-1} \binom{i+k}{k} \lambda_k \bar{j}_{i+k} = j_i + \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} \quad (i = n-1, n-2, \ldots, q+1); \tag{38}$$

on peut se borner aux cas $p, q \leq n-1$ et poser $\lambda_1 = 0$, $\lambda_0 = 1$.

Soit maintenant donnée la surface $\bar{\pi}$ par les formes $\bar{f}_i(t)$ et les invariants $\bar{j}_i$ et cherchons toutes les surfaces π qui sont en correspondance T_{pq} avec $\bar{\pi}$. Les fonctions $j_0, \ldots, j_{n-1}$ choisies, on trouve les coefficients $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-q}$ à l'aide du système (38) et les formes $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots, f_{n-1}$ à l'aide du système (37); dans ce dernier système figurent seulement les coefficients $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-p-2}$, c'est-à-dire que les coefficients $\lambda_{n-q+1}, \lambda_{n-q+2}, \ldots, \lambda_{n-p-2}$ sont arbitraires. Enfin les formes $f_0(t), \ldots, f_p(t)$ sont arbitraires elles aussi. *Étant donnée une surface* $\bar{\pi}$, *il existe toujours des surfaces qui sont en correspondance* T_{pq} *avec* $\bar{\pi}$ *et elles dépendent de* $n + \nu_p$ *fonctions d'une variable et dans le cas où* $q > p + 2$ *elles dépendent en outre de* $q - p - 2$ *constantes arbitraires.* Ici ν_p est le nombre d'invariants qui définissent les formes $f_0(t), \ldots, f_p(t)$, les formes $f_{p+1}(t), \ldots, f_{n-1}(t)$ étant connues.

On a

$$\bar{f}_i(t) = f_i(t) \quad (i = n-1, n-2, \ldots, p+1), \tag{39}$$

$$\bar{j}_i = j_i \quad (i = n-1, n-2, \ldots, \varrho + 1) \tag{40}$$

si et seulement si la correspondance (32) *est du type* T°_{pq}. Le problème de trouver la généralité des transformations T°_{pq} se trouve donc réduit au problème de trouver le nombre ν_p; *les transformations T°_{pq} d'une surface $\bar{\pi}$ existent et dépendent de $q + \nu_p$ fonctions d'une variable.*

Dans la suite je vais déterminer les invariants d'une surface réglée π dans tous les cas ce que nous donne la méthode d'obtenir le nombre ν_p aussi pour les cas spéciaux des surfaces réglées.

3. Il est utile d'*orienter* les surfaces réglées en question, c'est-à-dire de considérer seulement les transformations $\bar{v} = \bar{v}(v)$ de la variable v pour lesquelles $\frac{d\bar{v}}{dv} > 0.$

En cherchant les invariants d'une surface orientée π je vais faire tout d'abord une *normalisation* convenable des points analytiques $y(v)$, $z(v)$ ce que me donne l'*arc privilégé* grâce à l'équation (4). Alors les expressions j_i seront invariantes et je trouverai les invariants différentiels des formes $f_i(t)$.

Je dois m'occuper par la signification géométrique des formes $f_i(t)$ pour obtenir la clasification naturelle des surfaces réglées. J'appelle F_i la courbe $x = t_1y + t_2z$ pour laquelle $f_i(t) = 0$. Il s'ensuit de (23) que une signification géométrique a seulement une telle courbe F_i qui est en même temps F_{i+1}, F_{i+2}, $\ldots$, F_{n-1}.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace $(n + 2)$-osculateur de la courbe quasiasymptotique qui passe par le point x soit situé dans l'hyperplan osculateur de la surface au point x est: le point x est situé sur la courbe F_{n-1}. En effet, l'espace osculateur considéré est engendré par les points

$$x = t_1y + t_2z, \quad t_1y' + t_2z', \ \ldots, \ t_1y^{(n+2)} + t_2z^{(n+2)}$$

et l'hyperplan osculateur par les points

$$y, z, y', z', \ \ldots, \ y^{(n-1)}, z^{(n-1)}, t_1y^{(n)} + t_2z^{(n)}.$$

La condition considérée est exprimée par l'équation

$$(y, z, y', z', \ \ldots, \ y^{(n-1)}, z^{(n-1)}, t_1y^{(n)} + t_2z^{(n)}, t_1y^{(n+2)} + t_2z^{(n+2)}) = 0$$

ce qui donne

$$\begin{gathered}(y, z, y', z', \ \ldots, \ y^{(n-1)}, z^{(n-1)}, t_1y^{(n)} + t_2z^{(n)}, \\ (t_1a_{n-1} + t_2c_{n-1})y^{(n)} + (t_1b_{n-1} + t_2d_{n-1})z^{(n)}) = \\ = b_{n-1}t_1^2 + (d_{n-1} - a_{n-1})t_1t_2 - c_{n-1}t_2^2 = -f_{n-1}(t) = 0\end{gathered}$$

et le théorème est prouvé.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace $(2n - i + 1)$-osculateur de la courbe quasiasymptotique F_{n-1}, $\ldots$, F_{i+1} $(i \geq 1)$ soit situé dans l'hyperplan osculateur de la surface au chaque point est: la courbe quasiasymptotique est F_i. Supposons que la courbe considérée est la courbe $y = y(v)$, alors nous avons $b_{n-1} = \ldots = b_{i+1} = 0$ et

$$(41) \qquad y^{(n+1)} = a_0y + \ldots + a_{n-1}y^{(n-1)} + b_0z + \ldots + b_iz^{(i)}.$$

L'espace $(2n - i + 1)$-osculateur est déterminé par les points

$$y, y', \ldots, y^{(2n-i+1)}$$

et la condition s'exprime par l'équation

$$(y, z, y', z', \ldots, y^{(n-1)}, z^{(n-1)}, y^{(n)}, y^{(2n-i+1)}) = 0$$

ce qui donne — d'après (41) — $b_i = 0$.

