Jaroslav Hančl; Lukáš Novotný; Jan Šustek

22. ročník Mezinárodní matematické souteže Vojtěcha Jarníka

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 57 (2012), No. 4, 316–326

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/143217

22. ročník Mezinárodní matematické soutěže Vojtěcha Jarníka

Jaroslav Hančl, Lukáš Novotný, Jan Šustek, Ostrava

1. Úvod

Dne 30. 3. 2012 se v Ostravě uskutečnil již 22. ročník Mezinárodní matematické soutěže Vojtěcha Jarníka. Jedná se o jednu z nejstarších matematických soutěží tohoto typu v Evropské unii. Je určena vysokoškolským studentům matematiky. Celou soutěž řídí mezinárodní porota složená z delegátů účastnících se univerzit.

Soutěžící jsou rozděleni do dvou kategorií. V první kategorii soutěží studenti prvních a druhých ročníků, ve druhé kategorii soutěží starší studenti. Na vyřešení čtyř úloh mají soutěžící čtyři hodiny.

Letošního 22. ročníku se účastnilo 153 studentů ze 41 univerzit ze 17 států. Pravidelně se účastní nebo účastnili i úspěšní řešitelé Mezinárodní matematické olympiády, např. Lisa Sauermann (4 zlaté medaile + 1 stříbrná), Przemysław Mazur (3 zlaté), Pavlo Mishchenko (2 zlaté), František Konopecký (zlatá + stříbrná) nebo Jaromír Kuben (stříbrná + 2 bronzové).

2. Soutěžní úlohy

První kategorie

Úloha 1. Nechť $f\colon [0,1] \to [0,1]$ je diferencovatelná funkce taková, že $|f'(x)| \neq 1$ pro všechna $x \in [0,1]$. Dokažte, že existují jediné dva body $\alpha, \beta \in [0,1]$ takové, že $f(\alpha) = \alpha$ a $f(\beta) = 1 - \beta$.

[10 bodů]

Úloha 2. Najděte všechny celočíselné matice A typu 2×2 mající následující vlastnosti:

1. prvky matice A jsou (kladná) prvočísla,
2. existuje celočíselná matice B typu 2×2 taková, že $A = B^2$ a determinant matice B je druhou mocninou prvočísla.

[10 bodů]

Prof. RNDr. Jaroslav Hančl, CSc., Mgr. Lukáš Novotný, RNDr. Jan Šustek, Ph.D., Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě, 30. dubna 22, 701 03 Ostrava 1, e-mail: `hancl@osu.cz, lukas.novotny@osu.cz, jan.sustek@osu.cz`

Soutěžící v učebně

Úloha 3. Najděte nejmenší reálné číslo C takové, že nerovnost

$$\frac{x}{\sqrt{yz}} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{y}{\sqrt{zx}} \cdot \frac{1}{y+1} + \frac{z}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{z+1} \leq C$$

platí pro všechna kladná reálná čísla x, y a z s vlastností

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1\,.$$

[10 bodů]

Úloha 4. Najděte všechna přirozená čísla n pro která existuje přirozené číslo k takové, že dekadický zápis čísla n^k začíná a končí stejnou číslicí. [10 bodů]

Druhá kategorie

Úloha 1. Nechť $f\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ je nerostoucí funkce taková, že

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(2^{n+1})}{f(2^n)} < \frac{1}{2}\,.$$

Dokažte, že

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

[10 bodů]

Úloha 2. Nechť M je třídiagonální matice typu 10×10,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že M má právě devět kladných reálných vlastních čísel (počítáno s násobností). [10 bodů]

Úloha 3. Nechť $(A, +, \cdot)$ je okruh s jednotkou mající následující vlastnost: pro všechna $x \in A$ buď $x^2 = 1$, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x^n = 0$. Ukažte, že A je komutativní okruh. [10 bodů]

Úloha 4. Nechť a, b, c, x, y, z, s jsou kladná reálná čísla s vlastností $1 \leq x, y, z \leq 4$. Dokažte, že

$$\frac{x}{(2a)^s} + \frac{y}{(2b)^s} + \frac{z}{(2c)^s} \geq \frac{y+z-x}{(b+c)^s} + \frac{z+x-y}{(c+a)^s} + \frac{x+y-z}{(a+b)^s}\,.$$

[10 bodů]

3. Řešení

První kategorie

Řešení úlohy 1. *Existence:* Funkce f je diferencovatelná na intervalu $[0,1]$, proto je na tomto intervalu spojitá. Uvažujme funkce $g(x) = f(x) - x$ a $h(x) = f(x) - (1-x)$, které jsou spojité na $[0,1]$. Aplikací Bolzanovy věty dostaneme, že existuje $\alpha \in [0,1]$ takové, že $g(\alpha) = 0$, a existuje $\beta \in [0,1]$ takové, že $h(\beta) = 0$. Tudíž existují $\alpha, \beta \in [0,1]$ pro která $f(\alpha) = \alpha$ a $f(\beta) = 1 - \beta$.

