Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica

Osvald Demuth

Некоторые вопросы теории конструктивных функций действительной переменной

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 19 (1978), No. 1, 61--96

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/142412

1978 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE – MATHEMATICA ET PHYSICA Vol. 19, No. 1

Некоторые вопросы теории конструктивных функций действительной переменной

O. DEMUTH

Кафедра математической информатики, математико-физический факультет, Карлов университет, Прага*

Статья поступила в редакцию 29 сентября 1976 г.

Статья принадлежит конструктивному направлению в математике. В ней исследуются вопросы, связанные с дифференцируемостью, измеримостью и интегрируемостью по Лебегу. В частности, изучаются свойства производных чисел и первой производной, приведены достаточные условия монотонности конструктивных функций действительной переменной и доказаны конструктивные аналоги теорем Г. Дарбу, Р. Бэра, Д. Ф. Егорова, А. Лебега и П. Фату.

Some questions concerning the theory of constructive functions of a real variable. — The paper belongs to the constructive direction in mathematics. Questions of differentiability, measurability and integrability in the sense of Lebesgue are examined. In particular, properties of derivates are studied, sufficient conditions for the monotony of constructive functions of a real variable are presented, and constructive analogues of theorems of G. Darboux, R. Baire, D. Th. Egoroff, H. Lebesgue and P. Fatou are proved.

Některé otázky teorie konstruktivních funkcí reálné proměnné. — Článek patří ke konstruktivnímu směru v matematice. Jsou v něm zkoumány otázky související s derivovatelností, lebesgueovskou měřitelností a integrovatelností. Zejména jsou studovány vlastnosti derivovaných čísel a první derivace a postačující podmínky monotonie konstruktivních funkcí reálné proměnné a jsou dokázány konstruktivní analogie vět G. Darbouxe, R. Baira, D. F. Jegorova, H. Lebesga a P. Fatoua.

Настоящая статья принадлежит конструктивному направлению в математике. В ней исследуются вопросы, связанные с дифференцируемостью, измеримостью и интегрируемостью по Лебегу.

В первой части, посвященной дифференцируемости и свойствам производных чисел конструктивных функций действительной переменной, исследуются в частности вопросы почти равномерной дифференцируемости и достаточные условия монотонности конструктивных функций и доказаны конструктивные аналоги теорем Дарбу и Бэра.

* 118 00 Praha 1, Malostranské nám. 2/25.

Во второй части вводятся и исследуются конструктивные аналоги измеримых почти всюду конечных функций и интегрируемых по Легегу функций. В частности, доказаны конструктивные аналоги теорем Егорова, Лебега и Фату.

В следующем мы пользуемся без дальнейших ссылок определениями и обозначениями из [8].

§ 1. Производные числа и дифференцирование

Определения. Пусть n НЧ. Тогда

1. мы посредством $^*\mathbf{D}^{[n]}$ обозначим словарное множество

$$\bigwedge S(S \in \mathbf{D}^{[n]} \vee S \doteqdot +\infty \vee S \doteqdot -\infty)\,;$$

2. для всяких слов P и R из $^*\mathbf{D}^{[n]}$

а) мы определим

$$\mathrm{P} = \mathrm{R} \rightleftharpoons (\mathrm{P} \in \mathbf{D}^{[n]} \,\&\, \mathrm{R} \in \mathbf{D}^{[n]} \,\&\, \mathrm{P} = \mathrm{R} \vee \mathrm{P} \doteqdot \mathrm{R})\,,$$

$$\mathrm{P} < \mathrm{R} \rightleftharpoons (\mathrm{P} \in \mathbf{D}^{[n]} \,\&\, \mathrm{R} \in \mathbf{D}^{[n]} \,\&\, \mathrm{P} < \mathrm{R} \vee \neg(\mathrm{P} \doteqdot \mathrm{R})\,\&$$
$$\&\,(\mathrm{P} \doteqdot -\infty \vee \mathrm{R} \doteqdot +\infty))\,,$$

$$\mathrm{P} \leqq \mathrm{R} \rightleftharpoons \neg(\mathrm{R} < \mathrm{P})\,,$$

$$-(\mathrm{P}) \rightleftharpoons \begin{cases} -\mathrm{P}\,, & \text{если } \mathrm{P} \in \mathbf{D}^{[n]} \\ -\infty\,, & \text{если } \mathrm{P} \doteqdot +\infty \\ +\infty\,, & \text{если } \mathrm{P} \doteqdot -\infty \end{cases}$$

б) мы скажем, что

выражение P + (R) осмыслено, если

$$\neg(\mathrm{P} \doteqdot +\infty \,\&\, \mathrm{R} \doteqdot -\infty \vee \mathrm{P} \doteqdot -\infty \,\&\, \mathrm{R} \doteqdot +\infty)\,,$$

выражение P − (R) осмыслено, если P + (−(R)) осмыслено,

в) если выражение P + (R) осмыслено, то мы определим

$$\mathrm{P} + (\mathrm{R}) \rightleftharpoons \begin{cases} \mathrm{P} + \mathrm{R}\,, & \text{если } \mathrm{P} \in \mathbf{D}^{[n]} \,\&\, \mathrm{R} \in \mathbf{D}^{[n]} \\ +\infty\,, & \text{если } \mathrm{P} \doteqdot +\infty \vee \mathrm{R} \doteqdot +\infty \\ -\infty\,, & \text{если } \mathrm{P} \doteqdot -\infty \vee \mathrm{R} \doteqdot -\infty \end{cases}$$

если выражение P − (R) осмыслено, то мы определим $\mathrm{P} - (\mathrm{R}) \rightleftharpoons \mathrm{P} + (-(\mathrm{R}))$.

Пусть $\mathfrak{M}$ словарное множество, $\forall S(S \in \mathfrak{M} \supset \exists n(S \in {}^*\mathbf{D}^{[n]}))$, а T слово в алфавите Ξ.

Тогда мы скажем, что T является супремумом множества $\mathfrak{M}$, и будем писать Sup (T, $\mathfrak{M}$), если выполнено

$$(\mathrm{T} \doteqdot -\infty \,\&\, (\mathfrak{M} = \varnothing \vee \forall S(S \in \mathfrak{M} \supset S \doteqdot -\infty))) \vee$$
$$\vee\, (\mathrm{T} \doteqdot +\infty \,\&\, \forall k \,\neg\neg \exists S(S \in \mathfrak{M} \,\&\, k < S)) \vee$$

$$\vee\ (\exists n(\mathrm{T}\in \mathbf{D}^{[n]})\ \&\ \forall S(S\in \mathfrak{M} \supset S \leqq \mathrm{T})\ \&$$
$$\forall k \neg\neg\exists S(S\in\mathfrak{M}\ \&\ \mathrm{T} - 2^{-k} < S)) .$$

Инфимум и предикат Inf определяются аналогично.

Лемма 1.1. Пусть n НЧ, а $\mathfrak{M}$ $\varnothing^{(n)}$-рекурсивно перечислимое словарное множество, $\mathfrak{M} \subseteq {}^*\mathbf{D}^{[n]}$. Тогда

1. $\exists^{[n+2]}T(T\in {}^*\mathbf{D}^{[n+1]}\ \&\ \mathrm{Sup}\,(T, \mathfrak{M}))$ и
2. если $\neg\neg\exists k\, \forall S(S\in\mathfrak{M} \supset S < k)$, то

$$\exists^{[n+1]}T(T\in {}^*\mathbf{D}^{[n+1]}\ \&\ \mathrm{Sup}\,(T, \mathfrak{M})) .$$

Для любого АДЧ P мы посредством h_{P} обозначим $[0]$-отображение такое, что для любого АДЧ S выполнено

$$h_{\mathrm{P}}(\mathrm{S}) \simeq \mathrm{P}\,.\,\max\,(\min\,(\mathrm{S}, 1), 0) .$$

Посредством **B** мы обозначим $\varnothing$-рекурсивное словарное множество

$$\bigwedge S(S\in {}^{\{\omega\}}\mathbf{Q}\ \&\ 1 \leqq \sigma_0(S)\ \&\ \forall i(0 \leqq i < \sigma_0(S) \supset$$
$$\supset \sigma_1(S \boxplus i) < \sigma_1(S \boxplus i + 1))) .$$

Пусть k, m, p, q и s НЧ, $k \leqq m \leqq p\ \&\ m < s$, $\mathscr{F}$ всюду определенная $[k; m]$-КФДП, $S_0 \bigtriangleup S_1$ $[m]$-сегмент, а $\mathrm{R}\in {}^*\mathbf{D}^{[q]}$.

1. Тогда мы

а) для всякого слова P, $\mathrm{P}\in\mathbf{B}$, обозначим

$$W(\mathscr{F}, \mathrm{P}, S_0 \bigtriangleup S_1) \rightleftharpoons \sum_{i=1}^{\sigma_0(\mathrm{P})} \left|\mathscr{F}(\max\,(\min\,(\sigma_1(\mathrm{P} \boxplus i), S_1), S_0)) -\right.$$
$$\left. - \mathscr{F}(\max\,(\min\,(\sigma_1(\mathrm{P} \boxplus i - 1), S_1), S_0))\right| ;$$

б) скажем, что R является вариацией $\mathscr{F}$ на сегменте $S_0 \bigtriangleup S_1$, и будем писать $\mathrm{Var}\,(\mathrm{R}, \mathscr{F}, S_0 \bigtriangleup S_1)$, если выполнено

$$\mathrm{Sup}\,(\mathrm{R}, \bigwedge T(\exists U(U\in\mathbf{B}\ \&\ T \mathrel{\dot{=}} W(\mathscr{F}, U, S_0 \bigtriangleup S_1)))) ;$$

в) скажем, что $\mathscr{F}$ является $[k; m]$-КФДП $[p]$-ограниченной вариации на $S_0 \bigtriangleup S_1$, если верно

$$\exists y^{[p]}\, \mathrm{Var}\,(y^{[p]}, \mathscr{F}, S_0 \bigtriangleup S_1) ;$$

г) скажем, что $\mathscr{F}$ является $[k; m]$-КФДП $[m]$-слабо (соотв. квазислабо) ограниченной вариации на $S_0 \bigtriangleup S_1$, если $[m]$-существует (соотв. не может не существовать) НЧ t такое, что

$$\forall T(T\in\mathbf{B} \supset W(\mathscr{F}, T, S_0 \bigtriangleup S_1) \leqq t) .$$

2. Мы заметим, что

а) $\mathscr{F}$ является $[k; m]$-КФДП квазислабо ограниченной (соотв. $[s]$-ограниченной) вариации на $S_0 \triangle S_1$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}$ является $[k; m]$-КФДП $[m + 1]$-ограниченной вариации на $S_0 \triangle S_1$;

б) если $\mathscr{F}$ является $[k; m]$-КФДП $[m]$-ограниченной (соотв. $[m + 1]$-ограниченной) вариации на $S_0 \triangle S_1$, то существуют всюду определенные неубывающие $[m]$-КФДП (соотв. $[m + 1]$-КФДП) $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_1$ такие, что

$$\forall x^{[m]}(x^{[m]} \in S_0 \triangle S_1 \supset \mathscr{F}(x^{[m]}) = \mathscr{F}_0(x^{[m]}) - \mathscr{F}_1(x^{[m]})),$$

и, следовательно, $\mathscr{F}$ является $[m]$-равномерно (соотв. $[m + 1]$-равномерно) непрерывной на $S_0 \triangle S_1$ (см. [5]).

Определения. Пусть m, n, k, l и q НЧ, $m \leqq n$, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ всюду определенные $[m; n]$-КФДП, $\forall y^{[n]}(\mathscr{G}(y^{[n]}) = -\mathscr{F}(-y^{[n]}))$, $x^{[n]}$ $[n]$-КДЧ, $\mathrm{R}_0 \triangle \mathrm{R}_1$ $[n]$-сегмент, P и S АДЧ, T слово, $\exists s(\mathrm{T} \in {}^*\mathbf{D}^{[s]})$, а $\{t_p\}_p^{[q]}$ $[q]$-последовательность НЧ. Тогда

1. мы определим $\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{R}_0 \triangle \mathrm{R}_1) \rightleftharpoons (\mathscr{F}(\mathrm{R}_1) - \mathscr{F}(\mathrm{R}_0))$;

2. посредством $\mathscr{D}(\mathscr{F}, \mathrm{P}, k, l)$ обозначим

$$\forall abcd(a < \mathrm{P} < b \,\&\, c < \mathrm{P} < d \,\&\, b - a < 2^{-l} \,\&\, d - c < 2^{-l} \supset$$

$$\supset \left|\frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|} - \frac{\Delta(\mathscr{F}, c \triangle d)}{|c \triangle d|}\right| < 2^{-k});$$

3. посредством $\mathscr{D}(\mathrm{S}, \mathscr{F}, \mathrm{P}, k, l)$ обозначим

$$\forall ab\left(a < \mathrm{P} < b \,\&\, b - a < 2^{-l} \supset \left|\frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|} - \mathrm{S}\right| < 2^{-k}\right);$$

посредством $\mathscr{D}(+\infty, \mathscr{F}, \mathrm{P}, k, l)$ обозначим

$$\forall ab\left(a < \mathrm{P} < b \,\&\, b - a < 2^{-l} \supset 2^k < \frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|}\right),$$

а посредством $\mathscr{D}(-\infty, \mathscr{F}, \mathrm{P}, k, l)$ обозначим

$$\forall ab\left(a < \mathrm{P} < b \,\&\, b - a < 2^{-l} \supset \frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|} < -2^k\right);$$

4. мы определим

$$\mathscr{D}^{[q]}(\mathscr{F}, \mathrm{P}, \{t_p\}_p^{[q]}) \rightleftharpoons \forall p \mathscr{D}(\mathscr{F}, \mathrm{P}, p, t_p),$$

$$\mathscr{D}^{[q]}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, \mathrm{P}, \{t_p\}_p^{[q]}) \rightleftharpoons \forall p \mathscr{D}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, \mathrm{P}, p, t_p),$$

$$D_{\mathscr{k}\ell}(\mathscr{F}, \mathrm{P}) \rightleftharpoons \forall p \neg\neg \exists t \mathscr{D}(\mathscr{F}, \mathrm{P}, p, t),$$

$$D^{[q]}(\mathscr{F}, \mathrm{P}) \rightleftharpoons \forall p\, \exists^{[q]} t \mathscr{D}(\mathscr{F}, \mathrm{P}, p, t),$$

$$D_{k\ell}(\mathrm{T}, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \rightleftharpoons \forall p \neg\neg \exists t \mathcal{D}(\mathrm{T}, \mathcal{F}, \mathrm{P}, p, t)\,,$$

$$D^{[q]}(\mathrm{T}, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \rightleftharpoons \forall p\, \exists^{[q]} t \mathcal{D}(\mathrm{T}, \mathcal{F}, \mathrm{P}, p, t)\,,$$

$$*D_{k\ell}(\mathcal{F}, \mathrm{P}) \rightleftharpoons \neg\neg(D_{k\ell}(+\infty, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \vee D_{k\ell}(\mathcal{F}, \mathrm{P}) \vee D_{k\ell}(-\infty, \mathcal{F}, \mathrm{P}))\,;$$

5. мы определим

$$\bar{D}_{k\ell}(\mathrm{S}, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \rightleftharpoons \Bigg(\forall p \neg\neg \exists ab \Bigg(a < \mathrm{P} < b \,\&\, b - a < 2^{-p} \,\&$$

$$\&\, \mathrm{S} - 2^{-p} < \frac{\Delta(\mathcal{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|}\Bigg) \,\&\, \forall p \neg\neg \exists t\, \forall ab \Bigg(a < \mathrm{P} < b \,\&$$

$$\&\, b - a < 2^{-t} \supset \frac{\Delta(\mathcal{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|} < \mathrm{S} + 2^{-p}\Bigg)\Bigg)\,,$$

$$\bar{D}_{k\ell}(+\infty, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \rightleftharpoons \forall p \neg\neg \exists ab \Bigg(a < \mathrm{P} < b \,\&\, b - a < 2^{-p} \,\&$$

$$\&\, 2^{p} < \frac{\Delta(\mathcal{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|}\Bigg)\,,$$

$$\bar{D}_{k\ell}(-\infty, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \rightleftharpoons D_{k\ell}(-\infty, \mathcal{F}, \mathrm{P})\,,$$

$$\underline{D}_{k\ell}(\mathrm{T}, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \rightleftharpoons \bar{D}_{k\ell}(-(\mathrm{T}), -\mathcal{F}, \mathrm{P})\,;$$

6. мы определим

$$\bar{D}^{+}_{k\ell}(\mathrm{S}, \mathcal{F}, x^{[n]}) \rightleftharpoons \Bigg(\forall p \neg\neg \exists a \Bigg(x^{[n]} < a < x^{[n]} + 2^{-p} \,\&$$

$$\&\, \mathrm{S} - 2^{-p} < \frac{\Delta(\mathcal{F}, x^{[n]} \triangle a)}{|x^{[n]} \triangle a|}\Bigg) \,\&\, \forall p \neg\neg \exists t\, \forall a \Bigg(x^{[n]} < a < x^{[n]} +$$

$$+\, 2^{-t} \supset \frac{\Delta(\mathcal{F}, x^{[n]} \triangle a)}{|x^{[n]} \triangle a|} < \mathrm{S} + 2^{-p}\Bigg)\Bigg)\,,$$

$$\bar{D}^{+}_{k\ell}(+\infty, \mathcal{F}, x^{[n]}) \rightleftharpoons \forall p \neg\neg \exists a \Bigg(x^{[n]} < a < x^{[n]} + 2^{-p} \,\&\, 2^{p} < \frac{\Delta(\mathcal{F}, x^{[n]} \triangle a)}{|x^{[n]} \triangle a|}\Bigg)\,,$$

$$\bar{D}^{+}_{k\ell}(-\infty, \mathcal{F}, x^{[n]}) \rightleftharpoons \forall p \neg\neg \exists t\, \forall a \Bigg(x^{[n]} < a < x^{[n]} +$$

$$+\, 2^{-t} \supset \frac{\Delta(\mathcal{F}, x^{[n]} \triangle a)}{|x^{[n]} \triangle a|} < -2^{p}\Bigg)\,,$$

$$\bar{D}^{-}_{k\ell}(\mathrm{T}, \mathcal{F}, x^{[n]}) \rightleftharpoons \bar{D}^{+}_{k\ell}(\mathrm{T}, \mathcal{G}, -x^{[n]})\,,$$

$$\underline{D}^{+}_{k\ell}(\mathrm{T}, \mathcal{F}, x^{[n]}) \rightleftharpoons \bar{D}^{+}_{k\ell}(-(\mathrm{T}), -\mathcal{F}, x^{[n]})\,,$$

$$\underline{D}^{-}_{k\ell}(\mathrm{T}, \mathcal{F}, x^{[n]}) \rightleftharpoons \bar{D}^{-}_{k\ell}(-(\mathrm{T}), -\mathcal{F}, x^{[n]})\,;$$

7. а) если $D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \mathrm{P})$ (соотв. $D^{[q]}(\mathscr{F}, \mathrm{P})$), то мы скажем, что $\mathscr{F}$ конечно псевдодифференцируема (соотв. конечно $[q]$-дифференцируема) в (точке) P,

б) если $D_{\ell\ell}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ (соотв. $D^{[q]}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, \mathrm{P})$), то мы скажем, что T является значением псевдопроизводной (соотв. $[q]$-производной) $[m; n]$-КФДП $\mathscr{F}$ в (точке) P,

в) если $\bar{D}_{\ell\ell}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ (соотв. $\underline{D}_{\ell\ell}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, \mathrm{P})$), то мы скажем, что T является значением верхней (соотв. нижней) псевдопроизводной $[m; n]$-КФДП $\mathscr{F}$ в (точке) P,

г) если $\bar{D}^{+}_{\ell\ell}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, x^{[n]})$ (соотв. $\bar{D}^{-}_{\ell\ell}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, x^{[n]})$, соотв. $\underline{D}^{+}_{\ell\ell}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, x^{[n]})$, соотв. $\underline{D}^{-}_{\ell\ell}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, x^{[n]})$), то мы скажем, что T является значеним правой верхней (соотв. левой верхней, соотв. правой нижней, соотв. левой нижней) псевдопроизводной $[m; n]$-КФДП $\mathscr{F}$ в (точке) $x^{[n]}$.

