E.G. Dyakonov

О сходимости разностных методов для некоторыцч нелинейных задач

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 15 (1974), No. 1-2, 11--15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/142317

1974 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE – MATHEMATICA ET PHYSICA NO. 1–2 PAG. 11–15

О сходимости разностных методов для некоторых нелинейных задач

Е. Г. ДЬЯКОНОВ
Московский Государственный университет, Москва

E. G. Djakonov: On the convergence of difference methods for some nonlineary problems. — This paper deals primarily with investigating convergence of difference schemes for quasilinear elliptic systems of order $2m$. Estimates of accuracy are obtained under assumption that the solution of the original problem belongs to $\overset{\circ}{W}{}_2^m \cap W_2^{m+1}$. The results are formulated on the example of von Karmans system.

1. Сравнительный анализ разностных и проекционно-разностных методов (ПРМ) может производиться на основе различных критериев, что и приводит к различным суждениям о преимуществах того или иного метода. Например, построение разностной схемы (РС) обычно требует небольшой вычислительной работы и приводит к более простым системам уравнений, чем ПРМ. Но эта простота в структуре получаемых задач оплачивается существенным утяжелением математического анализа разностных методов (за исключением ряда простых случаев) и сужением класса исходных краевых задач, для которых эти методы применимы. В частности, оценки погрешности для РС обычно проводятся в более жёстких предположениях на гладкость исходных данных и искомого решения, чем для ПРМ (см., например, [1] — [5], [7]).

Проблема построения и изучения приближённых методов «гибридного» типа, в которых бы сочетались лучшие качества разностных методов и ПРМ, имеет особый интерес в случае уравнений порядка выше второго, так как для них особенно велика разница в структуре получаемых систем уравнений.

Разностные схемы, рассматриваемые в настоящей работе, используют усреднённые значения по Стеклову исходных данных в h — окрестности узлов сетки. Это позволяет оценить близость решений полученных задач и усреднённого решения исходной задачи при предположениях того же типа, что и для ПРМ.

2. Пусть $x \equiv (x_1, x_2)$ и Ω — ограниченная область на плоскости с кусочно гладкой границей Γ, $\bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \Gamma$, $(u, v) \equiv \int_\Omega u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$, $\|u\| \equiv \|u\|_{L_2(\Omega)} \equiv (u, u)^{1/2}$, $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| \equiv \alpha_1 + \alpha_2$, $D^\alpha u \equiv D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}$, $D_r \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_r}$, $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ — пространство типа С. Л. Соболева (см., например, [5], [6]).

Пусть $f_{r,\alpha} \in L_q(\Omega)$ и ищется

$$U \equiv \{u_1, u_2\} \in W \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)\,, \tag{1}$$

обращающее следующее интегральное соотношение в тождество при любом $V \in W$:

$$a_1(\Delta u_1, \Delta v_1) + a_2(\Delta u_2, \Delta v_2) - ([u_1, u_2], v_1) + ([u_1, u_1], v_2) =$$

$$= \sum_{r=1}^{2} \sum_{|\alpha| \leq 2} (f_{r,\alpha}, D^\alpha v_r)\,, \tag{2}$$

где a_1 и a_2 — положительные константы, $\Delta \equiv D_1^2 + D_2^2$,

$$[u, v] \equiv D_1^2 u D_2^2 v + D_2^2 u D_1^2 v - 2 D_1 D_2 u D_1 D_2 v\,. \tag{3}$$

3. Пусть рассматривается последовательность прямоугольных сеток с шагами $h_r \equiv \varkappa_r h$ по x_r, $h \to 0$; $i \equiv (i_1, i_2)$ — вектор с целочисленными компонентами,

$$x_i \equiv (i_1 h_1, i_2 h_2),\ u(x_i) \equiv u_i,\ e_1 \equiv (1, 0),\ e_2 \equiv (0,1),$$

$$I_r u(x) \equiv u(x + e_r h_r),\ I_{-r} u(x) \equiv u(x - e_r h_r),$$

$$\bar{\partial}_r u \equiv \partial_{-r} u \equiv \frac{1}{h_r}(u(x) - I_{-r} u(x)),\ \partial_r u \equiv \frac{1}{h_r}(u(I_r x) - u(x)),$$

$$\Delta_r u \equiv \partial_{-r} \partial_r u,\ \Delta_h \equiv \sum_{r=1}^{2} \Delta_r\,,$$