Dans le cas $f_{n-1}(t) \not\equiv 0$ nous avons

$$f_{n-1}(t) = (\alpha_2 t_1 - \alpha_1 t_2)(\beta_2 t_1 - \beta_1 t_2), \tag{42}$$

toutes les autres décompositions étant données par

$$f_{n-1}(t) = (\nu\alpha_2 t_1 - \nu\alpha_1 t_2)(\nu^{-1}\beta_2 t_1 - \nu^{-1}\beta_1 t_2) \tag{43}$$

où $\nu = \nu(v) \neq 0$ est une fonction arbitraire. Si j'introduis la notation

$$\begin{aligned} (\alpha t) &= \alpha_2 t_1 - \alpha_1 t_2, & (\beta t) &= \beta_2 t_1 - \beta_1 t_2, \\ (\alpha\alpha') &= \alpha_2\alpha_1' - \alpha_1\alpha_2', & (\beta\beta') &= \beta_2\beta_1' - \beta_1\beta_2', \end{aligned} \tag{44}$$

j'ai

$$(\nu\alpha, \nu^{-1}\beta) = (\alpha\beta), \quad (\nu\alpha, (\nu\alpha)') = \nu^2(\alpha\alpha')$$

et je peux écrire

$$f_{n-1}(t) = (\alpha t)(\beta t). \tag{45}$$

La clasification des surfaces réglées est la suivante:

cas I: $\qquad (\alpha\beta) \neq 0, \quad (\alpha\alpha') \neq 0, \quad (\beta\beta') \neq 0,$

la surface possède deux courbes F_{n-1} non-quasiasymptotiques;

cas II: $\qquad (\alpha\beta) \neq 0, \quad (\alpha\alpha') \neq 0, \quad (\beta\beta') = 0,$

la surface possède une courbe quasiasymptotique F_{n-1} et une autre courbe F_{n-1} qui n'est pas quasiasymptotique;

cas III: $\qquad (\alpha\beta) \neq 0, \quad (\alpha\alpha') = 0, \quad (\beta\beta') = 0,$

III 1: la surface possède deux courbes quasiasymptotiques $F_{n-1}, F_{n-2}, \ldots, F_{i+1}$ qui ne sont pas F_i,

III 2: la surface possède deux courbes quasiasymptotiques $F_{n-1}, F_{n-2}, \ldots, F_{i+1}$ et une seule est F_i;

cas IV: $\qquad (\alpha\beta) = 0, \quad (\alpha\alpha') \neq 0 \quad$ et donc $\quad (\beta\beta') \neq 0,$

la surface possède une courbe double F_{n-1} qui n'est pas quasiasymptotique;

cas V: $\qquad (\alpha\beta) = 0, \quad (\alpha\alpha') = 0$ et donc $(\beta\beta') = 0$ mais $f_{n-1}(t) \not\equiv 0,$

V1a: la surface possède une courbe quasiasymptotique double $F_{n-1}, \ldots, F_{i+1}$ qui n'est pas F_i, V1b: la surface possède une courbe quasiasymptotique double $F_{n-1}, \ldots, F_{i+1}$ qui est une courbe F_i simple,

V2: la surface possède une courbe quasiasymptotique double $F_{n-1}, \ldots, F_0$;

cas VI: $$f_{n-1}(t) \equiv 0,$$

toutes les courbes de la surface sont F_{n-1}.

La clasification précedente est projectivement invariante. Je vais m'occuper par tous les cas.

4. Cas I. Ce cas a été étudie par E. Čech, voir [2], [3]. On a $\Delta_{n-1} \neq 0$ et la normalisation des points $y(v)$, $z(v)$ est faite par l'équation

$$\Delta_{n-1} = \operatorname{sgn} \Delta_{n-1} = \varepsilon = \pm 1 \tag{46}$$

ce que nous donne un paramètre détérminé à une constante aditive près et nommé *l'arc projectif*. Supposons que v soit l'arc projectif, alors j'introduis les formes

$$f'_{n-1}(t) = A'_{n-1}t_1^2 + 2B'_{n-1}t_1t_2 + C'_{n-1}t_2^2, \tag{47}$$

$$g_{n-1}(t) = \begin{vmatrix} At_1 + Bt_2 & Bt_1 + Ct_2 \\ A't_1 + B't_2 & B't_1 + C't_2 \end{vmatrix}$$

et les expressions

$$h = B'^2_{n-1} - A'_{n-1}C'_{n-1}, \tag{48}$$

$$k = \begin{vmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ A'_{n-1} & B'_{n-1} & C'_{n-1} \\ A''_{n-1} & B''_{n-1} & C''_{n-1} \end{vmatrix}.$$