Лемма 1.2. Пусть n и q НЧ, $n \leqq q$, а $\mathscr{F}$ всюду определенная $[n]$-КФДП. Тогда

а) словарные множества

$$\bigwedge S(S \in \mathbf{D}^{[q]} \mathbin{\&} \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, S))$$

и

$$\bigwedge S(S \in \mathbf{D}^{[q]} \mathbin{\&} \neg \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, S))$$

являются $\varnothing^{(q+2)}$-рекурсивными и

б) словарные множества

$$\bigwedge S(S \in \mathbf{D}^{[q]} \mathbin{\&} \bar{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, S))$$

и

$$\bigwedge S(S \in \mathbf{D}^{[q]} \mathbin{\&} \neg \bar{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, S))$$

являются $\varnothing^{(q+3)}$-рекурсивными.

Лемма 1.3. Пусть n, p и q НЧ, $n \leqq q$, $\mathscr{F}$ всюду определенная $[n]$-КФДП, v $[q]$-КДЧ, P и S АДЧ, а T слово, $\exists s(\mathrm{T} \in {}^{*}\mathbf{D}^{[s]})$. Тогда

1. $$D_{\ell\ell}(\mathrm{S}, \mathscr{F}, \mathrm{P}) \supset D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \mathrm{P}),$$
$$D_{\ell\ell}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, \mathrm{P}) \supset {}^{*}D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \mathrm{P}),$$
$$D^{[q]}(\mathscr{F}, v) \supset \exists z^{[q]} D^{[q]}(z^{[q]}, \mathscr{F}, v),$$
$$D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, v) \supset \exists z^{[q+1]} D^{[q+1]}(z^{[q+1]}, \mathscr{F}, v),$$
$${}^{*}D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, v) \supset \exists^{[q+2]} U(U \in {}^{*}\mathbf{D}^{[q+1]} \mathbin{\&} D^{[q+1]}(U, \mathscr{F}, v)),$$
$$(D^{[p]}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, v) \vee D_{\ell\ell}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, v)) \supset D^{[q+1]}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, v);$$

2. $D_{\ell\ell}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, v) \equiv (\bar{D}_{\ell\ell}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, v) \,\&\, \underline{D}_{\ell\ell}(\mathrm{T}, \mathscr{F}, v))$;

3. существуют $[n+3]$-операторы типа $(\mathbf{D}^{[n]} \to {}^*\mathbf{D}^{[n+2]})$ – $\bar{D}^+[\mathscr{F}; n]$, $\bar{D}^-[\mathscr{F}; n]$, $\underline{D}^+[\mathscr{F}; n]$ и $\underline{D}^-[\mathscr{F}; n]$ такие, что для всякого $[n]$-КДЧ $x^{[n]}$ выполнено: $\bar{D}^+[\mathscr{F}; n]\,(x^{[n]})$ (соотв. $\bar{D}^-[\mathscr{F}; n]\,(x^{[n]})$, соотв. $\underline{D}^+[\mathscr{F}; n]\,(x^{[n]})$, соотв. $\underline{D}^-[\mathscr{F}; n]\,(x^{[n]})$) является значением правой верхней (соотв. левой верхней, соотв. правой нижней, соотв. левой нижней) псевдопроизводной $[n]$-КФДП $\mathscr{F}$ в (точке) $x^{[n]}$;

4. существуют $[q+3]$-операторы типа $(\mathbf{D}^{[q]} \to {}^*\mathbf{D}^{[q+2]})$ $\bar{D}[\mathscr{F}; n, q]$ и $\underline{D}[\mathscr{F}; n, q]$ такие, что для всякого $[q]$-КДЧ $x^{[q]}$ выполнено: $\bar{D}[\mathscr{F}; n, q]\,(x^{[q]})$ (соотв. $\underline{D}[\mathscr{F}; n, q]\,(x^{[q]})$) является значением верхней (соотв. нижней) псевдопроизводной $[n]$-КФДП $\mathscr{F}$ в (точке) $x^{[q]}$.

Пример 1.1. Существуют $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-функция $\mathscr{F}$ $[0]$-слабо ограниченной вариации (на $0 \triangle 1$), $[0]$-последовательности РЧ $\{a_k\}_k^{[0]}$ и $\{b_k\}_k^{[0]}$, РЧ c и d и $v \in \mathbf{D}^{[1]}$ (v равно Π_2-числу – см. [16]) такие, что

$$\forall k(\bar{D}^+_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, a_k) \equiv \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, a_k) \equiv k \in \setminus \varnothing^{(2)}),$$

$$\forall k(\bar{D}^+_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, b_k) \equiv \bar{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, b_k) \equiv k \in \setminus \varnothing^{(3)}),$$

$$\exists y^{[2]}(\bar{D}^+_{\ell\ell}(y^{[2]}, \mathscr{F}, c) \,\&\, \bar{D}_{\ell\ell}(y^{[2]}, \mathscr{F}, c) \,\&\, \neg \exists x^{[1]}(y^{[2]} = x^{[1]})),$$

$$\exists y^{[1]}(D^{[1]}(y^{[1]}, \mathscr{F}, d) \,\&\, \neg \exists x^{[0]}(y^{[1]} = x^{[0]}))$$

и

$$D_{\ell\ell}(0, \mathscr{F}, v) \,\&\, \neg D^{[1]}(0, \mathscr{F}, v).$$

Пример 1.2. Существуют $[0]$-функция $\mathscr{F}$, удовлетворяющая условию Липшица, и $[1]$-последовательность НЧ $\{t_p\}_p^{[1]}$ такие, что

1. $\neg \exists x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \,\&\, D^{[0]}(\mathscr{F}, x^{[0]}))$,

2. для всякого АДЧ Р верно $\mathscr{D}^{[1]}(\mathscr{F}, \mathrm{P}, \{t_p\}_p^{[1]})$ и, следовательно,

3. существует $[0]$-отображение $\mathscr{G}$, которое для всякого НЧ n является $[1]$-равномерно непрерывной $[0, n, \max(n, 1)]$-функцией и для любого АДЧ Р выполнено $D^{[1]}(\mathscr{G}(\mathrm{P}), \mathscr{F}, \mathrm{P})$.

Лемма 1.4. Пусть n и q НЧ, $n \leqq q$, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ всюду определенные $[n]$-КФДП, v $[q]$-КДЧ, а w $[n]$-КДЧ. Тогда

1. $\underline{D}[\mathscr{F}; n, q]\,(v) = -(\bar{D}[-\mathscr{F}; n, q]\,(v))$,

$$\underline{D}[\mathscr{F}; n, q]\,(v) \leqq \bar{D}[\mathscr{F}; n, q]\,(v),$$

$$ {}^*D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, v) \equiv D_{\ell\ell}(\underline{D}[\mathscr{F}; n, q]\,(v), \mathscr{F}, v) \equiv$$

$$\equiv (\underline{D}[\mathscr{F}; n, q]\,(v) = \bar{D}[\mathscr{F}; n, q]\,(v));$$

2. если соответствующее выражение осмыслено, то выполнено

$$\underline{D}[\mathscr{F}; n, q](v) + (\underline{D}[\mathscr{G}; n, q](v)) \leqq \underline{D}[\mathscr{F} + \mathscr{G}; n, q](v),$$

$$\underline{D}[\mathscr{F} + \mathscr{G}; n, q](v) \leqq \underline{D}[\mathscr{F}; n, q](v) + (\bar{D}[\mathscr{G}; n, q](v)),$$

$$\underline{D}[\mathscr{F}; n, q](v) + (\bar{D}[\mathscr{G}; n, q](v)) \leqq \bar{D}[\mathscr{F} + \mathscr{G}; n, q](v),$$

$$\bar{D}[\mathscr{F} + \mathscr{G}; n, q](v) \leqq \bar{D}[\mathscr{F}; n, q](v) + (\bar{D}[\mathscr{G}; n, q](v));$$

3. $\underline{D}[\mathscr{F}; n, n](w) = \min(\underline{D}^{+}[\mathscr{F}; n](w), \underline{D}^{-}[\mathscr{F}; n](w)),$

$$\bar{D}[\mathscr{F}; n, n](w) = \max(\bar{D}^{+}[\mathscr{F}; n](w), \bar{D}^{-}[\mathscr{F}; n](w)).$$

Теорема 1.1. Пусть $\mathscr{F}$ всюду определенная [0]-КФДП, а S [0]-сегмент, такие, что $\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in (\mathrm{S})^0 \supset {}^*D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, x^{[0]}))$. Тогда

1. $\forall p\, \exists x^{[0]} y^{[0]} \left(x^{[0]} \in (\mathrm{S})^0 \,\&\, D_{\ell\ell}(y^{[0]}, \mathscr{F}, x^{[0]}) \,\&\, \left| \dfrac{\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{S})}{|\mathrm{S}|} - y^{[0]} \right| < 2^{-p} \right),$

2. $\exists^{[2]} x^{[0]} \left(x^{[0]} \in (\mathrm{S})^0 \,\&\, D_{\ell\ell} \left(\dfrac{\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{S})}{|\mathrm{S}|}, \mathscr{F}, x^{[0]} \right) \right)$

и, следовательно,

3. если

$v \in {}^*\mathbf{D}^{[1]} \,\&\, w \in {}^*\mathbf{D}^{[1]} \,\&\, D_{\ell\ell}(v, \mathscr{F}, \text{Эл}(\mathrm{S})) \,\&\, D_{\ell\ell}(w, \mathscr{F}, \text{Эп}(\mathrm{S}))$, то

$$\forall y^{[0]}(\min(v, w) < y^{[0]} < \max(v, w) \supset$$
$$\supset \exists^{[2]} x^{[0]}(x^{[0]} \in (\mathrm{S})^0 \,\&\, D_{\ell\ell}(y^{[0]}, \mathscr{F}, x^{[0]})))$$

(теорема Дарбу).

Доказательство. а) Ввиду [0]-непрерывности $\mathscr{F}$ (см. теорему 4.1 из [8]) для всякого НЧ q не может не существовать и, следовательно, [2]-существует [0]-сегмент T такой, что

$$\mathrm{T} \subseteq (\mathrm{S})^0 \,\&\, |\mathrm{T}| < 2^{-q} \,\&\, \frac{\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{T})}{|\mathrm{T}|} = \frac{\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{S})}{|\mathrm{S}|}.$$

Таким образом, для любых НЧ q и s [0]-существует рациональный сегмент $a \vartriangle b$, для которого верно

$$a \vartriangle b \subseteq (\mathrm{S})^0 \,\&\, |a \vartriangle b| < 2^{-q} \,\&\, \left| \frac{\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{S})}{|\mathrm{S}|} - \frac{\Delta(\mathscr{F}, a \vartriangle b)}{|a \vartriangle b|} \right| < 2^{-s}.$$

Из сказанного непосредственно следует верность 1.

б) Мы допустим, что

$$\neg \exists x^{[0]} \left(x^{[0]} \in (\mathrm{S})^0 \,\&\, D_{\ell\ell} \left(\frac{\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{S})}{|\mathrm{S}|}, \mathscr{F}, x^{[0]} \right) \right). \tag{1}$$

Тогда ввиду а) для любого НЧ q [0]-существуют рациональные сегменты $a \triangle b$, $c_0 \triangle d_0$ и $c_1 \triangle d_1$ такие, что

$$c_0 \triangle d_0 \subseteq a \bigtriangledown b \,\&\, c_1 \triangle d_1 \subseteq a \bigtriangledown b \,\&\, |c_0 \triangle d_0| = |c_1 \triangle d_1| \,\&\, |a \triangle b| < 2^{-q} \,\&$$

$$\& \, a \triangle b \subseteq (\mathrm{S})^0 \,\&\, \left| \frac{\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{S})}{|\mathrm{S}|} - \frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|} \right| < 2^{-q} \,\&\, \frac{\Delta(\mathscr{F}, c_0 \triangle d_0)}{|c_0 \triangle d_0|} <$$

$$< \frac{\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{S})}{|\mathrm{S}|} < \frac{\Delta(\mathscr{F}, c_1 \triangle d_1)}{|c_1 \triangle d_1|},$$

и, следовательно, не может не существовать [0]-сегмент T такой, что

$$|\mathrm{T}| = |c_0 \triangle d_0| \,\&\, \mathrm{T} \subseteq a \bigtriangledown b \,\&\, \frac{\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{T})}{|\mathrm{T}|} = \frac{\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{S})}{|\mathrm{S}|},$$

и мы можем начатый процесс построения продолжить.

Таким образом, существует [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из $(\mathrm{S})^0$ такое, что $D_{\ell\ell}(\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{S})/|\mathrm{S}|, \mathscr{F}, x^{[0]})$, и мы, предположив (1), получили противоречие.

Итак, (1) неверно и мы на основании леммы 1.3 и результатов § 5 из [8] получаем 2. Часть 3. утверждения является ввиду [0]-непрерывности $\mathscr{F}$ следствием 2.

Пример 1.3. Существуют [0]-последовательности всюду определенных [0]-равномерно непрерывных [0]-КФДП $\{\mathscr{F}_m\}_m^{[0]}$ и $\{\mathscr{G}_m\}_m^{[0]}$ такие, что $\forall m(\mathscr{F}_m(0) = \mathscr{F}_m(1) = 0 \,\&\, \forall x^{[0]}\, D^{[0]}(\mathscr{G}_m(x^{[0]}), \mathscr{F}_m, x^{[0]}))$, и вместе с тем выполнено

$$\neg \forall m\, \exists^{[1]} x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \,\&\, D_{\ell\ell}(0, \mathscr{F}_m, x^{[0]}))\,.$$

Определение. Пусть n и t НЧ, а $\mathscr{F}$ $[n]$-функция. Тогда мы скажем, что $\mathscr{F}$ $[t]$-почти равномерно $[t]$-дифференцируема, и будем писать $\text{Д}^{[t]}(\mathscr{F})$, если существуют $[t]$-последовательность $S_\sigma^{[t]}$-множеств $\{\mathfrak{H}_k\}_k^{[t]}$ и $[t]$-последовательность $[t]$-последовательностей НЧ $\{\{l_{k,p}\}_p^{[t]}\}_k^{[t]}$ такие, что для всякого НЧ k мера $\mathfrak{H}_k$ меньше чем 2^{-k} и для любого $[t]$-КДЧ $x^{[t]}$ выполнено

$$\neg(x^{[t]} \in \mathfrak{H}_k) \supset \mathscr{D}^{[t]}(\mathscr{F}, x^{[t]}, \{l_{k,p}\}_p^{[t]})\,.$$

Ясно, что верно следующее утверждение.

Лемма 1.5. Пусть n и t НЧ, а $\mathscr{F}$ $[n]$-функция такая, что $\text{Д}^{[t]}(\mathscr{F})$. Тогда выполнено $\text{Д}^{[t+1]}(\mathscr{F})$ и в случае, что $t \leqq n$, $\mathscr{F}$ является $[n]$-измеримой (см. § 2).

Пример 1.4. Существуют [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$, [0]-измеримая (см. § 2) [0]-функция $\mathscr{G}_0$ и [1]-функция $\mathscr{G}_1$ такие, что

$$\forall x^{[0]} D^{[0]}(\mathscr{G}_0(x^{[0]}), \mathscr{F}, x^{[0]}) \,\&\, \forall x^{[1]} D^{[1]}(\mathscr{G}_1(x^{[1]}), \mathscr{F}, x^{[1]}),$$

и вместе с тем $\neg\,\text{Д}^{[1]}(\mathscr{F})$.

На основании теоремы 7 из [16] и лемм 3 и 4 из [17] мы получаем следующее утверждение.

Теорема 1.2. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция. Тогда существует [1]-последовательность $S_\sigma^{[1]}$-множеств $\{\mathfrak{H}_k\}_k^{[1]}$ такая, что для любого НЧ k мера $\mathfrak{H}_k$ меньше чем 2^{-k} и для всякого АДЧ Р выполнено

$$\neg(\mathrm{P} \in \mathfrak{H}_k) \supset \neg D_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, \mathrm{P}) \,\&\, \neg D_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, \mathrm{P}) .$$

Лемма 1.6. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in \mathbf{M}$ (см. [10]), $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) > 0$, $\mathfrak{H}_0$ $S_\sigma^{[0]}$-множество меры меньшей чем $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n)$, а $\{v_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-КДЧ. Тогда существует [0]-КДЧ $y^{[0]}$ такое, что

$$0 < y^{[0]} < 1 \,\&\, y^{[0]} \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \,\&\, \neg(y^{[0]} \in \mathfrak{H}_0) \,\&\, \neg\exists k(y^{[0]} = v_k) . \tag{2}$$

Доказательство. Согласно лемме 1, теореме 5 и замечанию 1 из [10] существует $S_\sigma^{[0]}$-множество $\mathfrak{H}$ меры меньшей чем 1 и такое, что

$$\mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H} \,\&\, \forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \,\&\, \neg(x^{[0]} \in \mathfrak{H}) \supset$$
$$\supset x^{[0]} \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \,\&\, \neg\exists k(x^{[0]} = v_k)) . \tag{3}$$

Способом, описанным в доказательстве теоремы 2.4 из [6], можно построить [0]-КДЧ $y^{[0]}$, для которого выполнено $0 < y^{[0]} < 1 \,\&\, \neg(y^{[0]} \in \mathfrak{H})$ и, следовательно, ввиду (3) верно (2).