Ω_h — множество узлов сетки x_i, принадлежащих $\bar{\Omega}$ вместе с прямоугольниками $\Pi_i \equiv \{x;\ |x_r - i_r h_r| \leq 2h_r;\ r = 1, r = 2\}$, Γ_h — множество узлов сетки, принадлежащих $\bar{\Omega}$, но не принадлежащих Ω_h,

$$\hat{f}(x) \equiv \frac{1}{h_1 h_2} \int\limits_{\xi_1 = -\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \int\limits_{\xi_2 = -\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} f(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2, \tag{4}$$

$$[u, v]' \equiv \Delta_1 u \Delta_2 v + \Delta_2 u \Delta_1 v - \partial_{-1}\partial_2 u \partial_{-1}\partial_2 v -$$

$$- \partial_1 \partial_{-2} u \partial_1 \partial_{-2} v\,. \tag{5}$$

Изучается следующая разностная схема:

$$\left.\begin{aligned} L_1(U_h) &\equiv a_1 \Delta_h^2 u_{1,h}(x_i) - [u_{1,h}, u_{2,h}]_i' = \sum_{|\alpha| \leq 2} (-1)^{|\alpha|} \bar{\partial}^\alpha \hat{f}_{1,\alpha}(x_i)\,, \\ L_2(U_h) &\equiv a_2 \Delta_h^2 u_{2,h}(x_i) + [u_{1,h}, u_{1,h}]_i' = \sum_{|\alpha| \leq 2} (-1)^{|\alpha|} \bar{\partial}^\alpha \hat{f}_{2,\alpha}(x_i) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$x_i \in \Omega_h$$

$$u_{r,h}(x_i) = 0\,, \text{ при } x_i \notin \Omega_h\,. \tag{7}$$

Лемма 1. Справедливо соотношение:

$$2[u, v]' = \partial_{-1}(\Delta_2 u \partial_1 v - \partial_1\partial_2 u \partial_2 v) + \partial_{-2}(\Delta_1 u \partial_2 v - \partial_1\partial_2 u \partial_1 v) +$$
$$+ \partial_1(\Delta_2 u \partial_{-1} v - \partial_{-1}\partial_{-2} u \partial_{-2} v) + \partial_2(\Delta_1 u \partial_{-2} v - \partial_{-1}\partial_{-2} u \partial_{-1} v)\,. \qquad (8)$$

Пусть H_h — пространство сеточных функций, определенных на всей сетке и удовлетворяющих (7),

$$(u, v)_h \equiv \sum_{i_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{+\infty} h_1 h_2 u(x_i)\, v(x_i),\ \|u\|_0^2 \equiv (u, u)_h\,; \qquad (9)$$

$$\|u\|_{L_p,h} \equiv \{h_1 h_2 \sum_i |u(x_i)|^p\}^{1/p},\ p \geq 1;\ \|u\|_m^2 \equiv \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_0^2\,; \qquad (10)$$

$$\|f_{r,\alpha}\|_*^2 \equiv h_1 h_2 \sum_{x_i} |f_{r,\alpha}(x_i)|^2\,, \qquad (11)$$

где суммирование производится по всем точкам x_i, в которых должна быть определена функция $\hat{f}_{r,\alpha}$ для того, чтобы $\partial^\alpha \hat{f}_{r,\alpha}$ была определена на Ω_h.