On a $h \neq 0$ et $\varepsilon = -1$ nous donne $h > 0$. Les formes $f_{n-1}(t)$ $f'_{n-1}(t)$ et $g_{n-1}(t)$ sont linéairement indépendantes de sorte que je peux écrire

$$f_i(t) = L_i f_{n-1}(t) + M_i f'_{n-1}(t) + N_i g_{n-1}(t) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2). \tag{49}$$

Théorème I. *La surface réglée orientée* (cas I) *est univoquement déterminée par les invariants* $\varepsilon = \pm 1$, $h \neq 0$ ($h > 0$ *pour* $\varepsilon = -1$), k, $L_0, \ldots, L_{n-2}$, $M_0, \ldots, M_{n-2}$, $N_0, \ldots, N_{n-2}$, $j_0, \ldots, j_{n-1}$ *comme fonctions d'arc projectif.*

5. Cas II. On a $\Delta_{n-1} \neq 0$ et je peux normaliser par l'équation (46) ce que me donne l'arc projectif. Maintenant $h = 0$ et les formes $f_{n-1}(t)$, f'_{n-1}, $g_{n-1}(t)$ sont linéairement dépendantes et je dois chercher une autre méthode pour d'obtenir tous les invariants.

De $(\beta\beta') = 0$ j'obtiens $\beta_1 : \beta_2 =$ const., alors il existe une telle décomposition (42) que $\beta_1, \beta_2 =$ const. Après une substitution

$$\bar{t}_1 = \beta_2 t_1 - \beta_1 t_2, \quad \bar{t}_2 = \nu t_1 + \gamma t_2$$
$$(\gamma\beta_2 + \nu\beta_1 = \pm 1)$$

j'obtiens (j'écris t_i en lieu de $\bar{t}_i$)

$$f_{n-1}(t) = t_1(A_{n-1}t_1 + 2B_{n-1}t_2). \tag{50}$$

L'équation (46) est alors

$$\Delta_{n-1} = B_{n-1}^2 = \varepsilon = 1$$

et on a

(51) $$B_{n-1} = \sigma = \pm 1,$$

(52) $$f_{n-1}(t) = t_1(A_{n-1}t_1 + 2\sigma t_2).$$

La transformation (6) la plus générale qui conserve (52) est

(53) $$t_1 = \varphi\lambda\overline{t}_1, \quad t_2 = \mu\overline{t}_1 + \lambda^{-1}\overline{t}_2,$$
$$\lambda \neq 0; \quad \lambda, \mu = \text{const.}; \quad \varphi = \pm 1;$$

$\varphi = -1$ change le signe de la forme $f_{n-1}(t)$. On a

$$\varphi f_{n-1}(t) = \varphi\lambda\overline{t}_1(A_{n-1}\varphi\lambda\overline{t}_1 + 2\sigma\mu\overline{t}_1 + 2\sigma\lambda^{-1}\overline{t}_2),$$

(54) $$\overline{A}_{n-1} = \varphi\lambda^2 A_{n-1} + 2\sigma\lambda\mu$$

et

$$\overline{A}'_{n-1} = \varphi\lambda^2 A'_{n-1}, \quad \overline{A}''_{n-1} = \varphi\lambda^2 A''_{n-1}$$

de sorte que

(55) $$D = \frac{A''_{n-1}}{A'_{n-1}}$$

est l'invariant. On a $A'_{n-1} \neq 0$ parce que $A_{n-1} =$ const. nous donne $(\alpha\alpha') = 0$.

La forme $f_{n-1}(t)$ est déterminée par $\sigma = \pm 1$ et D d'une manière suffisante. En effet, soit $\overline{D} = \int D(v)\, dv$, $\widetilde{D} = \int e^{\overline{D}}\, dv$. Alors la solution générale de l'équation (55) est

$$A_{n-1} = c_1\widetilde{D} + c_2, \quad c_1 \neq 0,$$

et la forme $f_{n-1}(t)$ est

(56) $$f_{n-1}(t) = t_1((c_1\widetilde{D} + c_2)t_1 + 2\sigma t_2), \quad c_1 \neq 0.$$

Toutes les formes justement écrites sont équivalentes parce qu'il existe toujours une substitution (53) qui transforme (56) dans la forme

$$f_{n-1}(t) = t_1(\widetilde{D}t_1 + 2\sigma t_2).$$

Il suffit de choisir

$$\varphi = \operatorname{sgn} c_1, \quad \lambda^2 = c_1^{-1}\varphi, \quad \mu = -\frac{1}{2}\sigma\varphi\lambda c_2.$$

Les formes $f_{n-1}(t)$ et $f'_{n-1}(t) = A'_{n-1}t_1^2$ sont linéairement indépendantes. Soit $f_i(t)$ la première forme entre $f_{n-2}(t), \ldots, f_0(t)$ pour laquelle $f_{n-1}(t)$, $f'_{n-1}(t)$, $f_i(t)$ sont linéairement indépendantes. Les expressions