Следствие. Пусть $a \triangle b$ рациональный сегмент, $\{\mathfrak{H}_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность $S_\sigma^{[0]}$-множеств, содержащихся в $a \triangle b$, $\{w_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-КДЧ, w положительное [0]-КДЧ, а $\mathfrak{H}$ $S_\sigma^{[0]}$-множество меры меньшей чем w, такие, что $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{[0]} w$ и для всякого НЧ n верно $\mathfrak{H}_{n+1} \subseteq \mathfrak{H}_n$ и w_n мера $\mathfrak{H}_n$. Тогда существует [0]-КДЧ $y^{[0]}$ такое, что

$$a < y^{[0]} < b \,\&\, \forall n(y^{[0]} \in \mathfrak{H}_n) \,\&\, \neg(y^{[0]} \in \mathfrak{H})$$

и $y^{[0]}$ не равно крайней точке ни одного сегмента [0]-последовательности $\mathfrak{H}_n$, $0 \leqq n$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что $a = 0 \,\&\, b = 1$. Тогда ввиду леммы 3 и следствия теоремы 3 из [10] доказуемое утверждение является непосредственным следствием предыдущей леммы.

Исходя от этого следствия и того, что для любых НЧ n и монотонной ограниченной [n]-последовательности [n]-КДЧ $\{v_k\}_k^{[n]}$ верно

$$\exists y^{[n+1]}\big(v_k \xrightarrow[k\to\infty]{[n+1]} y^{[n+1]}\big) ,$$

легко доказать следующее утверждение.

Теорема 1.3. Пусть $a \triangle b$ рациональный сегмент, а $\mathbf{N}$ последовательность $\varnothing$-рекурсивно перечислимых множеств неперекрывающихся [0]-сегментов, содержащихся в $a \triangle b$, такая, что

$$\forall nk(c_{\mathbf{z}}(k) \in \tilde{\mathbf{N}}_{n+1\square} \supset \neg\neg\exists l(c_{\mathbf{z}}(k) \subseteq \bigcup_{\substack{0 \leqq m \leqq l \\ c_{\mathbf{z}}(m) \in \tilde{\mathbf{N}}_{n\square}}} c_{\mathbf{z}}(m)))\,.$$

Тогда, если для почти всех [2]-КДЧ $x^{[2]}$ верно

$$\neg\forall n\ \neg\neg\exists k(c_{\mathbf{z}}(k) \in \tilde{\mathbf{N}}_{n\square}\ \&\ x^{[2]} \in c_{\mathbf{z}}(k))\,,$$

то выполнено

$$\forall p\ \exists^{[1]} n\ \forall l(\sum_{\substack{0 \leqq k \leqq l \\ c_{\mathbf{z}}(k) \in \tilde{\mathbf{N}}_{n\square}}} |c_{\mathbf{z}}(k)| < 2^{-p})$$

и, следовательно, для почти всех [1]-КДЧ $x^{[1]}$ имеет место

$$\neg\forall n\ \neg\neg\exists k(c_{\mathbf{z}}(k) \in \tilde{\mathbf{N}}_{n\square}\ \&\ x^{[1]} \in c_{\mathbf{z}}(k))\,.$$

На основании релятивизации леммы 6 из [16] и замечания 5.6 из [8] легко доказать следующее утверждение.

Лемма 1.7. Пусть $\mathbf{N}$ последовательность неинфинитных $\varnothing$-рекурсивно перечислимых множеств неперекрывающихся [0]-сегментов такая, что

$$\forall nk(c_{\mathbf{z}}(k) \in \tilde{\mathbf{N}}_{n+1\square} \supset \neg\neg\exists l(c_{\mathbf{z}}(l) \in \tilde{\mathbf{N}}_{n\square}\ \&\ c_{\mathbf{z}}(k) \subseteq c_{\mathbf{z}}(l)))\,.$$

Тогда

$$(\neg\exists y^{[2]}\ \forall n\ \neg\neg\exists k(c_{\mathbf{z}}(k) \in \tilde{\mathbf{N}}_{n\square}\ \&\ y^{[2]} \in c_{\mathbf{z}}(k)) \supset \exists^{[1]} n(\tilde{\mathbf{N}}_{n\square} = \varnothing))\,.$$

Замечание 1.1. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция. Мы построим [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{\delta_k\}_k^{[0]}$ такую, что для всякого НЧ k верно

$$2^{-k-1} < \delta_k < 2^{-k}\ \&\ \neg\exists labcd \Bigg(0 < l\ \&\ a < b\ \&$$
$$\&\ c < d\ \& \left|\frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|} - \frac{\Delta(\mathscr{F}, c \triangle d)}{|c \triangle d|}\right| = l \,.\, \delta_k\Bigg).$$

Мы определим

$$\mathbf{N}_0 \rightleftharpoons \Lambda S \Bigg(\exists knmiab \Bigg((S \mp k \,\square\, n \,\square\, a \triangle b)\ \&\ n \leqq m\ \&\ (1 \leqq i \leqq 2^m\ \&$$
$$\&\ a \triangle b \subseteq \frac{i-1}{2^m} \triangle \frac{i}{2^m}\ \& \left|\frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|} - 2^m \,.\, \Delta\left(\mathscr{F}, \frac{i-1}{2^m} \triangle \frac{i}{2^m}\right)\right| > \delta_k \vee$$

$$\vee\ 0 \leqq i \leqq 2^m \,\&\, a \triangle b \subseteq \left(\frac{i}{2^m} - \frac{1}{2^{m+1}}\right) \triangle \left(\frac{i}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}\right) \&$$

$$\& \left|\frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|} - 2^m \cdot \Delta\left(\mathscr{F}, \left(\frac{i}{2^m} - \frac{1}{2^{m+1}}\right) \triangle \left(\frac{i}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}\right)\right)\right| > \delta_k\Big)\Big)\Big).$$

Тогда, очевидно, для всяких НЧ n и k — $(\widetilde{\mathrm{N}_0})_{k\square n\square}$ $\varnothing$-рекурсивно перечислимое множество рациональных сегментов, содержащихся в $(-1) \triangle 2$, и выполнено

$$\forall l(\mathrm{c}_{\Xi}(l) \in (\widetilde{\mathrm{N}_0})_{k\square n+1\square} \supset \mathrm{c}_{\Xi}(l) \in (\widetilde{\mathrm{N}_0})_{k\square n\square}).$$

Мы построим словарное множество N такое, что для всяких НЧ k и n — $\tilde{\mathrm{N}}_{k\square n\square}$ $\varnothing$-рекурсивно перечислимое множество неперекрывающихся рациональных сегментов такое, что

$$\forall l(\mathrm{c}_{\Xi}(l) \in \tilde{\mathrm{N}}_{k\square n\square} \supset \exists p(\mathrm{c}_{\Xi}(p) \in (\widetilde{\mathrm{N}_0})_{k\square n\square} \,\&\, \mathrm{c}_{\Xi}(l) \subseteq \mathrm{c}_{\Xi}(p)))$$

и

$$\forall l(\mathrm{c}_{\Xi}(l) \in (\widetilde{\mathrm{N}_0})_{k\square n\square} \supset \exists q(\mathrm{c}_{\Xi}(l) \subseteq \bigcup_{\substack{0 \leqq p \leqq q \\ \mathrm{c}_{\Xi}(p) \in \tilde{\mathrm{N}}_{k\square n\square}}} \mathrm{c}_{\Xi}(p))).$$

Тогда для всякого АДЧ P выполнено

$$\neg D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \mathrm{P}) \equiv \neg\neg\exists k\, \forall m\, \neg\neg\exists abcd \Big(a < \mathrm{P} < b \,\&\, c < \mathrm{P} < d \,\&$$

$$\& \, b - a < 2^{-m} \,\&\, d - c < 2^{-m} \,\&\, \left|\frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|} - \frac{\Delta(\mathscr{F}, c \triangle d)}{|c \triangle d|}\right| > 2\delta_k\Big) \equiv$$

$$\equiv \neg\neg\exists k\, \forall n\, \neg\neg\exists l(\mathrm{c}_{\Xi}(l) \in \tilde{\mathrm{N}}_{k\square n\square} \,\&\, \mathrm{P} \in \mathrm{c}_{\Xi}(l))$$

и, следовательно,

$$D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \mathrm{P}) \equiv \forall k\, \neg\neg\exists n\, \forall l(\mathrm{c}_{\Xi}(l) \in \tilde{\mathrm{N}}_{k\square n\square} \supset \neg(\mathrm{P} \in \mathrm{c}_{\Xi}(l))).$$

Мы построим $[0]$-последовательность $S_\sigma^{[0]}$-множеств $\{\{\mathrm{H}_{t,s}\}_s^{[0]}\}_t^{[0]}$ такую, что для всякого НЧ t мера $\{\mathrm{H}_{t,s}\}_s^{[0]}$ меньше чем 2^{-t-1} и выполнено

$$\forall ni\left(0 \leqq i \leqq 2^{n+1} \supset \exists p\left(\left(\frac{i}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{t+2n+5}}\right) \triangle \left(\frac{i}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{t+2n+5}}\right) \subseteq \bigcup_{0 \leqq s \leqq p} \mathrm{H}_{t,s}\right)\right).$$

Пусть k, n и t НЧ и P АДЧ такие, что

$$\neg(\mathrm{P} \in \{\mathrm{H}_{t,s}\}_s^{[0]}) \,\&\, \neg\exists l(\mathrm{c}_{\Xi}(l) \in \tilde{\mathrm{N}}_{k\square n\square} \,\&\, \mathrm{P} \in \mathrm{c}_{\Xi}(l)),$$

а $a \triangle b$ и $c \triangle d$ рациональные сегменты, для которых выполнено $a < \mathrm{P} < b \,\&$ $\& \, c < \mathrm{P} < d \,\&\, \max(b - a, d - c) < 2^{-t-2n-5}$. Тогда, очевидно, верно

$$\left|\frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|} - \frac{\Delta(\mathscr{F}, c \triangle d)}{|c \triangle d|}\right| < 2\delta_k.$$

Мы на основании релятивизации результатов из [10] получаем:

1. Существуют [2]-последовательность $S_\sigma^{[2]}$-множеств $\{\mathfrak{L}_t\}_t^{[2]}$ и [2]-последовательность [2]-последовательностей НЧ $\{\{n_{t,k}\}_k^{[2]}\}_t^{[2]}$ такие, что для всяких НЧ t, k и n и АДЧ Р мера $\mathfrak{L}_t$ меньше чем 2^{-t-1} и верно

$$\neg(\mathrm{P} \in \mathfrak{L}_t) \,\&\, n_{t,k} \leqq n \supset (\neg\neg\exists l(\mathrm{c}_{\mathbf{z}}(l) \in \tilde{\mathrm{N}}_{k\square n\square} \,\&\, \mathrm{P} \in \mathrm{c}_{\mathbf{z}}(l)) \equiv$$
$$\equiv \neg\neg\exists l(\mathrm{c}_{\mathbf{z}}(l) \in \tilde{\mathrm{N}}_{k\square n_{t,k}\square} \,\&\, \mathrm{P} \in \mathrm{c}_{\mathbf{z}}(l)))\,.$$

2. Для почти всех [1]-КДЧ $x^{[1]}$ верно

$$\forall kn\exists^{[1]}m(m = 0 \equiv \neg\neg\exists l(\mathrm{c}_{\mathbf{z}}(l) \in \tilde{\mathrm{N}}_{k\square n\square} \,\&\, x^{[1]} \in \mathrm{c}_{\mathbf{z}}(l)))\,.$$

На основании этого замечания, теорем 1.2 и 1.3 и леммы 1.5 мы получаем следующие результаты.

Теорема 1.4. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция. Тогда существуют [2]-последовательность $S_\sigma^{[2]}$-множеств $\{\mathfrak{H}_t\}_t^{[2]}$ и [2]-последовательность [2]-последовательностей НЧ $\{\{q_{t,p}\}_p^{[2]}\}_t^{[2]}$ такие, что для любых НЧ t и АДЧ Р выполнено: мера $\mathfrak{H}_t$ меньше чем 2^{-t} и $D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, \mathrm{P}) \,\&\, \neg(\mathrm{P} \in \mathfrak{H}_t) \supset \mathscr{D}^{[2]}(\mathscr{F}, \mathrm{P}, \{q_{t,p}\}_p^{[2]})$.

Теорема 1.5. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция. Тогда для почти всех [1]-КДЧ $x^{[1]}$ верно

$$^*D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, x^{[1]}) \supset \exists y^{[1]} D^{[1]}(y^{[1]}, \mathscr{F}, x^{[1]})\,.$$

Теорема 1.6. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция. Тогда верно $Д^{[1]}(\mathscr{F})$ в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий:

а) $Д^{[2]}(\mathscr{F})$,

б) для почти всех [2]-КДЧ $x^{[2]}$ верно $^*D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, x^{[2]})$,

в) для почти всех [2]-КДЧ $x^{[2]}$ $\mathscr{F}$ конечно псевдодифференцируема в точке $x^{[2]}$.

Мы заметим, что ввиду леммы 1.7 верно следующее утверждение.

Теорема 1.7. Пусть $\mathscr{F}$ всюду определенная [0]-КФДП, $a \bigtriangleup b$ рациональный сегмент и пусть существует псевдонепрерывная всюду на $a \bigtriangleup b$ определенная [3, 2, 3]-КФДП $\mathscr{G}$ такая, что

$$\forall x^{[2]}(a < x^{[2]} < b \supset D_{\ell\ell}(\mathscr{G}(x^{[2]}), \mathscr{F}, x^{[2]}))\,. \tag{4}$$

Тогда $\exists^{[1]}m\ \forall x^{[0]}y^{[0]}(a \leqq x^{[0]} \leqq y^{[0]} \leqq b \supset |\mathscr{F}(y^{[0]}) - \mathscr{F}(x^{[0]})| \leqq m\,.\,(y^{[0]} - x^{[0]}))$ и $\mathscr{G}$ [1]-равномерно непрерывна на $a \bigtriangleup b$.

Мы заметим, что а) предположение теоремы 1.7 выполнено, если

$$\forall x^{[2]}(a \leqq x^{[2]} \leqq b \supset D^{[2]}(\mathscr{F}, x^{[2]}))\,,$$

б) ввиду леммы 1.3, если $\forall x^{[2]}(a < x^{[2]} < b \supset D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, x^{[2]}))$, то существует всюду на $a \triangledown b$ определенная $[3, 2, 3]$-КФДП $\mathscr{G}$ такая, что (4).

Релятивизуя результаты из [13] и [18] и теорему 1.5, мы получаем следующие утверждения.

Теорема 1.8. Пусть n НЧ, а $\mathscr{F}$ $[n]$-функция $[n]$-ограниченной вариации (на $0 \triangle 1$). Тогда выполнено $Д^{[n]}(\mathscr{F})$ в том и только том случае, если для всякого РЧ a $[n]$-функция $\mathscr{F} - h_a$ является $[n]$-функцией $[n]$-ограниченной вариации (на $0 \triangle 1$).

Теорема 1.9. Пусть n и m НЧ, $n < m$, а $\mathscr{F}$ $[n]$-функция квазислабо ограниченной вариации (на $0 \triangle 1$). Тогда $Д^{[m]}(\mathscr{F})$.

Теорема 1.10. Пусть k, n и m НЧ, $k \leqq n < m$, а $\mathscr{F}$ всюду определенная $[k; n]$-КФДП. Тогда для почти всех $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$ выполнено

$$\neg\neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, x^{[m]})\ \&\ \overline{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, x^{[m]}) \vee$$
$$\vee\ \exists y^{[m]} D^{[m]}(y^{[m]}, \mathscr{F}, x^{[m]}))\,.$$

В заключение этого параграфа мы приведем несколько результатов о производных числах, являющихся конструктивными аналогами классических утверждений, известных из [1] и [3]. В связи с ними следует обратить внимание на следующие обстоятельства.

Замечание 1.2. 1. Ввиду теоремы 2 из [7] и [8] для всякого НЧ n существует $[0]$-последовательность $[n+1]$-КДЧ $\{v_k\}_k^{[0]}$ такая, что $\forall x^{[n]}\,\exists k(x^{[n]} = v_k)$.

2. Можно построить неубывающую $[0]$-функцию $\mathscr{F}$ такую, что для любого $S_\sigma^{[0]}$-множества $\mathfrak{H}$ меры меньшей чем 1 $[0]$-существует $[0]$-КДЧ $x^{[0]}$, для которого выполнено $0 < x^{[0]} < 1\ \&\ \neg(x^{[0]} \in \mathfrak{H})\ \&\ D^{[0]}(+\infty, \mathscr{F}, x^{[0]})$.

Замечание 1.3. Пусть n НЧ, $\mathscr{F}$ всюду определенная $[n]$-КФДП, а $\{\mathrm{H}_k\}_k^{[n]}$ $[n]$-последовательность неперекрывающихся $[n]$-сегментов, $|\mathrm{H}_k| \xrightarrow[k\to\infty]{[n]} 0$. Тогда мы посредством $[\mathscr{F}, \{\mathrm{H}_k\}_k^{[n]}]$ обозначим всюду определенную $[n]$-КФДП такую, что

$$\forall x^{[n]}(\neg\exists l(x^{[n]} \in (\mathrm{H}_l)^0) \supset [\mathscr{F}, \{\mathrm{H}_k\}_k^{[n]}]\,(x^{[n]}) = \mathscr{F}(x^{[n]}))$$

и для всякого НЧ l — $[\mathscr{F}, \{\mathrm{H}_k\}_k^{[n]}]$ линейна на H_l.

Замечание 1.4. Пусть n НЧ, $v \triangle w$ $[n]$-сегмент, z $[n]$-КДЧ, $z < |v \triangle w|$, а $\mathfrak{H}$ $S_\sigma^{[n]}$-множество меры меньшей чем z. Тогда существует $S_\sigma^{[n]}$-множество $\{\mathrm{H}_k\}_k^{[n]}$ меры меньшей чем z такое, что $\{\mathrm{H}_k\}_k^{[n]}$ $[n]$-последовательность дизъюнктных $[n]$-сегментов, содержащихся в $v \bigtriangleup w$, $\text{Эл}(\text{H}_0) = v \,\&\, \text{Эп}(\text{H}_1) = w$ и

$$\forall x^{[n]}(v < x^{[n]} < w \,\&\, (x^{[n]} \in \mathfrak{H} \vee \exists a(x^{[n]} = a)) \supset$$
$$\supset \exists^{[n]} k(x^{[n]} \in (\text{H}_k)^0)).$$

На основании этого замечания мы можем доказать следующее утверждение.