Лемма 2. Для любых u, v, w из H_h имеют место равенства:

$$([u, v]', u)_h = ([u, u]', v)_h\,, \qquad (12)$$

$$([u, v]', w)_h = ([u, w]', v)_h\,. \qquad (13)$$

Теорема 1. Существует по крайней мере одно решение задачи (5)—(7), и для всех решений её справедлива априорная оценка:

$$\|U_h\|_2^2 \equiv \sum_{r=1}^{2} \|u_{r,h}\|_2^2 \leq K \sum_{r=1}^{2} \sum_{|\alpha|\leq 2} \|\hat{f}_{r,\alpha}\|_*^2 \leq R\,, \qquad (14)$$

где K — некоторая константа.

Пусть $\overline{\partial^\alpha u_h}$ — кусочно постоянная функция, совпадающая с $\partial^\alpha u_h(x_i)$ в прямоугольнике $0 \leq x_1 - i_1 h_1 < h_1$, $0 \leq x_2 - i_2 h_2 < h_2$.

Теорема 2. Существует $U \equiv \{u_1, u_2\}$ — решение (1)—(3) и последовательность решений U_h задач (5)—(7) с $h \to 0$ такая, что

$$\lim_{h\to 0} \|D^\alpha u_r - \overline{\partial^\alpha u_{r,h}}\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0\,, \quad |\alpha| \leq 2\,, \qquad (15)$$

$$\lim_{h\to 0} \|D^\alpha u_r - \overline{\partial^\alpha u_{r,h}}\|_{L_4(\Omega)} = 0\,, \quad |\alpha| \leq 1\,. \qquad (16)$$

Лемма 3. Если $\|U_h\|_2 \leq R$ и R достаточно мало по сравнению с $\min(a_1, a_2)$, то при любом V_h справедливо неравенство

$$(L_1(U_h) - L_1(V_h), u_{1,h} - v_{1,h})_h + (L_2(U_h) - L_2(V_h), u_{2,h} - v_{2,h})_h \geq$$
$$\geq \sigma \|U_h - V_h\|_2^2,\ \sigma \equiv \sigma(R) > 0\,. \qquad (17)$$

Теорема 3. Пусть R таково, что при $\|U_h\|_2 \leq R$ справедливо неравенство (17) и

$$K \sum_{r=1}^{2} \sum_{|\alpha|\leq 1} \|f_{r,\alpha}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq R\,, \qquad (18)$$

где K — константа из (14).

Кроме того, пусть $f_{r,\alpha} = 0$ при $|\alpha| = 2$ и U — решение задачи (1)—(3) принадлежит пространству $W_2^3(\Omega) \times W_2^3(\Omega)$, и может быть продолжено с сохранением класса на более широкую, чем Ω область, $U_{\Omega,h}$ — вектор, составленный из усреднённых по (4) значений $u_r(x)$ $(r = 1; 2)$ в узлах Ω_h; вне Ω_h компоненты $U_{\Omega,h}$ равны нулю. Тогда U_h — решение разностной схемы единственно и

$$\|U_{\Omega,h} - U_h\|_2 = 0(h^{1/2})\,. \tag{19}$$

Аналогичные результаты установлены также, например, для следующей задачи из гидродинамики

$$\Delta^2\psi + a\,\frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(x_1, x_2)} = \sum_{|\alpha|\le 2}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha f_\alpha\,,$$

$$\psi\Big|_\Gamma = \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\Big|_\Gamma = 0$$

и для общих квазилинейных сильноэллиптических систем со слабыми нелинейностями. Для линейных задач вместо (17) можно ограничиться предположением, что $\lambda = 0$ не является собственным числом дифференциального оператора и что $h \le h_0$.