(57) $$\Delta_i = B_i^2 - A_iC_i,$$

(58) $$\Theta_1 \equiv \Theta_{n-1,i} = 2\sigma B_i - A_{n-1}C_i,$$

(59) $$\Theta_2 \equiv \Theta(f_i, f'_{n-1}) = -A'_{n-1}C_i$$

déterminent la forme $f_i(t)$: on a

$$C_i = -\frac{\Theta_2}{A'_{n-1}} \ (A'_{n-1} \neq 0), \quad B_i = \frac{\Theta_1 + A_{n-1}C_i}{2\sigma}, \quad A_i = \frac{B_i^2 - \Delta_i}{C_i}.$$

On a $C_i \neq 0$ (et $\Theta_2 \neq 0$) parce que au contraire les formes $f_{n-1}(t)$, $f'_{n-1}(t)$, $f_i(t)$ soient linéairement dépendantes. Enfin nous avons

(60) $$f_s(t) = L_s f_{n-1}(t) + M_s f'_{n-1}(t) \quad (s = n-2,\ n-3, \ldots, i+1),$$

(61) $$f_r(t) = L_r f_{n-1}(t) + M_r f'_{n-1}(t) + N_r f_i(t) \quad (r = i-1, i-2, \ldots, 0);$$

L_j, M_j, N_j sont les invariants.

Théorème II. *La surface réglée orientée* (cas II) *est univoquement déterminée par les invariants* $\sigma = \pm 1$, D, Δ_i, Θ_1, $\Theta_2 \neq 0$, $L_0, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_{n-2}$, $M_0, \ldots, M_{i-1}, M_{i+1}, \ldots, M_{n-2}$, $N_0, \ldots, N_{i-1}$, $j_0, \ldots, j_{n-1}$ *comme fonctions d'arc projectif.*

6. Cas III. On fait la normalisation comme dans le cas précedent. Alors je peux écrire après une substitution convenable

(62) $$f_{n-1}(t) = 2\sigma t_1 t_2, \quad \sigma = \pm 1$$

et les substitutions admissibles prennent la forme

(63) $$t_1 = \varphi\lambda\bar{t}_1, \quad t_2 = \lambda^{-1}\bar{t}_2;$$
$$0 \neq \lambda = \text{const.}, \quad \varphi = \pm 1.$$

Soit $f_i(t)$ la première des formes $f_{n-2}(t), \ldots, f_0(t)$ qui n'est pas le multiple de $f_{n-1}(t)$, soit p. ex. $A_i \neq 0$. Alors

$$\varphi f_i(t) = A_i\lambda^2\bar{t}_1^2 + 2B_i\varphi\bar{t}_1\bar{t}_2 + C_i\lambda^{-2}\bar{t}_2^2$$

et

(64) $$\bar{A}_i = \varphi\lambda^2 A_i.$$

L'expression

(65) $$E = \frac{A'_i}{A_i}$$

est invariante. Les autres invariants sont $\Theta_{n-1,i} = 2\sigma B_i$ (c'est-à-dire B_i est l'invariant) et Δ_i. La forme $f_i(t)$ est déterminée par les invariants E, B_i, Δ_i.

Je considère la forme

(66) $$g_{n-1,i}(t) = \begin{vmatrix} \sigma t_2 & \sigma t_1 \\ A_i t_1 + B_i t_2 & B_i t_1 + C_i t_2 \end{vmatrix} = -\sigma(A_i t_1^2 - C_i t_2^2);$$

j'ai

$$[f_{n-1}, f_i, g_{n-1.i}] = \begin{vmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ A_i & B_i & C_i \\ A_i & 0 & -C_i \end{vmatrix} = 2\sigma A_i C_i. \tag{67}$$

Je dois subdiviser le cas III:

cas III 1: $C_i \neq 0$; cas III 2: $C_i = 0$.

Pour le cas III 1 on a

$$f_s(t) = L_s f_{n-1}(t) \quad (s = n-2, \ldots, i+1), \tag{68}$$

$$f_r(t) = L_r f_{n-1}(t) + M_r f_i(t) + N_r g_{n-1.i}(t) \quad (r = i-1, \ldots, 0) \tag{69}$$

et L_j, M_j, N_j sont les invariants.

THÉORÈME III 1. *La surface réglée orientée* (cas III 1) *est univoquement déterminée par les invariants* $\sigma = \pm 1$, E, B_i, Δ_i, $L_0, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_{n-2}$, $M_0, \ldots, M_{i-1}$, $N_0, \ldots, N_{i-1}$, $j_0, \ldots, j_{n-1}$ *comme fonctions d'arc projectif.*