Лемма 1.8. Пусть n НЧ, а $\{\mathfrak{H}_k\}_k^{[n]}$ $[n]$-последовательность $S_\sigma^{[n]}$-множеств такая, что для всякого НЧ k — $\mathfrak{H}_{k+1} \subseteq \mathfrak{H}_k$ и мера $\mathfrak{H}_k$ меньше чем 2^{-k}. Тогда для всякого НЧ p существует неубывающая $[n]$-функция $\mathscr{G}$ такая, что

$$\mathscr{G}(1) - \mathscr{G}(0) < 2^{-p} \,\&\, \forall x^{[n]}(0 < x^{[n]} < 1 \,\&\, \forall k(x^{[n]} \in \mathfrak{H}_k) \supset D_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{G}, x^{[n]})).$$

Теорема 1.11. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция такая, что

1. для почти всех $[0]$-КДЧ $x^{[0]}$ выполнено

$$\underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0](x^{[0]}) \geqq 0$$

и

2. не может не существовать $[0]$-последовательность $[0]$-КДЧ $\{v_k\}_k^{[0]}$, для которой верно $\forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \,\&\, \neg\exists k(x^{[0]} = v_k) \supset \underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0](x^{[0]}) > > -\infty)$.

Тогда $\mathscr{F}$ является неубывающей.

Доказательство. Ввиду лемм 1.4 и 1.8 нам достаточно ограничиться следующим.

Пусть $\mathscr{G}$ $[0]$-функция, а $\{w_k\}_k^{[0]}$ $[0]$-последовательность $[0]$-КДЧ такая, что $\forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \,\&\, \neg\exists k(x^{[0]} = w_k) \supset \underline{D}[\mathscr{G}; 0, 0](x^{[0]}) \geqq 0)$.

Тогда, как мы покажем, $\mathscr{G}(1) - \mathscr{G}(0) \geqq 0$.

Пусть l НЧ. Ввиду $[0]$-непрерывности $\mathscr{G}$ (см. теорему 4.1 из [8] — теорему Г. С. Цейтина) существует $[0]$-последовательность неперекрывающихся $[0]$-сегментов, содержащихся в $0 \bigtriangleup 1$, $\{\text{H}_t\}_t^{[0]}$ и неубывающая $[0]$-функция $\mathscr{G}_0$ такие, что

$$\forall k(0 < w_k < 1 \supset \exists t(w_k \in (\text{H}_t)^0)) \,\&\, \forall t(|\text{H}_t| < 2^{-t} \,\&\, |\Delta(\mathscr{G}, \text{H}_t)| < 2^{-l-t-1}) \,\&$$

$$\&\, \forall x^{[0]}\left(\mathscr{G}_0(x^{[0]}) = \sum_{t=0}^{\infty} |\Delta(\mathscr{G}, \text{H}_t)| \cdot \frac{1}{|\text{H}_t|} \cdot \min(\max(0, x^{[0]} - \text{Эл}(\text{H}_t)), |\text{H}_t|)\right).$$

Тогда $\mathscr{G}_0(1) - \mathscr{G}_0(0) < 2^{-l}$ и для $[0]$-функции $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_1 \rightleftharpoons \mathscr{G}_0 + [\mathscr{G}, \{\text{H}_t\}_t^{[0]}]$, выполнено

$$\forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \supset \underline{D}[\mathscr{G}_1; 0, 0](x^{[0]}) \geqq 0).$$

Следовательно, $\mathscr{G}_1$ является неубывающей и

$$\mathscr{G}(1) - \mathscr{G}(0) = \mathscr{G}_1(1) - \mathscr{G}_1(0) - (\mathscr{G}_0(1) - \mathscr{G}_0(0)) > -2^{-l}.$$

Лемма 1.9. Пусть $\mathscr{F}$ неубывающая [0]-функция, а y [0]-КДЧ такие, что $\forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \supset \bar{D}[\mathscr{F}; 0, 0](x^{[0]}) \geqq y > 0)$. Тогда $\mathscr{F} - h_y$ неубывающая [0]-функция.

Доказательство. Мы докажем, что $\mathscr{F} - h_{y/5}$ является неубывающей [0]-функцией. Согласно лемме 1.4 выполнено

$$\forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \supset \bar{D}[\mathscr{F} - h_{y/5}; 0, 0](x^{[0]}) \geqq \tfrac{4}{5} \,.\, y > 0)\,.$$

Требуемый результат получится, как видно, итерацией.

Пусть p НЧ.

Согласно теореме 6.4 из [5] и лемме 3 из [17] существуют [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{z_k\}_k^{[0]}$ и [0]-КДЧ y_0 такие, что

$$Z^{\mathrm{D}}(\mathscr{F}, \{z_k\}_k^{[0]})\,\&\, \max(0, y - 2^{-p}) < y_0 < y \,\&\, \neg\exists k(y_0 = z_k)\,.$$

Мы хотим доказать, что $\mathscr{F} - h_{y_0/5}$ возрастающая на $0 \triangle 1$ [0]-функция. Ясно, что можно ограничиться тем, что мы докажем

$$\mathscr{F}(1) - \mathscr{F}(0) > \tfrac{1}{5} \,.\, y_0\,. \tag{5}$$

Мы допустим, что (5) неверно. Ввиду теоремы 7 из [16], леммы 3 из [17] и предполагаемых свойств [0]-функции $\mathscr{F}$ существует [0]-последовательность дизъюнктных рациональных сегментов, содержащихся в $0 \nabla 1$, $\{c_k \triangle d_k\}_k^{[0]}$ такая, что

$$\Big(|c_k \triangle d_k| \xrightarrow[k\to\infty]{[0]} 0\Big) \,\&\, \forall k(\Delta(\mathscr{F}, c_k \triangle d_k) > y_0 \,.\, |c_k \triangle d_k| \,\&\, |c_k \triangle d_k| \geqq |c_{k+1} \triangle d_{k+1}|)$$

и для любого рационального сегмента $c \triangle d$, $0 < c < d < 1 \,\&\, \dfrac{\Delta(\mathscr{F}, c \triangle d)}{|c \triangle d|} >$ $> y_0$, существует НЧ k, для которого выполнено

$$\neg(c \triangle d \cap c_k \triangle d_k = \varnothing) \,\&\, \tfrac{1}{2} \,.\, |c \triangle d| \leqq |c_k \triangle d_k|\,.$$

Мы для всякого НЧ k определим

$$\mathrm{H}_k \rightleftharpoons (c_k - 2 \,.\, |c_k \triangle d_k|) \triangle (d_k + 2 \,.\, |c_k \triangle d_k|)\,.$$

Тогда ввиду нами предполагаемых свойств [0]-функции $\mathscr{F}$ верно

$$\forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \supset \neg\neg(\exists k(x^{[0]} \in c_k \triangle d_k) \vee \forall q\, \exists k(q < k \,\&\, x^{[0]} \in (\mathrm{H}_k)^0)))$$

и для всякого РЧ c, $0 < c < 1$, даже существуют НЧ k_0 и k_1 такие, что

$$c \in \mathrm{H}_{k_0} \,\&\, c \in \mathrm{H}_{k_1} \,\&\, \forall k(c \in \mathrm{H}_k \supset \text{Эл}(\mathrm{H}_{k_0}) \leqq$$
$$\leqq \text{Эл}(\mathrm{H}_k) < \text{Эп}(\mathrm{H}_k) \leqq \text{Эп}(\mathrm{H}_{k_1}))\,,$$

причем

$$k_0 = k_1 \vee d_{k_0} < c_{k_1}\,.$$

Ввиду этого можно, исходя от $\{H_k\}_k^{[0]}$, построить [0]-последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов, содержащихся в $0 \triangle 1$, $\{K_l\}_l^{[0]}$ такую, что

$$(|K_l| \xrightarrow[l\to\infty]{[0]} 0) \,\&\, \forall l\, \exists k(c_k \triangle d_k \subseteq K_l \subseteq H_k) \,\&\, \forall k\, \exists p(H_k \cap 0 \triangle 1 \subseteq \bigcup_{0\leqq l\leqq p} K_l)$$

и, следовательно,

$$\forall l \left(\frac{\Delta(\mathscr{F}, K_l)}{|K_l|} > \tfrac{1}{5} \,.\, y_0\right) \& \,\forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \supset \exists kl(\text{Эп}(K_k) = \text{Эл}(K_l) \,\&$$

$$\& \ \text{Эл}(K_k) < x^{[0]} < \text{Эп}(K_l)))\,.$$

Тогда для неубывающей [0]-функции $[\mathscr{F}, \{K_l\}_l^{[0]}]$ верно

$$\forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \supset \underline{D}[[\mathscr{F}, \{K_l\}_l^{[0]}]; 0, 0]\,(x^{[0]}) > \tfrac{1}{5} \,.\, y_0)$$

и, следовательно, $\mathscr{F}(1) - \mathscr{F}(0) = \Delta([\mathscr{F}, \{K_l\}_l^{[0]}], 0 \triangle 1) > \frac{1}{5} \,.\, y_0$.

На основании леммы 1.4, релятивизации лемм 1.8 и 1.9 и замечания 5.4 из [8] легко доказать следующее утверждение.

Теорема 1.12. Пусть n НЧ, $\mathscr{G}$ неубывающая [0]-функция, а w АДЧ, такие, что для почти всех [n]-КДЧ $x^{[n]}$ из $0 \triangle 1$ верно $\bar{D}[\mathscr{G}; 0, n]\,(x^{[n]}) \geqq w > 0$. Тогда $\forall x^{[0]} y^{[0]}(0 \leqq x^{[0]} \leqq y^{[0]} \leqq 1 \supset \mathscr{G}(y^{[0]}) - \mathscr{G}(x^{[0]}) \geqq w \,.\, (y^{[0]} - x^{[0]}))$.

Теорема 1.13. Пусть $\mathscr{F}$ всюду определенная [0]-КФДП, n НЧ, а $a \triangledown b$ рациональный интервал. Тогда [2]-существует $P_0 \in {}^*\mathbf{D}^{[1]}$ (соотв. $R_0 \in {}^*\mathbf{D}^{[1]}$) и [$n$ + 4]-существует $P_1 \in {}^*\mathbf{D}^{[n+3]}$ (соотв. $R_1 \in {}^*\mathbf{D}^{[n+3]}$) такие, что

а) P_0 является супремумом множеств

$$\Lambda S\left(\exists cd\left(a < c < d < b \,\&\, S \mathrel{\dot{=}} \frac{\Delta(\mathscr{F},\, c \triangle d)}{|c \triangle d|}\right)\right) \tag{6}$$

и

$$\Lambda S(\neg\neg\exists x^{[n]}(a < x^{[n]} < b \,\&\, S \mathrel{\dot{=}} \bar{D}[\mathscr{F}; 0, n]\,(x^{[n]}))) \tag{7}$$

и P_1 супремумом множества

$$\Lambda S(\neg\neg\exists x^{[n]}(a < x^{[n]} < b \,\&\, S \mathrel{\dot{=}} \underline{D}[\mathscr{F}; 0, n]\,(x^{[n]})))\,, \tag{8}$$

а R_0 (соотв. R_1) является инфимумом множеств (6) и (8) (соотв. множества (7)),

б) выполнено $P_1 \leqq P_0 \,\&\, (P_0 < +\infty \supset P_1 = P_0) \,\&\, R_0 \leqq R_1 \,\&\, (-\infty < R_0 \supset \supset R_0 = R_1)$.

Доказательство. Ясно, что достаточно ограничиться следующим.
Пусть $P_0 < +\infty$. Выполнено $P_0 \in \mathbf{D}^{[1]}$.

Мы допустим, что $P_1 < P_0$. Тогда для всяких [0]-КДЧ w и v,

$$P_1 < w < P_0 < v < \tfrac{1}{2} . (P_0 - w) + P_0 , \tag{9}$$

выполнено: [0]-КФДП $\mathscr{G}$, $\forall x^{[0]}(\mathscr{G}(x^{[0]}) \simeq v . x^{[0]} - \mathscr{F}(x^{[0]}))$, является неубывающей на $a \bigtriangleup b$, ввиду леммы 1.4

$$\forall x^{[0]}(a < x^{[0]} < b \supset \bar{D}[\mathscr{G}; 0, 0]\,(x^{[0]}) =$$
$$= v - (\underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0]\,(x^{[0]})) > v - w > 0)$$

и, следовательно, согласно лемме 1.9

$$\forall cd(a < c < d < b \supset \Delta(\mathscr{F}, c \bigtriangleup d) < w . |c \bigtriangleup d|) ,$$

что ввиду а) и (9) невозможно.

Следствие. Пусть $\mathscr{F}$ всюду определенная [0]-КФДП, n НЧ, $y^{[n]}$ [n]-КДЧ и пусть не может не существовать рациональный интервал $a \bigtriangledown b$ такой, что $a < y^{[n]} < b$ и $\bar{D}[\mathscr{F}; 0, n]$ (соотв. $\underline{D}[\mathscr{F}; 0, n]$) конечна на $a \bigtriangledown b$ и псевдонепрерывна в точке $y^{[n]}$. Тогда $\mathscr{F}$ конечно псевдодифференцируема в точке $y^{[n]}$.

Способом, описанным В. Ярником в [2], стр. 201, можно построить следующий пример.

Пример 1.5. Существует [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$ такая, что $\mathscr{F}(0) = \mathscr{F}(1) = 0$ и

$$\forall n x^{[n]}((0 \leqq x^{[n]} < 1 \supset \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, x^{[n]}))\, \&$$
$$\& \,(0 < x^{[n]} \leqq 1 \supset \underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, x^{[n]}))) .$$

На основании этого примера и теоремы 6 из [16] легко получить следующий пример.

Пример 1.6. Существуют [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$ и [1]-КДЧ v из $0 \bigtriangledown 1$ такие, что

$$D^{[1]}(0, \mathscr{F}, v)\, \&\, \forall x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \supset \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, x^{[0]})\, \&$$
$$\&\, \underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, x^{[0]})) .$$

Теорема 1.14. Пусть n НЧ и $\mathscr{F}$ [0]-функция такие, что

1. для почти всех [n]-КДЧ $x^{[n]}$ выполнено

$$\bar{D}[\mathscr{F}; 0, n]\,(x^{[n]}) \geqq 0$$

и

2. не может не существовать [n]-последовательность [n]-КДЧ $\{v_k\}_k^{[n]}$ такая, что $\forall x^{[n]}(0 < x^{[n]} < 1\, \&\, \neg\exists k(x^{[n]} = v_k) \supset \underline{D}[\mathscr{F}; 0, n]\,(x^{[n]}) > -\infty)$.

Тогда $\mathscr{F}$ является неубывающей.

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-функция такая, что для почти всех $[n]$-КДЧ $x^{[n]}$ выполнено $\bar{D}[\mathscr{F}; 0, n]\,(x^{[n]}) \geqq 0$.

а) Если m НЧ и $\{w_k\}_{k=0}^{t}$ система $[n]$-КДЧ такие, что $\forall x^{[n]}(0 < x^{[n]} < 1\ \&\ \&\ \neg\exists k(0 \leqq k \leqq t\ \&\ x^{[n]} = w_k) \supset \underline{D}[\mathscr{F}; 0, n]\,(x^{[n]}) \geqq -m)$, то ввиду леммы 1.4 и теоремы 1.11 $\mathscr{F} + h_m$ неубывающая $[0]$-функция и для почти всех $[n]$-КДЧ $x^{[n]}$ из $0 \triangle 1$ верно $\bar{D}[\mathscr{F} + h_m; 0, n]\,(x^{[n]}) \geqq m$ и, следовательно, согласно теореме 1.12 $\mathscr{F}$ неубывающая $[0]$-функция.

б) Мы допустим, что для РЧ a и b, $0 < a < b < 1$, выполнено $\mathscr{F}(a) > > \mathscr{F}(b)$. Тогда ввиду а) можно построить $[0]$-последовательность систем дизъюнктных рациональных сегментов $\{\{\mathrm{T}_{k,l}\}_{l=0}^{2^k-1}\}_k^{[0]}$ такую, что

$$\mathrm{T}_{0,0} \mathrel{\dot{=}} a \triangle b\ \&\ \forall kl\left(0 \leqq l < 2^k \supset \frac{\Delta(\mathscr{F}, \mathrm{T}_{k,l})}{|\mathrm{T}_{k,l}|} < -k\ \&\ \text{Эл}(\mathrm{T}_{k,l}) < \right.$$
$$\left. < \text{Эл}(\mathrm{T}_{k+1,2l}) < \text{Эп}(\mathrm{T}_{k+1,2l+1}) < \text{Эп}(\mathrm{T}_{k,l})\ \&\ |\mathrm{T}_{k,l}| < 2^{-k}\right).$$

Следовательно, $\forall x^{[n]}(\forall k\ \neg\neg\exists l(0 \leqq l < 2^k\ \&\ x^{[n]} \in \mathrm{T}_{k,l}) \supset \underline{D}[\mathscr{F}; 0, n]\,(x^{[n]}) = -\infty)$. Легко доказать, что для любой $[n]$-последовательности $[n]$-КДЧ $\{v_k\}_k^{[n]}$ можно построить $[n]$-КДЧ $x^{[n]}$ такое, что

$$\forall k\ \neg\neg\exists l(0 \leqq l < 2^k\ \&\ x^{[n]} \in \mathrm{T}_{k,l})\ \&\ \neg\exists k(x^{[n]} = v_k)\,.$$

Лемма 1.10 (ср. [1], стр. 203). Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-функция, а $\{z_k\}_k^{[0]}$ $[0]$-последовательность $[0]$-КДЧ такие, что $Z(\mathscr{F}, \{z_k\}_k^{[0]})\ \&\ \&\ \forall ab(a < b \supset \neg\neg\exists y^{[0]}(a < y^{[0]} < b\ \&\ \neg\exists k(y^{[0]} = z_k)\ \&\ \neg\exists x^{[0]}(y^{[0]} = \mathscr{F}(x^{[0]})\ \&\ \&\ \bar{D}^+[\mathscr{F}; 0]\,(x^{[0]}) \leqq 0)))$ (см. [15], лемму 2). Тогда $\mathscr{F}$ является неубывающей.

Доказательство. Лемму можно доказать методом, описанным в [1], ибо для всяких РЧ c и d и $[0]$-КДЧ $y^{[0]}$, $c < d\ \&\ \mathscr{F}(c) > y^{[0]} > \mathscr{F}(d)\ \&\ \&\ \neg\exists k(y^{[0]} = z_k)$, $[0]$-существует $[0]$-КДЧ $z^{[0]}$ такое, что $c < z^{[0]} < d\ \&\ \&\ \mathscr{F}(z^{[0]}) = y^{[0]}\ \&\ \forall x^{[0]}(z^{[0]} < x^{[0]} < d \supset \mathscr{F}(x^{[0]}) < y^{[0]})$.

Ввиду леммы 1.8 верно следующее утверждение.

Следствие. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-равномерно непрерывная $[0]$-функция такая, что

а) для почти всех $[0]$-КДЧ $x^{[0]}$ верно

$$\bar{D}^+[\mathscr{F}; 0]\,(x^{[0]}) \geqq 0$$

и

б) не может не существовать $[0]$-последовательность $[0]$-КДЧ $\{v_k\}_k^{[0]}$ такая, что $\forall x^{[0]}(\neg\exists k(x^{[0]} = v_k) \supset \bar{D}^+[\mathscr{F}; 0]\,(x^{[0]}) > -\infty)$.

Тогда $\mathscr{F}$ является неубывающей.