4. Рассмотрим теперь нестационарную задачу о нелинейных колебаниях, в которой ищется пара функций $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$, при $x \in \Omega$, $0 \le t \le T$ (см. [6], стр. 57) и пусть τ — шаг сетки по времени, $u_i^n \equiv u(n\tau, i_1h_1, i_2h_2)$, $\partial_0 u_i^n \equiv \frac{1}{\tau}(u_i^{n+1} - u_i^n)$, $\Delta_0 u_i^n \equiv \frac{1}{\tau^2}(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1})$

и рассматривается разностная схема

$$\Delta_0 u_{1,h,i}^n + \frac{a_1}{2}\,\Delta_h^2(u_{1,h}^{n+1} + u_{1,h}^{n-1})_i - \left[\frac{u_{1,h}^{n+1} + u_{1,h}^{n-1}}{2}, \frac{u_{2,h}^{n+1} + u_{2,h}^{n-1}}{2}\right]_i' =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le 2}(-1)^{|\alpha|}\bar\partial^\alpha \hat f_{1,\alpha,i}^n, \quad x_i \in \Omega_h\,,$$

$$\frac{a_2}{2}\Delta_h u_{2,h,i}^n + [u_{1,h}^n, u_{1,h}^n]_i' = \sum_{|\alpha|\le 2}(-1)^{|\alpha|}\bar\partial^\alpha \hat f_{2,\alpha,i}^n, \; x_i \in \Omega_h\,,$$

$$u_{r,h,i}^n = 0 \text{ при } x_i \notin \Omega_h\,, \tag{20}$$

$u_{1,h}^0$ и $u_{1,h}^1$ — определяются из начальных условий для u_1.

Теорема 4. Существует по крайней мере одно решение рассматриваемой схемы и для всех решений её справедлива априорная оценка:

$$\max_n \|\partial_0 u_{1,h}^n\|_0^2 + \max_n (\|u_{1,h}^n\|_2^2 + \|u_{2,h}^n\|_2^2) \le$$

$$\le K(T)\{\|\partial_0 u_{1,h}^0\|_0^2 + \|u_{1,h}^0\|_2^2 + \|u_{1,h}^1\|_2^2 + \tau\sum_{n=1}^{\frac{T}{\tau}-1}\sum_{|\alpha|\le 2}\|\hat f_{1,\alpha}^n\|_*^2 +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\le 2}[\|f_{2,\alpha}^0\|_*^2 + \|f_{2,\alpha}^1\|_*^2 + \tau\sum_{n=0}^{\frac{T}{\tau}-1}\|\partial_0 \hat f_{2,\alpha}^n\|_*^2]\}\,. \tag{21}$$

На основе этой априорной оценки доказана и теорема типа теоремы 2 о сходимости разностной схемы.

5. В случае, когда рассматриваются уравнения с переменными коэффициентами, разностные аппроксимации строятся обычным образом, но вместо заданных коэффициентов используются их усреднения (4).

Условия на коэффициенты допустимы различных типов; могут быть, например случаи, когда $a_{\alpha,\beta} \in L_p(\Omega)$, $f_{r,\alpha} \in L_p(\Omega)$, $p > 1$.

Теоремы с оценками погрешности типа теоремы 3 установлены и для ряда нестационарных задач $2m$ -го порядка при условиях, что нелинейность является слабой (см., например, [3], [4], [7]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] AUBIN, J. P.: Approximation of Elliptic Boundary Value Problems. New York, London, Sydney, Toronto (1970).

[2] Демьянович, Ю. К.: Об оценках скорости сходимости некоторых проекционных методов решения эллиптических уравнений. ЖВМиМФ, 8, 79–96 (1968).

[3] Дьяконов, Е. Г.: Разностные методы решения краевых задач, вып. I (стационарные задачи), М., ВЦ МГУ (1971).

[4] Дьяконов, Е. Г.: Разностные методы решения краевых задач, вып. II (нестационарные задачи), М., Изд. МГУ (1972).

[5] Ладыженская, О. А.: Смешанная задача для гиперболического уравнения М., Гостехиздат (1953).

[6] Лионс, Ж. Л.: Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. «Мир», М. (1972).

[7] Ривкинд, В. Я., Уральцева, Н. Н.: Классическая разрешимость и линейные схемы приближенного решения задач дифракции для квазилинейных уравнений параболического и эллиптического типов. В сб. «Проблемы мат. анализа», Изд-во ЛГУ, в. 3, 69–111 (1972).