Pour les surfaces du type III 2 on a

$$f_i(t) = A_i t_1^2 + 2B_i t_1 t_2, \quad g_{n-1.i}(t) = -\sigma A_i t_1^2.$$

Soit $f_j(t)$ la première des formes $f_{i-1}(t), \ldots, f_0(t)$ pour laquelle les formes $f_j(t)$, $f_{n-1}(t)$, $f_i(t)$ sont linéairement indépendantes; on doit avoir $C_j \neq 0$. Les fonctions Δ_j, $\Theta_{n-1.j} = 2\sigma B_j$ et

$$\Theta \equiv \Theta(f_j, g_{n-1.i}) = \sigma A_i C_j \tag{70}$$

sont les invariants qui déterminent la forme $f_j(t)$. En effet, B_j est l'invariant et on a

$$C_j = \frac{\Theta}{\sigma A_i} (A_i \neq 0), \quad A_j = \frac{B_j^2 - \Delta_j}{C_j};$$

il est aisé de voir que l'on a $\Theta \neq 0$. Enfin on a

$$f_s(t) = L_s f_{n-1}(t) \quad (s = n-2, n-3, \ldots, i+1), \tag{71}$$

$$f_r(t) = L_r f_{n-1}(t) + M_r f_i(t) \quad (r = i-1, i-2, \ldots, j+1), \tag{72}$$

$$f_p(t) = L_p f_{n-1}(t) + M_p f_i(t) + N_p f_j(t) \quad (p = j-1, j-2, \ldots, 0) \tag{73}$$

THÉORÈME III 2. *La surface réglée orientée* (cas III 2) *est univoquement déterminée par les invariants* $\sigma = \pm 1$, E, B_i, Δ_i, $\Theta \neq 0$, B_j, Δ_j, $L_0, \ldots, L_{j-1}$, $L_{j+1}, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_{n-2}$, $M_0, \ldots, M_{j-1}$, $M_{j+1}, \ldots, M_{i-1}$, $N_0, \ldots, N_{j-1}$, $j_0, \ldots, j_{n-1}$ *comme fonctions d'arc projectif.*

7. CAS IV. Dans ce cas je peux écrire

$$f_{n-1}(t) = (\alpha t)^2 \quad \text{où} \quad (\alpha\alpha') \neq 0. \tag{74}$$

J'introduis la normalisation par l'équation

$$(\alpha\alpha') = 1, \tag{75}$$

l'arc correspondant s'appelle l'arc projectif. On a $(\alpha\alpha'') = 0$ et

$$\alpha_1'' = a\alpha_1, \quad \alpha_2'' = a\alpha_2, \tag{76}$$

a étant l'invariant qui détermine la forme $f_{n-1}(t)$ d'une manière suffisante. J'ai

$$f_{n-1}(t) = \alpha_2^2 t_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 t_1 t_2 + \alpha_1^2 t_2^2, \tag{77}$$

$$f'_{n-1}(t) = 2\alpha_2\alpha_2' t_1^2 - 2(\alpha_1'\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2')t_1 t_2 + 2\alpha_1\alpha_1' t_2^2, \tag{78}$$

le discriminant de la forme $f'_{n-1}(t)$ étant

$$(\alpha_1'\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2')^2 - 4\alpha_1\alpha_2\alpha_1'\alpha_2' = (\alpha_1'\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2')^2 = (\alpha\alpha')^2 = 1.$$

Je peux écrire $f'_{n-1}(t)$ sous la forme

$$f'_{n-1}(t) = 2(\alpha t)(\alpha' t) \tag{79}$$

et deux cas peuvent se présenter:

$$\text{IV 1: } (\alpha'\alpha'') \neq 0; \quad \text{IV 2: } (\alpha'\alpha'') = 0.$$

Ces cas correspondent aux cas I et II en substituant la forme $f_{n-1}(t)$ par la forme $f'_{n-1}(t)$. Je détermine la forme $f_{n-1}(t)$ et $f'_{n-1}(t)$ par l'invariant a et alors je peux calculer les invariants des formes $f_{n-2}(t), \ldots, f_0(t)$ comme dans les cas précedents I et II, la forme $f'_{n-1}(t)$ étant normalisée comme on le suppose pour ces cas considérés.

8. Cas V 1. Pour ce cas on a

$$f_{n-1}(t) = A_{n-1} t_1^2 \quad (A_{n-1} \neq 0); \tag{80}$$

je vais considérer deux sous-cas:

cas V 1: il existe entre les formes $f_{n-2}(t), \ldots, f_0(t)$ une forme qui n'est pas le multiple de $f_{n-1}(t)$;

cas V 2: toutes les formes $f_{n-2}(t), \ldots, f_0(t)$ sont les multiples de la forme $f_{n-1}(t)$.

Ici je vais étudier le cas V 1. Soit $f_i(t)$ la première des formes qui n'est pas le multiple de $f_{n-1}(t)$. Encore deux sous-cas peuvent se présenter:

cas V 1a: $\quad \Theta_{n-1,i} = -A_{n-1}C_i \neq 0,$

cas V 1b: $\quad \Theta_{n-1,i} = -A_{n-1}C_i = 0.$

Considérons le cas V 1a. Alors on voit facilement que $\Theta_{n-1,i}$ est la première expression dans la suite (28) qui est différente de zéro et à l'égard de (29) je peux normaliser par l'équation

$$\Theta_{n-1,i} = -A_{n-1}C_i = \varepsilon = \pm 1. \tag{81}$$

La forme $f_{n-1}(t)$ admette des substitutions

$$t_1 = \varphi\lambda\bar{t}_1, \quad t_2 = \mu\bar{t}_1 + \lambda^{-1}\bar{t}_2, \tag{82}$$
$$0 \neq \lambda,\ \mu = \text{const.},\ \varphi = \pm 1$$