На основании леммы 1.10 можно способом, который близок классическому (см. [1], стр. 204), доказать следующий конструктивный аналог теоремы У. Дини.

Теорема 1.15. Пусть $\mathscr{F}$ всюду определенная [0]-КФДП, а Т [0]-интервал, такие, что $\mathscr{F}$ [0]-равномерно непрерывна на всяком рациональном сегменте, который содержится в Т. Тогда [2]-осуществимо $\mathrm{P}_0 \in {}^*\mathbf{D}^{[1]}$ (соотв. $\mathrm{P}_1 \in {}^*\mathbf{D}^{[1]}$), которое является инфимумом (соотв. супремумом) следующих множеств:

$$\bigwedge S\left(\exists ab\left(a < b \,\&\, a \triangle b \subseteq \mathrm{T} \,\&\, S \doteqdot \frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|}\right)\right)$$

и

$$\bigwedge S(\neg\neg\exists x^{[0]}(x^{[0]} \in \mathrm{T} \,\&\, \mathscr{G}(x^{[0]}) \doteqdot S)),$$

где $\mathscr{G}$ любое из [3]-отображений $\bar{D}^+[\mathscr{F}; 0]$, $\bar{D}^-[\mathscr{F}; 0]$, $\underline{D}^+[\mathscr{F}; 0]$, $\underline{D}^-[\mathscr{F}; 0]$.

Теорема 1.16. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция такая, что

а) для почти всех [0]-КДЧ $x^{[0]}$ верно $\underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0]\,(x^{[0]}) \geqq 0$ и

б) не может не существовать [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{v_k\}_k^{[0]}$ такая, что

$$\forall x^{[0]}(\neg\exists k(x^{[0]} = v_k) \supset {}^*D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, x^{[0]})). \tag{10}$$

Тогда $\mathscr{F}$ является неубывающей.

Сначала мы докажем конструктивные варианты двух результатов Р. Бэра ([1], стр. 54, и [3], стр. 437).

Теорема 1.17. Пусть $\boldsymbol{M}$ множество $\varnothing$-рекурсивно перечислимых множеств рациональных сегментов (соотв. интервалов), $\boldsymbol{N}$ множество $\varnothing$-рекурсивно перечислимых множеств рациональных интервалов, а $\mathfrak{P} \rightleftharpoons \bigwedge x^{[0]}(\forall n \neg\neg\exists T(T \in \tilde{\boldsymbol{M}}_{n\Box} \,\&\, x^{[0]} \in T))$, такие, что

$$\begin{gathered}\neg(\mathfrak{P} = \varnothing) \,\&\, \forall nS((S \in \tilde{\boldsymbol{M}}_{n\Box} \supset |S| < 2^{-n} \,\&\\ \&\, \exists T(T \in \tilde{\boldsymbol{M}}_{n+1\Box} \,\&\, \text{Эл}(S) < \text{Эл}(T) < \text{Эп}(T) < \text{Эп}(S))) \,\&\\ \&\, (S \in \tilde{\boldsymbol{M}}_{n+1\Box} \supset \exists T(T \in \tilde{\boldsymbol{M}}_{n\Box} \,\&\, S \subseteq T)))\end{gathered} \tag{11}$$

и

$$\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in \mathfrak{P} \supset \neg\neg\exists q\, \neg\exists T(T \in \tilde{\boldsymbol{N}}_{q\Box} \,\&\, x^{[0]} \in T)).$$

Тогда [1]-существуют рациональный интервал $a \triangledown b$, НЧ q и [0]-КДЧ v такие, что $a < v < b \,\&\, v \in \mathfrak{P} \,\&\, \forall x^{[0]}(x^{[0]} \in \mathfrak{P} \,\&\, x^{[0]} \in a \triangledown b \supset \neg\exists T(T \in \tilde{\boldsymbol{N}}_{q\Box} \,\&\, x^{[0]} \in T))$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{S} \in \tilde{\boldsymbol{M}}_{0\Box}$, $n_0 \rightleftharpoons 0$, $l_0 \rightleftharpoons 0$, а k_0 НЧ такое, что $\mathrm{c}_{\mathbf{z}}(k_0) \doteqdot \mathrm{S}$. Мы используем ОРФ τ^3 из [8], § 2, и построим $\varnothing$-ЧРФ f такую, что $f(0) \simeq \tau^3(n_0, k_0, l_0)$ и для любого НЧ q верно $!f(q+1) \supset\, !f(q)$ и если

$$!f(q) \,\&\, f(q) \doteqdot \tau^3(n_q, k_q, l_q),$$

то

$$(!f(q+1) \equiv \exists s\mathscr{V}_q(s)) \,\&\, (!f(q+1) \supset \mathscr{V}_q(f(q+1))),$$

где

$$\forall s(\mathscr{V}_q(s) \rightleftharpoons \exists nkl(s = \tau^3(n, k, l) \,\&\, n_q < n \,\&\, c_{\blacksquare}(k) \in \tilde{M}_{n\square} \,\&\, c_{\blacksquare}(l) \in \tilde{N}_{q\square} \,\&$$
$$\&\, Эл(c_{\blacksquare}(k_q)) < Эл(c_{\blacksquare}(k)) < Эп(c_{\blacksquare}(k)) < Эп(c_{\blacksquare}(k_q)) \,\&\, c_{\blacksquare}(k) \subseteq c_{\blacksquare}(l))) \,.$$

Тогда ввиду наших предположений не могут не существовать и, следовательно, [1]-существуют НЧ q, n_q, k_q и l_q такие, что

$$f(q) \simeq \tau^3(n_q, k_q, l_q) \,\&\, \neg\, !f(q+1)\,.$$

Мы определим

$$a \rightleftharpoons Эл(c_{\blacksquare}(k_q)) \quad и \quad b \rightleftharpoons Эп(c_{\blacksquare}(k_q))\,.$$

Ввиду (11) легко построить требуемое [0]-КДЧ v.

Теорема 1.18. Пусть $\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность всюду определенных [0]-КФДП, $\boldsymbol{M}$ последовательность $\varnothing$-рекурсивно перечислимых множеств рациональных сегментов (соотв. интервалов), $\mathfrak{P} \rightleftharpoons \Lambda x^{[0]}(\forall n \neg\neg\exists T(T \in \tilde{M}_{n\square} \,\&$ $\&\, x^{[0]} \in T))$, а k НЧ такие, что (11) и для всякого [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из $\mathfrak{P}$ не может не существовать НЧ q, для которого верно

$$\neg\neg(\forall n(q \leqq n \supset 2^k \leqq \mathscr{F}_n(x^{[0]})) \vee \forall n(q \leqq n \supset \mathscr{F}_n(x^{[0]}) \leqq$$
$$\leqq -2^k) \vee \forall nm(q \leqq n < m \supset |\mathscr{F}_n(x^{[0]}) - \mathscr{F}_m(x^{[0]})| \leqq 2^{-k}))\,. \qquad (12)$$

Тогда [1]-существуют рациональный интервал $a \bigtriangledown b$, НЧ q и [0]-КДЧ v такие, что $a < v < b \,\&\, v \in \mathfrak{P}$ и для всякого [0]-КДЧ $x^{[0]}$, $x^{[0]} \in \mathfrak{P} \,\&\, x^{[0]} \in a \bigtriangledown b$, верно (12).

Доказательство. Мы на основании [4] построим [0]-последовательность [0]-последовательностей рациональных интервалов $\{\{\mathrm{H}_{t,l}\}_l^{[0]}\}_t^{[0]}$ такую, что для всяких НЧ n, m и s

$$\forall x^{[0]}\, \exists l(x^{[0]} \in \mathrm{H}_{\tau^3(n,m,s),l}) \,\&\, \forall l x^{[0]} y^{[0]}(x^{[0]} \in \mathrm{H}_{\tau^3(n,m,s),l} \,\&\, y^{[0]} \in \mathrm{H}_{\tau^3(n,m,s),l} \supset$$
$$\supset |\mathscr{F}_n(x^{[0]}) - \mathscr{F}_n(y^{[0]})| < 2^{-k-s-1} \,\&\, |\mathscr{F}_m(x^{[0]}) - \mathscr{F}_m(y^{[0]})| < 2^{-k-s-1})\,.$$

(τ^3 функция из [8], § 2, кодирующая тройки НЧ.)

Мы определим

$$N \rightleftharpoons \Lambda S(\exists qnmslab(q \leqq n < m \,\&\, a \bigtriangledown b \doteqdot \mathrm{H}_{\tau^3(n,m,s),l} \,\&\, (S \doteqdot q \,\square\, a \bigtriangledown b) \,\&$$
$$\&\, \min(\mathscr{F}_n(a), \mathscr{F}_m(a)) < 2^k . (1 - 2^{-2k-s}) \,\&$$
$$\&\, \max(\mathscr{F}_n(a), \mathscr{F}_m(a)) > -2^k . (1 - 2^{-2k-s}) \,\&$$
$$\&\, |\mathscr{F}_n(a) - \mathscr{F}_m(a)| > 2^{-k} . (1 + 2^{-s})))\,.$$

Тогда N последовательность $\varnothing$-рекурсивно перечислимых множеств рациональных интервалов и выполнено

$$\forall q x^{[0]}(\exists T(T \in \tilde{N}_{q\square} \,\&\, x^{[0]} \in T) \equiv \exists nm(q \leqq n < m \,\&\, \min(\mathscr{F}_n(x^{[0]}), \mathscr{F}_m(x^{[0]})) <$$
$$< 2^k \,\&\, \max(\mathscr{F}_n(x^{[0]}), \mathscr{F}_m(x^{[0]})) > -2^k \,\&\, |\mathscr{F}_n(x^{[0]}) - \mathscr{F}_m(x^{[0]})| > 2^{-k}))\,.$$

Следовательно,

$$\forall q x^{[0]}(\neg\exists T(T \in \tilde{N}_{q\square} \,\&\, x^{[0]} \in T) \equiv$$
$$\equiv \neg\neg(\forall n(q \leqq n \supset 2^k \leqq \mathscr{F}_n(x^{[0]})) \vee \forall n(q \leqq n \supset \mathscr{F}_n(x^{[0]}) \leqq$$
$$\leqq -2^k) \vee \forall nm(q \leqq n < m \supset |\mathscr{F}_n(x^{[0]}) - \mathscr{F}_m(x^{[0]})| \leqq 2^{-k})))$$

и нам достаточно применить теорему 1.17.

Замечание 1.5. Пусть $\mathscr{F}$ [0]-функция и v и w [0]-КДЧ такие, что $v < 0 \,\&\, 0 < w < 1 \,\&\, \underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0]\,(w) < 0$ и для почти всех [0]-КДЧ $x^{[0]}$ верно $\underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0]\,(x^{[0]}) \geqq 0$. Тогда для всяких [0]-последовательности [0]-КДЧ $\{z_k\}_k^{[0]}$ и НЧ p существует [0]-КДЧ $x^{[0]}$ такое, что

$$0 < x^{[0]} < 1 \,\&\, |x^{[0]} - w| < 2^{-p} \,\&\, \neg\exists k(x^{[0]} = z_k) \,\&$$
$$\&\, \underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0]\,(x^{[0]}) \leqq v \leqq \bar{D}[\mathscr{F}; 0, 0]\,(x^{[0]})\,.$$

Действительно, пусть z [0]-КДЧ, q НЧ, а $a \triangle b$ рациональный сегмент такой, что $0 \leqq a < b \leqq 1 \,\&\, \Delta(\mathscr{F}, a \triangle b) < 0$. Тогда согласно теореме 1.11

$$\neg\neg\exists y^{[0]}(a < y^{[0]} < b \,\&\, \underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, y^{[0]}))\,.$$

Ввиду этого, [0]-непрерывности $\mathscr{F}$ и нашим предположениям существуют рациональные сегменты $c_0 \triangle d_0$ и $c_1 \triangle d_1$ такие, что

$$a < c_0 < d_0 < c_1 < d_1 < b \,\&\, \max(|c_0 \triangle d_0|, |c_1 \triangle d_1|) < \tfrac{1}{2}\,.\,|a \triangle b| \,\&$$
$$\&\, \forall i\left(0 \leqq i \leqq 1 \supset \Delta(\mathscr{F}, c_i \triangle d_i) < 0 \,\&\, \left|\frac{\Delta(\mathscr{F}, c_i \triangle d_i)}{|c_i \triangle d_i|} - v\right| < 2^{-q}\right).$$

Согласно теореме 1.3 из [5] верно $z < c_1 \vee d_0 < z$.

На основании этого легко построить требуемое [0]-КДЧ $x^{[0]}$.

Доказательство теоремы 1.16. Пусть $\{v_k\}_k^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-КДЧ такая, что (10), а $\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-функций, $\forall n x^{[0]}(x^{[0]} \in 0 \triangle 1 \supset \mathscr{F}_n(x^{[0]}) = n/2\,.\,\Delta(\mathscr{F}, (x^{[0]} - 1/n) \triangle (x^{[0]} + 1/n)))$.

Мы определим

$$M \rightleftharpoons \Lambda S\left(\exists nab\left((S \doteqdot n \,\square\, a \triangle b) \,\&\, 0 < a < b < 1 \,\&\, b - a < 2^{-n} \,\&\right.\right.$$
$$\left.\left.\&\, \neg\exists k(k \leqq n \,\&\, v_k \in a \triangle b) \,\&\, \frac{\Delta(\mathscr{F}, a \triangle b)}{|a \triangle b|} < -1\right)\right),$$
$$\mathfrak{P} \rightleftharpoons \Lambda x^{[0]}(\forall n\, \neg\neg\exists T(T \in \tilde{M}_{n\square} \,\&\, x^{[0]} \in T))\,.$$

Тогда $\neg\exists k(v_k \in \mathfrak{P})$ и

$$\Lambda x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \,\&\, \neg\exists k(x^{[0]} = v_k) \,\&\, \underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0]\,(x^{[0]}) < -1) \subseteq$$
$$\subseteq \mathfrak{P} \subseteq \Lambda x^{[0]}(0 < x^{[0]} < 1 \,\&\, {}^*D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, x^{[0]}) \,\&\, \underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0]\,(x^{[0]}) \leqq -1)\,.$$

Согласно замечанию 1.5 и свойствам $\mathscr{F}$ и $\mathfrak{P}$

$$\forall x^{[0]} p(x^{[0]} \in \mathfrak{P} \supset \exists y^{[0]}(y^{[0]} \in \mathfrak{P} \,\&\, |y^{[0]} - x^{[0]}| < 2^{-p} \,\&\, \\ \&\, \underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0]\,(y^{[0]}) = -\tfrac{5}{4}))\,. \tag{13}$$

Мы допустим, что $\neg(\mathfrak{P} = \varnothing)$. Тогда верно (11) и мы на основании теоремы 1.18 получаем: [1]-существуют рациональный интервал $a \nabla b$, НЧ q и [0]-КДЧ v такие, что $0 < a < v < b < 1 \,\&\, v \in \mathfrak{P}$ и для всякого [0]-КДЧ $x^{[0]}$, $x^{[0]} \in \mathfrak{P} \,\&\, x^{[0]} \in a \nabla b$, верно

$$\neg\neg(\forall n(q \leqq n \supset 2^2 \leqq \mathscr{F}_n(x^{[0]})) \vee \forall n(q \leqq n \supset \mathscr{F}_n(x^{[0]}) \leqq \\ \leqq -2^2) \vee \forall nm(q \leqq n < m \supset |\mathscr{F}_n(x^{[0]}) - \mathscr{F}_m(x^{[0]})| \leqq 2^{-2}))\,.$$

Ввиду [0]-непрерывности [0]-функции $\mathscr{F}_q$ в точке v и (13) существуют НЧ p и [0]-КДЧ $y^{[0]}$ такие, что

$$\forall x^{[0]}(|x^{[0]} - v| < 2^{-p} \supset x^{[0]} \in a \nabla b \,\&\, |\mathscr{F}_q(x^{[0]}) - \mathscr{F}_q(v)| < \tfrac{1}{16}) \,\&\, \\ \&\, y^{[0]} \in \mathfrak{P} \,\&\, |y^{[0]} - v| < 2^{-p} \,\&\, \mathscr{F}_q(y^{[0]}) \geqq -\tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{4}$$

и, следовательно, $\forall x^{[0]}(x^{[0]} \in \mathfrak{P} \,\&\, |x^{[0]} - v| < 2^{-p} \supset \underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0]\,(x^{[0]}) > -2)$. Но тогда согласно теореме 1.11 и свойствам множества $\mathfrak{P}$ [0]-функция $\mathscr{F}$ является неубывающей на $(v - 2^{-p}) \nabla (v + 2^{-p})$ и мы получили противоречие.

Итак, $\mathfrak{P} = \varnothing$ и, следовательно,

$$\forall x^{[0]}(\neg\exists k(x^{[0]} = v_k) \supset \underline{D}[\mathscr{F}; 0, 0]\,(x^{[0]}) \geqq -1)\,.$$

Применением теоремы 1.11 доказательство завершается.

В связи с теоремой 1.18 следует заметить, что теорема Р. Бэра о функциях первого класса (см. [3], стр. 437) в конструктивной математике неверна.

Пример 1.7. Существуют [0]-последовательность [0]-отображений $\{\mathscr{F}_m\}_m^{[0]}$ и [0]-отображение $\mathscr{F}$ такие, что

1. для любых НЧ n и m — $\mathscr{F}_m$ является всюду определенной [0]-равномерно непрерывной [0; n]-КФДП, а $\mathscr{F}$ является всюду опеределенной [0, n, $n + 1$]-КФДП,

2. для любых НЧ n и [n]-КДЧ $x^{[n]}$ [0]-последовательность [n]-КДЧ $\{\mathscr{F}_m(x^{[n]})\}_m^{[0]}$ псевдосходится к $\mathscr{F}(x^{[n]})$ и

3. ни для какого [0]-КДЧ $x^{[0]}$ из сегмента $0 \triangle 1$ [0, 0, 1]-КФДП $\mathscr{F}$ не является псевдонепрерывной в точке $x^{[0]}$.

Определение. Пусть k, m и q НЧ, $k \leqq m$, $\mathscr{F}$ всюду определенная [k; m]-КФДП, а v и w АДЧ. Тогда мы определим

$$\mathrm{L}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, v) \rightleftharpoons \forall s \,\neg\neg\exists t\, \forall ab(v - 2^{-t} < a \leqq b < v + 2^{-t} \supset |\mathscr{F}(a) - \mathscr{F}(b)| < 2^{-s})$$

и

$$\mathrm{L}^{[q]}(w, \mathscr{F}, v) \rightleftharpoons \forall s\, \exists^{[q]} t\, \forall a(|a - v| < 2^{-t} \supset$$
$$\supset |\mathscr{F}(a) - w| < 2^{-s}).$$

Замечание 1.6. Пусть k и m НЧ, $k \leqq m$, $\mathscr{F}$ всюду определенная $[k; m]$-КФДП, а

$$M \rightleftharpoons \bigwedge S(\neg\neg\exists sab(a < b \,\&\, (S \doteq s \,\square\, a \bigtriangledown b) \,\&$$
$$\&\, \neg\exists cd(a < c < d < b \,\&\, |\mathscr{F}(c) - \mathscr{F}(d)| > 2^{-s-1}))).$$

Тогда M последовательность $\varnothing^{(m+1)}$-рекурсивных множеств рациональных интервалов такая, что для всяких НЧ q, $m \leqq q$, и $[q]$-КДЧ v выполнено

$$\mathrm{L}_{\ell\ell}(\mathscr{F}, v) \equiv \forall s\, \neg\neg\exists l(\mathrm{c}_{\mathbf{z}}(l) \in \tilde{M}_{s\square} \,\&\, v \in \mathrm{c}_{\mathbf{z}}(l)) \equiv$$
$$\equiv \exists y^{[q]} \mathrm{L}^{[q]}(y^{[q]}, \mathscr{F}, v).$$

Лемма 1.11. Существует $[0]$-последовательность $[1]$-КДЧ $\{w_k\}_k^{[0]}$ такая, что для любых всюду определенной $[0]$-КФДП $\mathscr{F}$, НЧ q и $[q]$-КДЧ v выполнено

$$\neg\neg(\neg \underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, v) \,\&\, \neg \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, v) \vee \neg(\underline{D}_{\ell\ell}(-\infty, \mathscr{F}, v) \,\&$$
$$\&\, \bar{D}_{\ell\ell}(+\infty, \mathscr{F}, v)) \,\&\, \neg\exists k(v = w_k)) \supset \exists y^{[q]} \mathrm{L}^{[q]}(y^{[q]}, \mathscr{F}, v).$$

На основании этой леммы, замечания 1.6 и релятивизации теоремы 1.17 и замечания 1.5 можно методом близким использованному в доказательствах теорем 1.16 и 1.18 доказать следующее обобщение теоремы 1.16.

Теорема 1.19. Пусть n НЧ, а $\mathscr{F}$ $[0]$-функция такая, что

а) для почти всех $[n]$-КДЧ $x^{[n]}$ верно $\underline{D}[\mathscr{F}; 0, n](x^{[n]}) \geqq 0$ и

б) не может не существовать $[n]$-последовательность $[n]$-КДЧ $\{v_k\}_k^{[n]}$ такая, что

$$\forall x^{[n]}(\neg\exists k(x^{[n]} = v_k) \supset {}^*D_{\ell\ell}(\mathscr{F}, x^{[n]})).$$

Тогда $\mathscr{F}$ является неубывающей.

§ 2. Пространства $\mathrm{L}_1^{[n]}$ и $\mathrm{S}^{[n]}$

В [9] мы ввели в качестве конструктивных аналогов пространства интегрируемых по Лебегу на $0 \bigtriangleup 1$ функций и пространства измеримых почти всюду конечных на $0 \bigtriangleup 1$ функций — пространства L_1 и S и получили ряд результатов. В настоящем параграфе мы, используя [8], введем пространства $\mathrm{L}_1^{[n]}$ и $\mathrm{S}^{[n]}$, являющиеся по существу релятивизациями L_1 и S. В релятивизованной теории, которая по результатам ближе классической, мы докажем конструктивные аналоги теорем Д. Егорова, А. Лебега и П. Фату.

Полигональными остовами мы называем слова типа

$$a_0 \alpha a_1 \dots \alpha a_n \alpha b_0 \alpha b_1 \dots \alpha b_n ,$$

где n НЧ, $1 \leqq n$,

$$\forall i(0 \leqq i \leqq n \supset a_i \in \mathbf{Q}) \& 0 = a_0 < a_1 \dots < a_n = 1 \tag{14}$$

и

$$\forall i(0 \leqq i \leqq n \supset b_i \in \mathbf{Q}) .$$

Существует $[0]$-отображение $\mathfrak{R}$ такое, что для любых НЧ m и n и полигонального остова R,

$$\mathrm{R} \doteqdot a_0 \alpha a_1 \dots \alpha a_n \alpha b_0 \alpha b_1 \dots \alpha b_n ,$$

$\widetilde{\mathfrak{R}}_{\mathrm{R}}$ $[0; m]$-функция и выполнено

$$\forall x^{[m]} i \left(1 \leqq i \leqq n \,\&\, a_{i-1} \leqq x^{[m]} \leqq a_i \supset \right.$$
$$\left. \supset \mathfrak{R}(\mathrm{R} x^{[m]}) \doteqdot b_{i-1} + \frac{b_i - b_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} \,.\, (x^{[m]} - a_{i-1})\right).$$

Пусть k, m и t НЧ, $k \leqq m$, $\mathscr{F}$ $[k; m]$-функция.

1. $\mathscr{F}$ мы назовем $[t]$-абсолютно непрерывной (на $0 \triangle 1$), если существует $[t]$-последовательность полигональных остовов $\{\mathrm{R}_p\}_p^{[t]}$ такая, что для любых НЧ p и слова P, $\mathrm{P} \in \mathbf{B}$, выполнено

$$W(\mathscr{F} - \widetilde{\mathfrak{R}}_{\mathrm{R}_p}, \mathrm{P}, 0 \triangle 1) < 2^{-p} .$$

2. Мы заметим, что $\mathscr{F}$ является $[t]$-абсолютно непрерывной (на $0 \triangle 1$) в том и только том случае, если существует $[t]$-абсолютно непрерывная $[t]$-функция $\mathscr{G}$ такая, что для любого $[\min(m, t)]$-КДЧ v выполнено $\mathscr{G}(v) = \mathscr{F}(v)$.

Рациональными ступенчатыми остовами мы называем слова вида

$$a_0 \gamma a_1 \dots \gamma a_n \delta b_1 \gamma b_2 \dots \gamma b_n ,$$

где n положительное НЧ, верно (14) и $\forall i(1 \leqq i \leqq n \supset b_i \in \mathbf{Q})$.

Существуют $[0]$-отображения σ, Pol и $\mathfrak{E}$ и НЧ $frame$ такие, что для всякого рационального ступенчатого остова P, $\mathrm{P} \doteqdot a_0 \gamma a_1 \dots \gamma a_n \delta b_1 \gamma b_2 \dots \gamma b_n$, $\sigma(\mathrm{P}) \doteqdot \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} b_i$, $Pol(\mathrm{P})$ полигональный остов $a_0 \alpha a_1 \dots \alpha a_n \alpha c_0 \alpha c_1 \dots \alpha c_n$, для которого выполнено

$$c_0 \doteqdot 0 \,\&\, \forall i(1 \leqq i \leqq n \supset c_i \doteqdot \sum_{j=1}^{i} b_j \,.\, (a_j - a_{j-1})) ,$$

для любого АДЧ $\mathrm{S} - \mathfrak{E}(\mathrm{PS}) \simeq \mathfrak{R}(Pol(\mathrm{P})\,\mathrm{S})$, а для всяких НЧ m и $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$

верно

$$(!\llbracket\langle frame\rangle^{[m]}\rrbracket(\mathrm{P}x^{[m]}) \equiv \neg\exists i(0 \leqq i \leqq n \,\&\, x^{[m]} = a_i))\,\&$$
$$\&\,\forall i(1 \leqq i \leqq n \,\&\, a_{i-1} < x^{[m]} < a_i \supset \llbracket\langle frame\rangle^{[m]}\rrbracket(\mathrm{P}x^{[m]}) \doteqdot b_i)\,\&$$
$$\&\,((x^{[m]} < 0 \vee 1 < x^{[m]}) \supset \llbracket\langle frame\rangle^{[m]}\rrbracket(\mathrm{P}x^{[m]}) \doteqdot 0)$$

и, следовательно, $\llbracket\langle frame\rangle^{[0]}\rrbracket$ отвечает нормальному алгорифму ϑ из [9] и $[m]$-отображение $\widehat{\llbracket\langle frame\rangle^{[m]}\rrbracket}_{\mathrm{P}}$ является $[m]$-КФДП, определенной для всех $[m]$-КДЧ, которые не равны РЧ a_i, $0 \leqq i \leqq n$.

Следуя [9], мы посредством ω, λ и τ обозначим $[0]$-отображения такие, что для всяких слова P в алфавите Ξ_0, НЧ m и $[0]$-КДЧ v выполнено

$$\omega(\mathrm{P}) \simeq \frac{|\mathrm{P}|}{1+|\mathrm{P}|} \,\&\, \lambda(\mathrm{P}, m) \simeq \max(\min(\mathrm{P}, m), -m)$$

а

$$!\tau(v), \quad \tau(v) \text{ НЧ} \quad \text{и} \quad \tau(v) - 2 < |v| < \tau(v).$$

Посредством $\mathfrak{T}$ мы обозначим множество всех рациональных ступенчатых остовов. Способом, описанным в [9], мы определим на $\mathfrak{T}$ равенство $(=)$, операции сложения, вычитания, умножения и абсолютной величины $(+_0, -_0, \cdot_0, |\ldots|_0)$, положительной и отрицательной части $((\ldots)^+, (\ldots)^-)$, операцию умножения РЧ на элемент множества $\mathfrak{T}$ $(\cdot_0)$ и операции ω_0 и λ_0. Для любых $\mathrm{R} \in \mathfrak{T}$ и АДЧ S_0 и S_1, $0 \leqq \mathrm{S}_0 \leqq \mathrm{S}_1 \leqq 1$, мы обозначим ${}^0\!\int_{\mathrm{S}_0}^{\mathrm{S}_1} \mathrm{R} \rightleftharpoons (\mathfrak{E}(\mathrm{RS}_1) - \mathfrak{E}(\mathrm{RS}_0))$.

Посредством $\mathfrak{S}$ мы обозначим множество всех слов вида βkm, где k и m НЧ и $\llbracket\langle k\rangle^{[m]}\rrbracket$ $[m]$-последовательность рациональных ступенчатых остовов.

Для любого $\beta km \in \mathfrak{S}$ мы представителем этого элемента назовем $[m]$-последовательность $\{\llbracket\langle k\rangle^{[m]}\rrbracket(p)\}_p^{[m]}$ и будем писать $\dot{\mathrm{Rep}}(\{\llbracket\langle k\rangle^{[m]}\rrbracket(p)\}_p^{[m]}, \beta km)$.

Для любой $[m]$-последовательности слов в алфавите Ξ — $\{\mathrm{F}_p\}_p^{[m]}$ мы обозначим $\{\mathrm{F}_p\}_p^{[m]} \in {}^{\Pi}\mathfrak{S}$, если существует НЧ k такое, что $\beta km \in \mathfrak{S} \,\&\, \mathrm{Rep}(\{\mathrm{F}_p\}_p^{[m]}, \beta km)$.

В следующем мы часто будем вместо элементов множества $\mathfrak{S}$ пользоваться их представителями.

Очевидно, существуют $[0]$-отображения $\mathscr{G}_0$, $\mathscr{G}_1$ и $\mathscr{G}_2$ типа $(\mathfrak{S} \to \mathfrak{S})$ и $\mathscr{G}_3$, $\mathscr{G}_4$ и $\mathscr{G}_5$ типа $({}^{(2)}\mathfrak{S} \to \mathfrak{S})$, осуществляющие способом, который для представителей описан в [9], стр. 265–266, на $\mathfrak{S}$ соответственно операции абсолютной величины, положительной и отрицательной части, сложения, вычитания и умножения, причем для любых $\beta k_0 m_0$ и $\beta k_1 m_1$ из $\mathfrak{S}$

а) для НЧ i, $0 \leqq i \leqq 2$, результатом применения $\mathscr{G}_i$ к $\beta k_0 m_0$ будет слово вида $\beta l m_0$, а для НЧ i, $3 \leqq i \leqq 5$, $\mathscr{G}_i(\beta k_0 m_0 \,\square\, \beta k_1 m_1)$ будет слово вида $\beta t \max(m_0, m_1)$;

б) способом, описанным в [9], $\mathscr{G}_4$ осуществляет также операцию разности элемента множества $\mathfrak{S}$ и элемента множества $\mathfrak{T}$, а $\mathscr{G}_5$ операцию умножения элемента $\mathfrak{T}$ на элемент $\mathfrak{S}$;

в) для любого АДЧ $t\ @^{\{n+1\}}\ s$ [0]-отображение $\mathscr{G}_5$ применимо к $t\ @^{\{n+1\}}\ s \square \beta k_0 m_0$ и результатом будет $\beta k p \in \mathfrak{S}$ такое, что $p = \max(n, m_0)$ и если

$$St(t\ @^{\{n+1\}}\ s) \doteqdot l\ @^{\{n+1\}}\ \iota_0 \,\&\, j_0 \doteqdot \tau(|[\![\langle l\rangle^{[n]}]\!](0)|)\,,$$

то

$$\forall q([\![\langle k\rangle^{[p]}]\!](q) \doteqdot [\![\langle l\rangle^{[n]}]\!](q + 1 +$$
$$+ \max_{0 \leqq i \leqq q + j_0 + 2} \tau(\sigma([\![\langle k_0\rangle^{[m_0]}]\!](i)))) \cdot_0 [\![\langle k_0\rangle^{[m_0]}]\!](q + j_0 + 2))\,;$$

следовательно, $\mathscr{G}_5$ осуществляет операцию умножения АДЧ на элемент множества $\mathfrak{S}$.

В следующем мы будем [0]-отображения $\mathscr{G}_0, \mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_5$ обозначать соответственно посредством $|S|, (S)^+, (S)^-, S + T,\ S - T$ и $S \cdot T$ и для любых $\beta k_0 m_0 \in \mathfrak{S}$ и $\beta k_1 m_1 \in \mathfrak{S}$ и их представителей соответственно $\{F_{0,p}\}_p^{[m_0]}$ и $\{F_{1,p}\}_p^{[m_1]}$, $P \in \mathfrak{T}$ и АДЧ R мы посредством $\{F_{0,p}\}_p^{[m_0]} . \{F_{1,p}\}_p^{[m_1]}$ (соотв. $P . \{F_{0,p}\}_p^{[m_0]}$, соотв. $R . \{F_{0,p}\}_p^{[m_0]}$) обозначим представителя элемента $\beta k_0 m_0 . \beta k_1 m_1$ (соотв. $P . \beta k_0 m_0$, соотв. $R . \beta k_0 m_0$). Аналогичным образом мы будем поступать и у других операций.

Посредством $\bar{\omega}$ мы обозначим [0]-отображение типа $(\mathfrak{S} \to \mathfrak{S})$ такое, что для всяких $\beta k l \in \mathfrak{S}$ и $\beta p q \in \mathfrak{S}$, $\bar{\omega}(\beta k l) \doteqdot \beta p q$, верно $q = l \,\&\, \forall m([\![\langle p\rangle^{[q]}]\!](m) \doteqdot \doteqdot \omega_0([\![\langle k\rangle^{[l]}]\!](m)))$.

Пусть n и p НЧ, $\beta k m \in \mathfrak{S}$, $\{F_q\}_q^{[m]}$ его представитель, S АДЧ, а v $[p]$-КДЧ. Тогда мы будем писать $P^{[n]}(S, \beta k m, v)$ или $P^{[n]}(S, \{F_q\}_q^{[m]}, v)$ (соотв. $P_{\ell\ell}(S, \beta k m, v)$ или $P_{\ell\ell}(S, \{F_q\}_q^{[m]}, v)$), если $\forall q(![\![\langle frame\rangle^{[p]}]\!](F_q v))$ и $[\max(m, p)]$-последовательность $[p]$-КДЧ

$$\{[\![\langle frame\rangle^{[p]}]\!](F_q v)\}_q^{[\max(m,p)]}$$

$[n]$-сходится (соотв. псевдосходится) к АДЧ S.

Для любых $\beta k m \in \mathfrak{S}$, $R_0 \in \mathfrak{S}$ и $R_1 \in \mathfrak{S}$ и их представителей соответственно $\{F_p\}_p^{[m]}$, $\{G_{0,p}\}_p^{[l_0]}$ и $\{G_{1,p}\}_p^{[l_1]}$ мы обозначим

а) $\beta k m = 0$ или $\{F_p\}_p^{[m]} = 0$ (соотв. $0 \leqq \beta k m$ или $0 \leqq \{F_p\}_p^{[m]}$), если для всякого НЧ n, $m \leqq n$, для почти всех $[n]$-КДЧ $x^{[n]}$ верно: $P_{\ell\ell}(0, \beta k m, x^{[n]})$ (соотв. $\neg\neg\exists y^{[n]}(P_{\ell\ell}(y^{[n]}, \beta k m, x^{[n]}) \,\&\, 0 \leqq y^{[n]})$) и

б) $$R_0 = R_1 \rightleftharpoons (R_0 - R_1) = 0\,,\quad R_0 \leqq R_1 \rightleftharpoons 0 \leqq (R_1 - R_0)$$

и

$$\{G_{0,p}\}_p^{[l_0]} = \{G_{1,p}\}_p^{[l_1]}\,,\quad \text{если}\quad R_0 = R_1\,,$$
$$\{G_{0,p}\}_p^{[l_0]} \leqq \{G_{1,p}\}_p^{[l_1]}\,,\quad \text{если}\quad R_0 \leqq R_1\,.$$

Определения. Пусть m НЧ, $\{\mathscr{F}_k\}_k^{[m]}$ $[m]$-последовательность $[m]$-КФДП, $\{\beta t_k s_k\}_k^{[m]}$ $[m]$-последовательность элементов множества $\mathfrak{S}$, а $\beta ts \in \mathfrak{S}$.

а) Мы скажем, что $\{\mathscr{F}_k\}_k^{[m]}$ (соотв. $\{\beta t_k s_k\}_k^{[m]}$) является $[m]$-почти равномерно $[m]$-фундаментальной, если существуют $[m]$-последовательность $S_\sigma^{[m]}$-множеств $\{\mathfrak{H}_l\}_l^{[m]}$ и $[m]$-последовательность $[m]$-последовательностей НЧ $\{\{p_{l,q}\}_q^{[m]}\}_l^{[m]}$ такие, что для всяких НЧ l и $[m]$-КДЧ v, $\neg(v \in \mathfrak{H}_l)$, мера $\mathfrak{H}_l$ меньше чем 2^{-l} и выполнено $\forall k(!\mathscr{F}_k(v))$ (соотв. существует $[m]$-последовательность $[m]$-КДЧ $\{w_k\}_k^{[m]}$ такая, что $\forall k\ \mathrm{P}^{[m]}(w_k, \beta t_k s_k, v)$), и $\{p_{l,q}\}_q^{[m]}$ является регулятором фундаментальности $[m]$-последовательности $[m]$-КДЧ $\{\mathscr{F}_k(v)\}_k^{[m]}$ (соотв. $\{w_k\}_k^{[m]}$);

б) „$\{\mathscr{F}_k\}_k^{[m]}$ (соотв. $\{\beta t_k s_k\}_k^{[m]}$) $[m]$-почти равномерно $[m]$-сходится к βts" определяется аналогичным образом.