de sorte que

(83) $$F = \frac{A'_{n-1}}{A_{n-1}} \quad (A_{n-1} \neq 0)$$

est l'invariant. Les autres invariants sont Δ_i,

(84) $$I = [f_{n-1}, f_i, f'_i] = \begin{vmatrix} A_{n-1} & 0 & 0 \\ A_i & B_i & C_i \\ A'_i & B'_i & C'_i \end{vmatrix} = A_{n-1}(B_iC'_i - B'_iC_i)$$

qui déterminent les formes $f_{n-1}(t)$ et $f_i(t)$. En effet, on peut choisir, pour $v = v_0$, les valeurs initiales $A_{n-1}(v_0)$, $B_i(v_0)$ des fonctions A_{n-1}, B_i. Après (82) on a

$$\varphi f_{n-1}(t) = A_{n-1}\lambda^2\overline{t}_1^2,$$

$$\varphi f_i(t) = A_i\lambda^2\overline{t}_1^2 + 2B_i\varphi\lambda\overline{t}_1(\mu\overline{t}_1 + \lambda^{-1}\overline{t}_2) + C_i(\mu\overline{t}_1 + \lambda^{-1}\overline{t}_2)$$

de sorte que l'on a

$$\overline{A}_{n-1} = \varphi\lambda^2 A_{n-1}, \quad \overline{B}_i = B_i + \varphi\mu\lambda^{-1}C_i;$$

donc on peut choisir les valeurs initiales

$$A_{n-1}(v_0) = 1, \quad B_i(v_0) = 0.$$

Il est suffisant de choisir

$$\varphi = \operatorname{sgn} A_{n-1}, \quad \lambda = |A_{n-1}|^{-\frac{1}{2}}, \quad \mu = -\varphi\lambda B_iC_i^{-1}$$

pour que l'on ait $\overline{A}_{n-1} = 1$, $B_i = 0$. Alors on a

$$C_i(v_0) = -\varepsilon, \quad A_i(v_0) = \varepsilon\Delta_i(v_0)$$

et le reste de la démonstration s'ensuit du théorème sur l'unicité des solutions des équations différentielles (83), (84).

Je considère la forme

$$g_{n-1,i}(t) = \begin{vmatrix} A_{n-1}t_1 & 0 \\ A_it_1 + B_it_2 & B_it_1 + C_it_2 \end{vmatrix} = A_{n-1}B_it_1^2 - \varepsilon t_1t_2$$

pour laquelle on a

$$[f_{n-1}, f_i, g_{n-1,i}] = \begin{vmatrix} A_{n-1} & 0 & 0 \\ A_i & B_i & C_i \\ A_{n-1}B_i & -\frac{1}{2}\varepsilon & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon A_{n-1}C_i = -\frac{1}{2}.$$

Alors

(85) $$f_s(t) = L_sf_{n-1}(t) \quad (s = n-2, n-3, \ldots, i+1),$$

(86) $$f_r(t) = L_rf_{n-1}(t) + M_rf_i(t) + N_rg_{n-1,i}(t) \quad (r = i-1, i-2, \ldots, 0);$$

L_j, M_j, N_j sont les invariants.

THÉORÈME V 1a. *La surface réglée orientée* (cas V 1a) *est univoquement dé-*

terminée par les invariants $\varepsilon = \pm 1, F, J, \Delta_i, L_0, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_{n-2}, M_0, \ldots, M_{i-1}, N_0, \ldots, N_{i-1}, j_0, \ldots, j_{n-1}$ *comme les fonctions d'arc projectif.*

Pour le cas V 1b on a $C_i = 0$ ce que donne — les formes $f_i(t)$ et $(f_{n-1}(t)$ étant linéairement indépendantes — $B_i \neq 0$ et $\Delta_i \neq 0$. Alors Δ_i est le premier membre de la suite (28) qui n'est pas égal à zéro et je peux normaliser par l'équation

$$B_i = \sigma = \pm 1; \tag{87}$$

l'arc correspondant étant l'arc projectif. Comme dans le cas V 1a l'expression (83) est un invariant, l'autre invariant étant la fonction

$$G = \frac{A_i'}{A_{n-1}}. \tag{88}$$

Les formes $f_{n-1}(t)$ et $f_i(t)$ sont suffisament déterminées par les invariants σ, F, G. En effet, soit

$$\overline{F} = \int F\,\mathrm{dv}, \quad \overline{G} = \int G e^{\overline{F}}\,\mathrm{d}v,$$

alors la solution la plus générale du système (83) + (88) est

$$A_{n-1} = c_1 e^{\overline{F}}, \quad A_i = c_1\overline{G} + c_2; \quad 0 \neq c_1, c_2 = \text{const.};$$

mais chaque deux solutions de ce type sont équivalentes à l'égard de (82): on a

$$\overline{A}_i = \varphi\lambda^2 A_i + 2\sigma\lambda\mu, \quad \overline{A}_{n-1} = \varphi\lambda^2 A_{n-1}$$

et si je choisis

$$\varphi = \operatorname{sgn} c_1, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{|c_1|}}, \quad \mu = -\frac{1}{2}\varphi\sigma\lambda c_2,$$

j'obtiens

$$\overline{A}_i = \overline{G}, \quad \overline{A}_{n-1} = e^{\overline{F}}$$

ce que prouve l'affirmation énoncée.

Les formes $f_{n-1}(t)$, $f_i(t)$, $f_j(t)$ soient linéairement indépendantes de sorte que l'on a $C_j \neq 0$. Je détermine la forme $f_j(t)$ par les invariants

$$\Theta_1 \equiv \Theta_{n-1,j} = -A_{n-1}C_j, \tag{89}$$

$$\Theta_2 \equiv \Theta_{i,j} = 2\sigma B_j - A_i C_j, \tag{90}$$

$$\Delta_j = B_j^2 - A_j C_j \tag{91}$$

d'où

$$C_j = -\frac{\Theta_1}{A_{n-1}}, \quad B_j = \frac{\Theta_2 + A_i C_j}{2\sigma}, \quad A_j = \frac{B_j^2 - \Delta_j}{C_j}.$$

Enfin on a

$$f_s(t) = L_s f_{n-1}(t) \qquad (s = n-2, n-3, \ldots, i+1), \tag{92}$$

$$f_r(t) = L_r f_{n-1}(t) + M_r f_i(t) \qquad (r = i-1, i-2, \ldots, j+1), \tag{93}$$

$$(94) \qquad f_p(t) = L_p f_{n-1}(t) + M_p f_i(t) + N_p f_j(t) \qquad (p = j-1, j-2, \ldots, 0);$$

L_k, M_k, N_k étant les invariants.

THÉORÈME V 1b. *La surface réglée orientée* (cas V 1b) *est univoquement déterminée par les invariants* $\sigma = \pm 1$, F, G, $\Theta_1 \neq 0$, Θ_2, Δ_j, $L_0, \ldots, L_{j-1}, L_{j+1}, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_{n-2}, M_0, \ldots, M_{j-1}, M_{j+1}, \ldots, M_{i-1}, N_0, \ldots, N_{j-1}, j_0, \ldots, j_{n-1}$ *comme fonctions d'arc projectif.*

9. CAS V 2. Dans ce cas toutes les formes $f_{n-2}(t), \ldots, f_0(t)$ sont les multiples de la forme $f_{n-1}(t)$. Tout d'abord je détermine le facteur ϱ de sorte que A_{n-1} soit constant et alors je régarderai seulement les transformations (7) pour lesquelles A_{n-1} reste constant, c'est-à-dire pour lesquelles $\varrho' = 0$. Donc je vais employer les transformations

$$(95) \qquad Y = cy, \quad Z = cz, \quad 0 < c = \text{const.}$$

suivi par

$$dV = c^{\frac{2}{n}}\, dv;$$

$$(96) \qquad t_1 = \varphi\lambda\bar{t}_1, \quad t_2 = \mu\bar{t}_1 + \lambda^{-1}\bar{t}_2,$$

$$0 \neq \lambda = \text{const.}, \quad \varphi = \pm 1.$$

Alors on a — d'après (95) + (96) —

$$(97) \qquad \bar{A}_i = \varphi\lambda^2 A_i^x = \varphi c^{-2\frac{n-i+1}{n}} \lambda^2 A_i.$$

Je vais demander que l'équation

$$(98) \qquad A_{n-1} = 1$$

ait lieu ce que nous donne

$$(99) \qquad \lambda = c^{\frac{2}{n}}$$

et j'obtiens

$$(100) \qquad \bar{A}_i = c^{-2\frac{n-i-1}{n}} A_i,$$

$$(101) \qquad \bar{j}_i = c^{-2\frac{n-i-1}{n}} j_i.$$

Soit A_r le premier membre de la suite $A_{n-2}, \ldots, A_0$ qui n'est pas égal à zéro, alors j'introduis l'arc projectif par l'équation

$$(102) \qquad dw = |A_r|^{\frac{1}{n-r-1}}\, dv,$$

les expressions

$$(103) \qquad \frac{d \log |A_r|}{dw},$$

(104) $$D_j = A_r^{-1}|A_j|^{\frac{n-r-1}{n-j-1}} \quad (j = r-1, \ldots, 0),$$

(105) $$i_k = A_r^{-1}|j_k|^{\frac{n-r-1}{n-k-1}} \quad (k = n-1, \ldots, 0)$$

sont les invariants.

Si $A_{n-2} = \ldots = A_0 = 0$ et is j_s est le premier membre de la suite $j_{n-1}, \ldots, j_0$ qui n'est pas égal à zéro, j'introduis l'arc projectif par l'équation

(106) $$\mathrm{d}w = |j_s|^{\frac{1}{n-s+1}} \mathrm{d}v,$$

lex expressions

(107) $$\frac{\mathrm{d} \log |j_s|}{\mathrm{d}w},$$

(108) $$i_l = j_s^{-1}|j_l|^{\frac{n-s+1}{n-l+1}} \quad (l = s-1, \ldots, 0)$$

étant les invariants.