Замечание 2.1. Ввиду теоремы 4.1 из [8], если m и n НЧ, $m \leqq n$, $\{\mathscr{F}_k\}_k^{[m]}$ $[m]$-последовательность $[m]$-КФДП, а $\{\mathscr{G}_k\}_k^{[n]}$ $[n]$-последовательность $[n]$-КФДП такие, что для всякого НЧ k

а) для почти всех $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$ верно $!\mathscr{F}_k(x^{[m]}) \supset\ !\mathscr{G}_k(x^{[m]})\ \&\ \mathscr{G}_k(x^{[m]}) = \mathscr{F}_k(x^{[m]})$ и

б) для почти всех $[n]$-КДЧ $x^{[n]}$ выполнено $!\mathscr{G}_k(x^{[n]})$,

то имеет место следующее: из $[m]$-почти равномерной $[m]$-фундаментальности $\{\mathscr{F}_k\}_k^{[m]}$ следует $[n]$-почти равномерная $[n]$-фундаментальность $\{\mathscr{G}_k\}_k^{[n]}$.

Определения. Для любого НЧ n пусть $\mathbf{L}_1^{[n]}$ (соотв. $\mathbf{S}^{[n]}$) множество всех $\beta km \in \mathfrak{S}$ таких, что

$$m \leqq n\ \&\ \forall pq\left({}^0\!\!\int_0^1 \big|[\![\langle k\rangle^{[m]}]\!]\,(p) -_0 [\![\langle k\rangle^{[m]}]\!]\,(p+q)\big|_0 < 2^{-p}\right)$$

(соотв. $m \leqq n\ \&\ \forall pq({}^0\!\int_0^1 \omega_0([\![\langle k\rangle^{[m]}]\!]\,(p) -_0 [\![\langle k\rangle^{[m]}]\!]\,(p+q)) < 2^{-p})$).

Мы заметим, что $\mathbf{L}_1^{[n]} \subseteq \mathbf{S}^{[n]}$, для всякого $\beta km \in \mathbf{S}^{[n]}$ выполнено $\bar{\omega}(\beta km) \in \mathbf{L}_1^{[n]}$ и верны аналоги результатов из частей 2а), 4а) и 5а) леммы 1 из [9].

Существуют $[0]$-отображения, обозначаемые нами посредством $\int$, $\|\ldots\|_{\mathbf{L}_1}$, $\varrho_{\mathbf{L}_1}$, $\varrho_{\mathbf{S}}$, такие, что для любых НЧ n, $\beta k_0 m_0 \in \mathfrak{S}$, $\beta k_1 m_1 \in \mathfrak{S}$, их представителей соответственно $\{\mathrm{F}_{0,p}\}_p^{[m_0]}$ и $\{\mathrm{F}_{1,p}\}_p^{[m_1]}$, $\mathrm{G}_0 \in \mathfrak{T}$ и $\mathrm{G}_1 \in \mathfrak{T}$ и $[n]$-КДЧ S_0 и S_1, $0 \leqq \mathrm{S}_0 \leqq \mathrm{S}_1 \leqq 1$,

1. если $\beta k_0 m_0 \in \mathbf{L}_1^{[n]}$ и $\beta k_1 m_1 \in \mathbf{L}_1^{[n]}$, то

а) $\int$ применимо к слову $\mathrm{S}_0 \,\square\, \mathrm{S}_1 \,\square\, \beta k_0 m_0$ и выдает по нему $[n]$-КДЧ, являющееся пределом $[0]$-фундаментальной $[m_0]$-последовательности $[n]$-КДЧ

$\{{}^{0}\!\int_{S_0}^{S_1} F_{0,p}\}_p^{[m_0]}$ (результат мы будем обозначать посредством

$$\int_{S_0}^{S_1} \beta k_0 m_0 \quad \text{или} \quad \int_{S_0}^{S_1} \{F_{0,p}\}_p^{[m_0]}) \;;$$

б)
$$\|\beta k_0 m_0\|_{L_1} \simeq \int_0^1 |\beta k_0 m_0| \,,$$

$$\varrho_{L_1}(G_0 \boxplus G_1) \simeq {}^{0}\!\int_0^1 |G_0 -_0 G_1|_0$$

и

$$\varrho_{L_1}(\beta k_0 m_0 \boxplus \beta k_1 m_1) \simeq \int_0^1 |\beta k_0 m_0 - \beta k_1 m_1|$$

(мы обозначим $\|\{F_{0,p}\}_p^{[m_0]}\|_{L_1} \rightleftharpoons \|\beta k_0 m_0\|_{L_1}$);

2. если $\beta k_0 m_0 \in S^{[n]}$ и $\beta k_1 m_1 \in S^{[n]}$, то

$$\varrho_S(\beta k_0 m_0 \boxplus \beta k_1 m_1) \simeq \int_0^1 \bar{\omega}(\beta k_0 m_0 - \beta k_1 m_1)$$

и

$$\varrho_S(G_0 \boxplus G_1) \simeq {}^{0}\!\int_0^1 \omega_0(G_0 -_0 G_1)$$

(мы обозначим

$$\varrho_S(\{F_{0,p}\}_p^{[m_0]} \boxplus \{F_{1,p}\}_p^{[m_1]}) \rightleftharpoons \varrho_S(\beta k_0 m_0 \boxplus \beta k_1 m_1)) \,.$$

Мы заметим, что эти [0]-отображения обладают свойствами, аналогичными описанным в частях 2б), 4б) и 5б) леммы 1 из [9].

Обозначения. Пусть m и n НЧ, $m \leqq n$, а $\{F_p\}_p^{[m]}$ $[m]$-последовательность слов в алфавите Ξ. Тогда мы будем писать $\{F_p\}_p^{[m]} \in {}^{\text{п}}L_1^{[n]}$ (соотв. $\{F_p\}_p^{[m]} \in {}^{\text{п}}S^{[n]}$), если существует НЧ k такое, что $\beta k m \in \mathfrak{S}$ & Rep $(\{F_p\}_p^{[m]}, \beta k m)$ и $\beta k m \in L_1^{[n]}$ (соотв. $\beta k m \in S^{[n]}$).

Замечание 2.2. Множества ${}^{\text{п}}L_1^{[0]}$ и ${}^{\text{п}}S^{[0]}$ отвечают множествам L_1 и S из [9] (различия в определениях являются несущественными). Легко усмотреть, что релятивизации результатов, полученных нами для L_1 и S в [9] и последующих работах, верны для ${}^{\text{п}}L_1^{[n]}$ и ${}^{\text{п}}S^{[n]}$, а если в формулировках перейти от представителей к элементам множества $\mathfrak{S}$, то и для $L_1^{[n]}$ и $S^{[n]}$.

Теорема 2.1. Пусть n и s НЧ, $n < s$. Тогда $(L_1^{[n]}, \varrho_{L_1})$ (соотв. $(S^{[n]}, \varrho_S)$) $[n]$-полное $[n]$-сепарабельное $[n]$-метрическое пространство, которое является изометрически изоморфным стандартному $[n]$-пополнению (см. [8], § 6) [0]-сепарабельного [0]-метрического пространства $(\mathfrak{T}, \varrho_{L_1})$ (соотв. $(\mathfrak{T}, \varrho_S)$), и, следовательно, всякая псевдофундаментальная $[n]$-последовательность элементов этого пространства является $[s]$-фундаментальной и — ввиду этого — $[s]$-сходится в пространстве $(\mathrm{L}_1^{[s]}, \varrho_{\mathrm{L}_1})$ (соотв. $(\mathrm{S}^{[s]}, \varrho_{\mathrm{S}})$).

Ввиду того, что для всякого $\{\mathrm{F}_p\}_p^{[n]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{S}^{[n]}$ выполнено $\{\omega_0(\mathrm{F}_p)\}_p^{[n]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{L}_1^{[n]}$, и замечания 2.1 легко доказать следующее утверждение.

Теорема 2.2. Пусть $\{\mathrm{F}_p\}_p^{[n]} \in {}^{\mathrm{n}}\mathrm{S}^{[n]}$. Тогда $[n]$-последовательность $[n]$-КФДП $\{[\![\widetilde{\langle frame\rangle^{[n]}}]\!]_{\mathrm{F}_p}\}_p^{[n]}$ является $[n]$-почти равномерно $[n]$-фундаментальной и, следовательно, существуют $[n]$-последовательность $S_\sigma^{[n]}$-множеств $\{\mathfrak{H}_k\}_k^{[n]}$ и для всякого НЧ m, $n \leqq m$, $[m]$-последовательность $[n]$-равномерно непрерывных $[m]$-функций $\{\mathscr{F}_k\}_k^{[m]}$ такие, что для всякого НЧ k мера $\mathfrak{H}_k$ меньше чем 2^{-k},

$$\mathfrak{H}_{k+1} \subseteq \mathfrak{H}_k \quad \text{и} \quad \forall x^{[m]}(\neg(x^{[m]} \in \mathfrak{H}_k) \supset \mathscr{F}_k(x^{[m]}) =$$
$$= \mathscr{F}_{k+1}(x^{[m]})\ \&\ \mathrm{P}^{[n]}(\mathscr{F}_k(x^{[m]}), \{\mathrm{F}_p\}_p^{[n]}, x^{[m]}))\,.$$

Замечание 2.3. 1. Ввиду теоремы 2.2 и замечания 1.4 существует $\varnothing$-ОРФ val такая, что для всяких $\beta km \in \mathrm{S}^{[m]}$ и НЧ n, $m \leqq n$, $[\![\langle val(k, m, n)\rangle^{[n+1]}]\!]$ является $[n+1; n]$-КФДП, определенной для почти всех $[n]$-КДЧ, и такой, что

$$\forall x^{[n]}((![\![\langle val(k, m, n)\rangle^{[n+1]}]\!](x^{[n]}) \supset$$
$$\supset \mathrm{P}^{[m]}([\![\langle val(k, m, n)\rangle^{[n+1]}]\!](x^{[n]}), \beta km, x^{[n]}))\ \&$$
$$\&\ [\![\langle val(k, m, n)\rangle^{[n+1]}]\!](x^{[n]}) \simeq [\![\langle val(k, m, n+1)\rangle^{[n+2]}]\!](x^{[n]}))\,.$$

Мы будем $[\![\langle val(k, m, n)\rangle^{[n+1]}]\!]$ обозначать посредством $Val[\beta km; n]$ или $Val[\{[\![\langle k\rangle^{[m]}]\!](p)\}_p^{[m]}; n]$.

2. Для любых $\beta k_0 m_0 \in \mathrm{S}^{[n]}$ и $\beta k_1 m_1 \in \mathrm{S}^{[n]}$ выполнено $\beta k_0 m_0 = \beta k_1 m_1$ (соотв. $\varrho_{\mathrm{S}}(\beta k_0 m_0 \boxplus \beta k_1 m_1) = 0$) в том и только том случае, если для почти всех $[n]$-КДЧ $x^{[n]}$ верно $Val[\beta k_0 m_0; n](x^{[n]}) = Val[\beta k_1 m_1; n](x^{[n]})$.

3. Верна релятивизация следствия теоремы 6 из [9].

На основании релятивизации теоремы 4 из [9] мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2.3. Пусть $\{\mathscr{F}_k\}_k^{[m]}$ $[m]$-последовательность $[m]$-равномерно непрерывных $[m]$-функций, которая является $[m]$-почти равномерно $[m]$-фундаментальной. Тогда существует $\beta lm \in \mathrm{S}^{[m]}$ такое, что $\{\mathscr{F}_k\}_k^{[m]}$ $[m]$-почти равномерно $[m]$-сходится к βlm.

Обозначение. Пусть n и t НЧ, $\mathscr{F}$ $[n]$-функция, $\beta km \in \mathfrak{S}$, а $\{\mathrm{F}_p\}_p^{[m]}$ его представитель. Тогда $\text{Д}^{[t]}(\mathscr{F}, \beta km)$ (соотв. $\text{Д}^{[t]}(\mathscr{F}, \{\mathrm{F}_p\}_p^{[m]})$) обозначает: выполнено $\text{Д}^{[t]}(\mathscr{F})$ (см. § 1) и для почти всех $[t]$-КДЧ $x^{[t]}$ верно $\exists p y^{[p]}(\mathrm{P}_{\ell\ell}(y^{[p]}, \beta km, x^{[t]})\ \&\ D_{\ell\ell}(y^{[p]}, \mathscr{F}, x^{[t]}))$ (ср. [13], стр. 688).

Следующее утверждение является следствием теоремы 2.3.

Теорема 2.4. Пусть n и m НЧ, $n \leqq m$, а $\mathcal{F}$ $[n]$-функция такая, что Д$^{[m]}(\mathcal{F})$. Тогда существует $\beta km \in \mathrm{S}^{[m]}$, для которого выполнено Д$^{[m]}(\mathcal{F}, \beta km)$ и, следовательно, $\forall t(m \leqq t \supset$ Д$^{[t]}(\mathcal{F}, \beta km))$.

На основании результатов из [10], [11] и [14] мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2.5. Пусть n НЧ, а $\{\beta k_p m_p\}_p^{[n]}$ $[n]$-последовательность элементов множества $\mathrm{S}^{[n]}$. Тогда

1) если $[n]$-последовательность $[n]$-КДЧ

$$\{\sum_{p=1}^{s} \varrho_{\mathrm{S}}(\beta k_p m_p \boxplus \beta k_{p-1} m_{p-1})\}_s^{[n]}$$

$[n]$-сходится, то $\{\beta k_p m_p\}_p^{[n]}$ является $[n]$-почти равномерно $[n]$-фундаментальной и

2. если $\{\beta k_p m_p\}_p^{[n]}$ является $[n]$-почти равномерно $[n]$-фундаментальной, то она является $[n]$-фундаментальной в $(\mathrm{S}^{[n]}, \varrho_{\mathrm{S}})$ и для всякого $\beta tm \in \mathrm{S}^{[n]}$ верно: $\{\beta k_p m_p\}_p^{[n]}$ $[n]$-почти равномерно $[n]$-сходится к βtm в том и только том случае, если $\varrho_{\mathrm{S}}(\beta k_p m_p \boxplus \beta tm) \xrightarrow[p \to \infty]{[n]} 0$.

Теорема 2.6. Пусть $\{\mathcal{F}_n\}_n^{[0]}$ $[0]$-последовательность $[0]$-равномерно непрерывных $[0]$-функций такая, что для почти всех $[2]$-КДЧ $x^{[2]}$ $[0]$-последовательность $[2]$-КДЧ $\{Op[\mathcal{F}_n](x^{[2]})\}_n^{[0]}$ является псевдофундаментальной. Тогда $[0]$-последовательность $[0]$-равномерно непрерывных $[0; 1]$-функций $\{Op[\mathcal{F}_n]\}_n^{[0]}$ является $[1]$-почти равномерно $[1]$-фундаментальной и, следовательно, существует $\beta k1 \in \mathrm{S}^{[1]}$ такое, что $\{Op[\mathcal{F}_n]\}_n^{[0]}$ $[1]$-почти равномерно $[1]$-сходится к $\beta k1$. (Op введено в замечании 5.4 из [8].)

Доказательство. Пусть m НЧ. Мы построим возрастающую $[0]$-последовательность НЧ $\{l_t\}_t^{[0]}$ и всюду определенное $[0]$-отображение G такие, что для всяких НЧ p, q и i, $p \leqq q \,\&\, 1 \leqq i \leqq 2^{l_q}$, выполнено $\forall ab(|a - b| \leqq 2^{-l_q} \supset \supset |\mathcal{F}_p(a) - \mathcal{F}_p(b)| < 2^{-m-3}) \,\&\, (G(pqi) \mathrel{\overline{\overline{\,\cdot\,}}} \Lambda \supset |\mathcal{F}_p(i\,.\,2^{-l_q}) - \mathcal{F}_q(i\,.\,2^{-l_q})| > > 2^{-m-1}) \,\&\, (\neg(G(pqi) \mathrel{\overline{\overline{\,\cdot\,}}} \Lambda) \supset |\mathcal{F}_p(i\,.\,2^{-l_q}) - \mathcal{F}_q(i\,.\,2^{-l_q})| < 3\,.\,2^{-m-2})$.

Мы определим $\mathbf{N} \rightleftharpoons \bigwedge S(\exists sqi(s < q \,\&\, 1 \leqq i \leqq 2^{l_q} \,\&\, (S \mathrel{\overline{\overline{\,\cdot\,}}} s \,\square\, (i - 1)/2^{l_q} \vartriangle i/2^{l_q}) \,\&\, \exists p(s \leqq p < q \,\&\, G(pqi) \mathrel{\overline{\overline{\,\cdot\,}}} \Lambda) \,\&\, \neg\exists tpj(s \leqq t < p < q \,\&\, G(tpj) \mathrel{\overline{\overline{\,\cdot\,}}} \Lambda \,\&\, 1 \leqq \leqq j \leqq 2^{l_p} \,\&\, (i - 1)/2^{l_q} \vartriangle i/2^{l_q} \subseteq (j - 1)/2^{l_p} \vartriangle j/2^{l_p})))$.

Тогда $\mathbf{N}$ последовательность $\varnothing$-рекурсивно перечислимых множеств неперекрывающихся рациональных сегментов, содержащихся в $0 \vartriangle 1$, такая, что $\forall sk(\mathrm{c}_{\blacksquare}(k) \in \tilde{\mathbf{N}}_{s+1\square} \supset \exists l(\mathrm{c}_{\blacksquare}(l) \in \tilde{\mathbf{N}}_{s\square} \,\&\, \mathrm{c}_{\blacksquare}(k) \subseteq \mathrm{c}_{\blacksquare}(l)))$ и для любого $[2]$-КДЧ $x^{[2]}$ из

$$\forall s \neg\neg\exists k(\mathrm{c}_{\blacksquare}(k) \in \tilde{\mathbf{N}}_{s\square} \,\&\, x^{[2]} \in \mathrm{c}_{\blacksquare}(k))$$

следует, что $[0]$-последовательность $[2]$-КДЧ

$$\{Op[\mathscr{F}_n]\,(x^{[2]})\}_n^{[0]}$$

не является псевдофундаментальной.

Следовательно, ввиду нашего предположения и теоремы 1.3 $[1]$-осуществимо НЧ s_m такое, что $\forall pqa(s_m \leqq p < q \,\&\, (a = 0 \vee a = 1) \supset |\mathscr{F}_p(a) - \mathscr{F}_q(a)| < 2^{-m-2}) \,\&\, \forall p(\sum\limits_{\substack{0 \leqq t \leqq p \\ c_{\mathbf{z}}(t) \in \tilde{\mathrm{N}}_{s_m \square}}} |c_{\mathbf{z}}(t)| < 2^{-m-2})$.

Но тогда для всякого $[1]$-КДЧ $x^{[1]}$ и любых НЧ p и q, $s_m \leqq p < q$, верно $\neg\exists k(c_{\mathbf{z}}(k) \in \tilde{\mathrm{N}}_{s_m\square} \,\&\, x^{[1]} \in c_{\mathbf{z}}(k)) \supset |Op[\mathscr{F}_p]\,(x^{[1]}) - Op[\mathscr{F}_q]\,(x^{[1]})| < 2^{-m}$.