Si $A_{n-2} = \ldots = A_0 = j_{n-1} = \ldots = j_0 = 0$, les équations différentielles de la surface sont

(109) $$y^{(n+1)} = z^{(n-1)}, \quad z^{(n+1)} = 0$$

et on trouve

(110) $$z = c_0 + c_1 v + \frac{1}{2} c_2 v^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} c_{n-1} v^{n-1} + \frac{1}{n!} c_n v^n,$$

$$y = c_{n+1} + c_{n+2} v + \frac{1}{2} c_{n+3} v^2 + \ldots + \frac{1}{n!} c_{2n+1} v^n +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} c_{n-1} v^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!} c_n v^{n+2}.$$

Si

$$y = (y_0, \ldots, y_{2n+1}), \quad z = (z_0, \ldots, z_{2n+1}),$$

alors la surface (110) est homographique à la surface dont les courbes directrices sont

(111) $$y_i = 0 \quad (0 \leq i \leq n-2),$$

$$y_{n-1} = \frac{1}{(n+1)!} v^{n+1}, \quad y_n = \frac{1}{(n+2)!} v^{n+2},$$

$$y_j = \frac{1}{(j-n-1)!} v^{j-n-1} \quad (n+1 \leq j \leq 2n+1);$$

$$z_i = \frac{1}{i!} v^i \quad (0 \leq i \leq n),$$

$$z_j = 0 \quad (n + 1 \leq j \leq 2n + 1).$$

La surface algébrique obtenue est une généralisation de la surface de Cayley.

THÉORÈME V 2. *La surface réglée orientée* (cas V 2) *est univoquement déterminée par les invariants*

a) $\operatorname{sgn} A_0, \ldots, \operatorname{sgn} A_r \neq 0$, $\operatorname{sgn} j_0, \ldots, \operatorname{sgn} j_{n-1}, \dfrac{\mathrm{d} \log |A_r|}{\mathrm{d}w}, D_0, \ldots, D_{r-1}$, $i_0, \ldots, i_{n-1}$ *comme fonctions d'arc projectif* (102); *on doit avoir* $\operatorname{sgn} D_0 = \ldots = \operatorname{sgn} D_{r-1} = \operatorname{sgn} i_0 = \ldots = \operatorname{sgn} i_{n-1} = \operatorname{sgn} A_r$; *ou*

b) $\operatorname{sgn} j_0, \ldots, \operatorname{sgn} j_{s-1}, \operatorname{sgn} j_s \neq 0, \dfrac{\mathrm{d} \log |j_s|}{\mathrm{d}w}, i_0, \ldots, i_{s-1}$ *comme fonctions d'arc projectif* (106); *on doit avoir* $\operatorname{sgn} i_0 = \ldots = \operatorname{sgn} i_{s-1} = \operatorname{sgn} j_s$; *ou*

c) *pour* $A_{n-2} = \ldots = A_0 = j_{n-1} = \ldots = j_0 = 0$ *la surface en question est homographique à la généralisation de la surface de Cayley.*

10. CAS VI. Dans le cas où $f_{n-1}(t) \equiv 0$ je vais appliquer la théorie précedente la rôle de la forme $f_{n-1}(t)$ étant jouée par la première des formes $f_i(t)$ pour laquelle $f_i(t) \neq 0$. Dans le cas

$$f_{n-1}(t) \equiv f_{n-2}(t) \equiv \ldots \equiv f_0(t) \equiv 0$$

les équations de la surface π prennent la forme

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= j_0 y + j_1 y' + \ldots + j_{n-1} y^{(n-1)}, \\ z^{(n+1)} &= j_0 z + j_1 z' + \ldots + j_{n-1} z^{(n-1)} \end{aligned} \tag{112}$$

et la surface considérée est formée par les jonctions des points des deux courbes homographiques plongées dans deux sous-espaces à n dimensions d'espace fondamental P_{2n+1}.

RESUMÉ

Ve svých pracech [4], [5] jsem studoval pomocí tzv. linearisujících transformací quasiasymptotické korespondence mezi dvěma přímkovými plochami vnořenými v projektivní prostor liché dimense. Ukázalo se, že nejdůležitější korespondence, zobecňující přirozeným způsobem projektivní deformace, úzce souvisejí s korespondencemi, zachovávajícími jisté formy a invarianty, užívané v Čechově teorii přímkových ploch, viz [2], [3]. Existenční problémy těchto korespondencí jsem tak převedl na problém nalezení úplného systému projektivních diferenciálních invariantů přímkové plochy, který E. Čech rozřešil pouze pro nejobecnější typ ploch. Výsledkem této práce jest udání takového systému invariantů pro všechny přímkové plochy s maximálním indexem rozvinutelnosti vnořené v projektivní prostor liché dimense.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Bompiani, *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi*. Rend. Circ. Matem. Palermo, XXXVII, 1914, 305—331.

[2] E. Čech, *Géométrie projective des surfaces réglées dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions*. Bull. int. de l'Acad. des Sci. des Bohême, 33, No 13, 1924.

[3] E. Čech - G. Fubini, *Geometria proiettiva differenziale*, t. II., § 112, 650—655. Bologna 1927.

[4] A. Švec, *Sur la déformation projective des surfaces réglées*, Чех. мат. журнал, 5(80) 1955, 355—361.

[5] A. Švec, *Quelques remarques au sujet de la théorie des surfaces réglées dans des espaces projectifs de dimension impaire*. Чех. мат. журнал, 10(85) 1960, 309—315.