Этим ввиду релятивизации замечания 1 из [10] и теоремы 2.3 доказательство закончено.

Пример 2.1. Существует $[0]$-последовательность псевдоравномерно непрерывных $[0]$-функций $\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]}$ такая, что для всяких НЧ m и $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$ $[0]$-последовательность $[m]$-КДЧ $\{Op[\mathscr{F}_n]\,(x^{[m]})\}_n^{[0]}$ является псевдофундаментальной и для всякого $[1]$-КДЧ $x^{[1]}$ верно

$$Op[\mathscr{F}_n]\,(x^{[1]}) \xrightarrow[n\to\infty]{[1]} 0$$

и вместе с тем $[0]$-последовательность $[1]$-равномерно непрерывных $[0; 1]$-функций $\{Op[\mathscr{F}_n]\}_n^{[0]}$ не является $[1]$-почти равномерно $[1]$-фундаментальной.

Следствием теоремы 2.6 является следующий конструктивный аналог теоремы Д. Егорова ([3], стр. 111).

Теорема 2.7. Пусть m НЧ, а $\{\beta k_n l_n\}_n^{[m]}$ $[m]$-последовательность элементов $\mathbf{S}^{[m]}$ такая, что для почти всех $[m + 2]$-КДЧ $x^{[m+2]}$ $[m + 3]$-последовательность $[m + 2]$-КДЧ $\{Val\,[\beta k_n l_n;\ m + 2]\,(x^{[m+2]})\}_n^{[m+3]}$ является псевдофундаментальной.

Тогда существует $\beta k(m + 1) \in \mathbf{S}^{[m+1]}$ такое, что $\{\beta k_n l_n\}_n^{[m]}$ $[m + 1]$-почти равномерно $[m + 1]$-сходится к $\beta k(m + 1)$ и, следовательно, $\{\beta k_n l_n\}_n^{[m]}$ $[m + 1]$-сходится к $\beta k(m + 1)$ в пространстве $(\mathbf{S}^{[m+1]}, \varrho_{\mathbf{S}})$.

Доказательство. Мы можем ограничиться случаем $m = 0$. Согласно теореме 2.2 и замечанию 1 из [10] существуют $[0]$-последовательность $[0]$-равномерно непрерывных $[0]$-функций $\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]}$ и $[0]$-последовательность $S_\sigma^{[0]}$-множеств $\{\mathfrak{H}_n\}_n^{[0]}$ такие, что для всякого НЧ n мера $\mathfrak{H}_n$ меньше чем 2^{-n}, $\forall p x^{[p]}(\neg(x^{[p]} \in \mathfrak{H}_n) \supset \mathrm{P}^{[p]}(Op[\mathscr{F}_n]\,(x^{[p]}),\ \beta k_n l_n,\ x^{[p]}))$ и $\mathfrak{H}_{n+1} \subseteq \mathfrak{H}_n$.

Но тогда ввиду наших предположений и ввиду теоремы 2.6 существует $\beta k 1 \in \mathbf{S}^{[1]}$ такое, что $[0]$-последовательность $\{Op[\mathscr{F}_n]\}_n^{[0]}$ $[1]$-почти равномерно $[1]$-сходится к $\beta k 1$. Следовательно, $\{\beta k_n l_n\}_n^{[0]}$ тоже $[1]$-почти равномерно $[1]$-сходится к $\beta k 1$. Остается применить теорему 2.5.

На основании этой теоремы и релятивизации леммы 3 из [9] и следствия теоремы 2 из [14] мы получаем следующий конструктивный вариант теоремы А. Лебега.

Теорема 2.8. Пусть m НЧ, $\{\beta k_n l_n\}_n^{[m]}$ $[m]$-последовательность элементов множества $\mathbf{S}^{[m]}$, а $\beta st \in \mathbf{L}_1^{[m+1]}$ такие, что $\forall n(|\beta k_n l_n| \leqq \beta st)$ и для почти всех $[m+2]$-КДЧ $x^{[m+2]}$ $[m+3]$-последовательность $[m+2]$-КДЧ $\{Val[\beta k_n l_n; m+2](x^{[m+2]})\}_n^{[m+3]}$ является псевдофундаментальной.

Тогда существует $[0]$-последовательность элементов множества $\mathbf{L}_1^{[m+1]}$ — $\{\beta p_n q_n\}_n^{[0]}$ и $\beta pq \in \mathbf{L}_1^{[m+1]}$ такие, что $\forall n(\beta k_n l_n = \beta p_n q_n)$ и $\{\beta p_n q_n\}_n^{[0]}$ $[m+1]$-сходится в пространстве $(\mathbf{L}_1^{[m+1]}, \varrho_{\mathbf{L}_1})$ к βpq.

Определение. Пусть n и t НЧ, $t \leqq n$, а $\mathscr{F}$ $[n]$-функция. Тогда мы скажем, что $\mathscr{F}$ является $[t]$-измеримой (соотв. $[t]$-интегрируемой по Лебегу), если существует $\beta km \in \mathbf{S}^{[t]}$ (соотв. $\beta km \in \mathbf{L}_1^{[t]}$) такое, что для почти всех $[t]$-КДЧ $x^{[t]}$ верно $\mathrm{P}_{\ell\ell}(\mathscr{F}(x^{[t]}), \beta km, x^{[t]})$.

Замечание 2.4. Пусть n и t НЧ, $t < n$, а $\mathscr{F}$ $[t]$-измеримая (соотв. $[t]$-интегрируемая по Лебегу) $[n]$-функция. Тогда согласно теореме 2.2 и теореме 4.1 из [8] $\mathscr{F}$ является $[t+1]$-измеримой (соотв. $[t+1]$-интегрируемой по Лебегу).

Пример 2.2. Существуют $[0]$-функция $\mathscr{F}_0$ и $[1]$-функция $\mathscr{F}_1$ такие, что $\forall x^{[0]}(\mathscr{F}_0(x^{[0]}) = \mathscr{F}_1(x^{[0]})\,\&\,|\mathscr{F}_0(x^{[0]})| \leqq 1)$ и вместе с тем $\mathscr{F}_1$ не является $[1]$-измеримой. (Ср. теорему 5.11 из [8]).

Лемма 2.1. Пусть m НЧ, а $\{\mathrm{F}_p\}_p^{[m]} \in {}^{\Pi}\mathbf{L}_1^{[m]}$. Тогда $[m]$-последовательность $[0]$-равномерно непрерывных $[0; m]$-функций $\{\widetilde{\mathfrak{C}}_{\mathrm{F}_p}\}_p^{[m]}$ $[0]$-равномерно сходится и, следовательно, существует $[m]$-равномерно непрерывная $[m]$-функция $\mathscr{G}$ такая, что для любого $[m]$-КДЧ v из $0 \triangle 1$ выполнено $\mathscr{G}(v) = \int_0^v \{\mathrm{F}_p\}_p^{[m]}$.

Теорема 2.9. Пусть n и t НЧ, а $\mathscr{F}$ $[n]$-функция. Тогда

1. $\mathscr{F}$ $[t]$-абсолютно непрерывна в том и только том случае, если существует $\beta kl \in \mathbf{L}_1^{[t]}$ такое, что

$$\forall a\left(0 \leqq a \leqq 1 \supset \mathscr{F}(a) - \mathscr{F}(0) = \int_0^a \beta kl\right); \tag{15}$$

2) если $\beta kl \in \mathbf{L}_1^{[t]}$ такое, что (15), то верно $\text{Д}^{[t]}(\mathscr{F}, \beta kl)$, для всяких $[n]$-КДЧ v и w, $0 \leqq v < w \leqq 1$, выполнено $\mathrm{Var}(\int_v^w |\beta kl|, \mathscr{F}, v \triangle w)$ и $\mathscr{F}$ $[n+1]$-абсолютно непрерывна.

(Теорема 2.9 является релятивизацией теоремы 2 из [9] и следствия теоремы 2 из [13].)

Определение. Пусть n НЧ. $[n]$-функцию $\mathscr{F}$ мы назовем $[n]$-сингулярной, если она является $[n]$-функцией $[n]$-ограниченной вариации (на $0 \vartriangle 1$) и выполнено $Д^{[n]}(\mathscr{F}, \{0 \,\gamma\, 1 \,\delta\, 0\}_k^{[0]})$ (ср. [13], стр. 689).

Замечание 2.5. Пусть m НЧ, $\{\mathrm{F}_k\}_k^{[m]} \in {}^{\mathbf{\Pi}}\mathbf{S}^{[m]}$. Тогда согласно лемме 1 из [9]

$$\forall p(\{\lambda_0(\mathrm{F}_{k+p+1}, p)\}_k^{[m]} \in {}^{\mathbf{\Pi}}\mathbf{L}_1^{[m]}) .$$

Если имеет место

$$\neg\neg\exists q\ \forall p\left(\int_0^1 |\{\lambda_0(\mathrm{F}_{k+p+1}, p)\}_k^{[m]}| \leqq q\right),$$

то мы на основании теоремы 2.1 получаем: существует $\{\mathrm{G}_l\}_l^{[m+1]} \in {}^{\mathbf{\Pi}}\mathbf{L}_1^{[m+1]}$, для которого выполнено $\{\mathrm{F}_k\}_k^{[m]} = \{\mathrm{G}_l\}_l^{[m+1]}$ и

$$\int_0^1 |\{\lambda_0(\mathrm{F}_{k+p+1}, p)\}_k^{[m]} - \{\mathrm{G}_l\}_l^{[m+1]}| \xrightarrow[p\to\infty]{[m+1]} 0 .$$

Ввиду этого, теорем 1.9, 2.4 и 2.9, леммы 2.1 и релятивизации замечания 1 из [12] верно следующее утверждение.

Теорема 2.10. Пусть n НЧ, а $\mathscr{F}$ $[n]$-функция квазислабо ограниченной вариации (на $0 \vartriangle 1$). Тогда существуют $\beta k(n+1) \in \mathbf{S}^{[n+1]}$ и $\beta l(n+2) \in \mathbf{L}_1^{[n+2]}$, $[n+2]$-абсолютно непрерывная $[n+2]$-функция $\mathscr{G}_0$ и $[n+2]$-сингулярная $[n+2]$-функция $\mathscr{G}_1$ такие, что $\beta k(n+1) = \beta l(n+2)\ \&\ Д^{[n+1]}(\mathscr{F}, \beta k(n+1))\ \&$ $\&\ Д^{[n+2]}(\mathscr{F}, \beta l(n+2))\ \&\ Д^{[n+2]}(\mathscr{G}_0, \beta l(n+2))$ и $\forall x^{[n]}(\mathscr{F}(x^{[n]}) = \mathscr{G}_0(x^{[n]}) +$ $+ \mathscr{G}_1(x^{[n]}))$.

Пример 2.3. Существуют неубывающая $[0]$-функция $\mathscr{F}$, $[0]$-функция $\mathscr{H}_0$ и $[1]$-функция $\mathscr{H}_1$ такие, что $\forall x^{[0]} D^{[0]}(\mathscr{H}_0(x^{[0]}), \mathscr{F}, x^{[0]})\ \&\ \forall x^{[1]} D^{[1]}(\mathscr{H}_1(x^{[1]}), \mathscr{F}, x^{[1]})$, $\mathscr{H}_0$ не является $[0]$-измеримой и $\mathscr{H}_1$ не является $[1]$-интегрируемой по Лебегу и, следовательно, $\mathscr{F}$ нельзя представить в виде суммы $[1]$-абсолютно непрерывной и $[1]$-сингулярной $[1]$-функций.

Замечание 2.6. 1. Пусть l НЧ. Тогда словарные предикаты

$$\neg\exists kn((T \doteqdot \beta kn)\ \&\ n \leqq l\ \&\ T \in \mathfrak{S}) ,$$

$$\neg(T \in \mathbf{S}^{[l]}) , \qquad \neg(T \in \mathbf{L}_1^{[l]}) ,$$

$$\neg(T \in \mathbf{S}^{[l]}\ \&\ T = 0) \quad \text{и} \quad \neg(T \in \mathbf{S}^{[l]}\ \&\ 0 \leqq T)$$

являются $\varnothing^{(l+1)}$-частичнорекурсивными.

2. Существует НЧ $Lint$ такое, что для всяких НЧ l и слова Т в алфавите Ξ

а) $$!\llbracket \langle Lint \rangle^{[l+2]} \rrbracket (\mathrm{T})$$

тогда и только тогда, когда $T \in S^{[l]}$ и для $\{F_k\}_k^{[s]} \in {}^{\text{п}}\mathfrak{S}$ и слов U и V таких, что

$$\mathrm{Rep}(\{F_k\}_k^{[s]}, T) \,\&\, U \in {}^*\mathbf{D}^{[s+1]} \,\&\, V \in {}^*\mathbf{D}^{[s+1]} \,\&$$

$$\& \,\mathrm{Sup}\left(U, \bigwedge y^{[s]}\left(\neg\neg\exists m\left(y^{[s]} \mp \int_0^1 (\{\lambda_0(F_{k+m+1}, m)\}_k^{[s]})^+\right)\right)\right) \,\&$$

$$\& \,\mathrm{Sup}\left(V, \bigwedge y^{[s]}\left(\neg\neg\exists m\left(y^{[s]} \mp \int_0^1 (\{\lambda_0(F_{k+m+1}, m)\}_k^{[s]})^-\right)\right)\right), \qquad (16)$$

выражение $U - (V)$ осмыслено;

б) если $!\llbracket\langle Lint\rangle^{[l+2]}\rrbracket(T)$, то не могут не существовать $\{F_k\}_k^{[s]} \in {}^{\text{п}}\mathfrak{S}$ и слова U и V такие, что (16) и $\llbracket\langle Lint\rangle^{[l+2]}\rrbracket(T) \mp U - (V)$.

3. Ввиду замечаний 2.3 и 2.5 для всяких НЧ l, $\beta kl \in S^{[l]}$ и $\beta ts \in S^{[l]}$

а) если $0 \leqq \beta kl$, то

$$!\llbracket\langle Lint\rangle^{[l+2]}\rrbracket(\beta kl);$$

б) если $\beta kl = \beta ts$, то

$$(!\llbracket\langle Lint\rangle^{[l+2]}\rrbracket(\beta kl) \equiv !\llbracket\langle Lint\rangle^{[l+2]}\rrbracket(\beta ts)) \,\&$$

$$\& \,(!\llbracket\langle Lint\rangle^{[l+2]}\rrbracket(\beta kl) \supset \llbracket\langle Lint\rangle^{[l+2]}\rrbracket(\beta kl) = \llbracket\langle Lint\rangle^{[l+2]}\rrbracket(\beta ts));$$

в) существует $\beta pq \in L_1^{[l+1]}$ такое, что $\beta kl = \beta pq$, в том и только том случае, если

$$!\llbracket\langle Lint\rangle^{[l+2]}\rrbracket(\beta kl) \,\&\, \llbracket\langle Lint\rangle^{[l+2]}\rrbracket(\beta kl) \in \mathbf{D}^{[l+1]};$$

г) существует $\beta pq \in L_1^{[l]}$ такое, что $\beta kl = \beta pq$, в том и только том случае, если существует $[l]$-КДЧ v такое, что $\llbracket\langle Lint\rangle^{[l+2]}\rrbracket(|\beta kl|) = v$.

На основании замечания 2.6 и теорем 2.7 и 2.8 мы получаем следующий конструктивный вариант леммы П. Фату.

Теорема 2.11. Пусть m НЧ, а $\{\beta k_n l_n\}_n^{[m]}$ $[m]$-последовательность элементов множества $S^{[m]}$ такая, что $\forall n(0 \leqq \beta k_n l_n)$ и для почти всех $[m+2]$-КДЧ $x^{[m+2]}$ $[m+3]$-последовательность $[m+2]$-КДЧ

$$\{Val[\beta k_n l_n; m+2](x^{[m+2]})\}_n^{[m+3]}$$

является псевдофундаментальной. Тогда существует $\beta k(m+1) \in S^{[m+1]}$ такое, что $\{\beta k_n l_n\}_n^{[m]}$ $[m+1]$-сходится к $\beta k(m+1)$ в пространстве $(S^{[m+1]}, \varrho_S)$ и для любых НЧ p и слова P, $\mathrm{Sup}(P, \bigwedge T(\neg\neg\exists n(p \leqq n \,\&\, \llbracket\langle Lint\rangle^{[m+2]}\rrbracket(\beta k_n l_n) \mp T)))$, выполнено $\llbracket\langle Lint\rangle^{[m+3]}\rrbracket(\beta k(m+1)) \leqq P$.

Пример 2.4. Существуют [0]-равномерно непрерывная [0]-функция $\mathscr{F}$, [0]-функция $\mathscr{G}_0$ и [1]-функция $\mathscr{G}_1$ такие, что

$$\forall x^{[0]} D^{[0]}(\mathscr{G}_0(x^{[0]}), \mathscr{F}, x^{[0]}) \,\&\, \forall x^{[1]} D^{[1]}(\mathscr{G}_1(x^{[1]}), \mathscr{F}, x^{[1]})$$

и вместе с тем $\mathscr{G}_1$ не является [1]-измеримой.

Литература

[1] Saks S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] Jarník V.: Diferenciální počet, Praha 1953.

[3] Натансон И. П.: Теория функций вещественной переменной, Москва, 1957.

[4] Цейтин Г. С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 67 (1962), 295—361.

[5] Заславский И. Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, там же, 385—457.

[6] Заславский И. Д. и Цейтин Г. С.: О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, там же, 458—502.

[7] Кушнер Б. А.: Некоторые свойства квазичисел и операторов из квазичисел в квазичисла, ДАН СССР 171 (1967), 275—277.

[8] Демут О., Крыл Р. и Кучера А.: Об использовании теории функций частично-рекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике, Acta Univ. Carolinae, Mathem. et Physica 19 (1978), 15—60.

[9] Демут О.: Пространства $\mathbf{L}_r$ и $\mathbf{S}$ в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae 10 (1969), 261—284.

[10] Демут О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, там же, 10 (1969), 463—492.

[11] Демут О.: Об интегрируемости производных от конструктивных функций, там же, 11 (1970), 667—691.

[12] Демут О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суммы сингулярной а и абсолютно непрерывной функции, там же, 12 (1971), 587—610.

[13] Демут О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, там же, 12 (1971), 687—711.

[14] Демут О.: О конструктивном аналоге связи измеримости множеств и функций по Лебегу, там же, 14 (1973), 377—396.

[15] Демут О., Немечкова Л.: О конструктивном аналоге свойства (T_1), там же, 14 (1973), 421—439.

[16] Демут О.: О конструктивных псевдочислах, там же, 16 (1975), 315—331.

[17] Демут О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, там же, 16 (1975), 583—599.

[18] Демут О.: О конструктивном аналоге теоремы Данжуа-Янга о производных числах, там же, 17 (1976), 111—126.