Jednoznačnost: Předpokládejme, že existují $\alpha, \alpha' \in [0,1]$, $\alpha < \alpha'$, taková, že $f(\alpha) = \alpha$ a $f(\alpha') = \alpha'$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\theta \in (\alpha, \alpha') \subset [0,1]$ takové, že

$$f'(\theta) = \frac{f(\alpha') - f(\alpha)}{\alpha' - \alpha} = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \alpha} = 1\,,$$

což je spor s předpokladem $|f'(x)| \neq 1$. Obdobně, jestliže předpokládáme, že existují $\beta, \beta' \in [0,1]$, $\beta < \beta'$, taková, že $f(\beta) = 1 - \beta$ a $f(\beta') = 1 - \beta'$, potom podle Lagrangeovy věty existuje $\theta' \in (\beta, \beta') \subset [0,1]$ takové, že

$$f'(\theta') = \frac{f(\beta') - f(\beta)}{\beta' - \beta} = \frac{(1-\beta') - (1-\beta)}{\beta' - \beta} = -1\,,$$

což je opět spor.

Řešení úlohy 2. Označme

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} = B^2,$$

a $d = \det(B) = q^2$, kde p_1, p_2, p_3, p_4, q jsou prvočísla.

Podle Cayleyovy-Hamiltonovy věty platí

$$B^2 = \mathrm{tr}(B)B - \det(B)E,$$

kde E je jednotková matice typu 2×2 a $\mathrm{tr}(B)$ označuje stopu matice B. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\mathrm{tr}(B) \geq 0$, v opačném případě nahradíme matici B maticí $-B$. Z rovnosti

$$\mathrm{tr}(B)B = B^2 + dE = A + dE = \begin{pmatrix} p_1 + d & p_2 \\ p_3 & p_4 + d \end{pmatrix}$$

dostaneme, že $\mathrm{tr}(B)$ dělí čísla p_2 a p_3. Kromě toho platí

$$(\mathrm{tr}(B))^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{tr}(B)B) = p_1 + p_4 + 2d \geq 2 + 2 + 8 = 12$$

a tedy $\mathrm{tr}(B) > 3$. Odtud plyne, že

$$\mathrm{tr}(B) = p_2 = p_3 \quad \text{a} \quad B = \frac{1}{\mathrm{tr}(B)} \begin{pmatrix} p_1 + d & p_2 \\ p_3 & p_4 + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

pro nějaká přirozená čísla a a b. Potom

$$A = B^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 1 & a + b \\ a + b & b^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Čísla $a^2 + 1, b^2 + 1, a + b$ nemohou být všechna lichá, tudíž jedno z nich je rovno 2. Jelikož $ab - 1 = d \geq 4$, máme $\max(a, b) \geq 3$. Odtud $a + b > 2$.

Nyní předpokládejme, že $a^2 + 1 \leq b^2 + 1$. Potom $a^2 + 1 = 2$ a $a = 1$. Dostáváme

$$d = ab - 1 = b - 1$$

a

$$0 < p_2 = a + b = b + 1 = d + 2 = q^2 + 2\,.$$

Kdyby platilo $q \neq 3$, bylo by $q^2 \equiv 1 \pmod 3$ a tedy $p_2 \equiv 0 \pmod 3$. To znamená, že $p_2 = 3$ a $q^2 = 1$, což není možné. Máme tedy $q = 3$. Potom $b = p_2 - a = 3^2 + 2 - 1 = 10$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{a} \quad A = B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 101 \end{pmatrix}.$$

Podobně, jestliže $a^2 + 1 > b^2 + 1$, dostaneme matici

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 11 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Všechny matice s danými vlastnostmi tedy jsou

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 101 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A = \begin{pmatrix} 101 & 11 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení úlohy 3. Nejprve uvažujme případ $x = y = t$. Potom

$$\frac{2}{t+1} + \frac{1}{z+1} = 1$$

a tedy

$$z = \frac{2}{t-1}\,.$$

Uvažovaná nerovnost se změní na

$$C \geq \frac{2t}{\sqrt{t \cdot \dfrac{2}{t-1}}} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{\frac{2}{t-1}}{\sqrt{t \cdot t}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{t-1}+1} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{t-1}}{t+1} + \frac{2}{t(t+1)}\,.$$

Pro $t \to \infty$ dostáváme $C \geq \sqrt{2}$.

Nyní dokážeme, že platí

$$\frac{x}{\sqrt{yz}} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{y}{\sqrt{zx}} \cdot \frac{1}{y+1} + \frac{z}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{z+1} < \sqrt{2}\,. \tag{1}$$

Abychom to dokázali, využijeme následující substituce

$$a = \frac{1}{x+1}, \quad b = \frac{1}{y+1}, \quad c = \frac{1}{z+1}\,.$$

Pro tyto tři nové proměnné $a, b, c \in (0,1)$ platí

$$a + b + c = 1\,. \tag{2}$$

Navíc platí

$$x = \frac{1-a}{a} = \frac{b+c}{a}, \quad y = \frac{1-b}{b} = \frac{c+a}{b}, \quad z = \frac{1-c}{c} = \frac{a+b}{c}$$

a tedy nerovnost (1) má následující tvar

$$\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{\sqrt{(b+c)(c+a)}} + \frac{(b+c)\sqrt{bc}}{\sqrt{(c+a)(a+b)}} + \frac{(c+a)\sqrt{ca}}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} < \sqrt{2}\,.$$

Po odstranění zlomků dostaneme

$$(a+b)\sqrt{ab(a+b)} + (b+c)\sqrt{bc(b+c)} + (c+a)\sqrt{ca(a+c)} < \sqrt{2(a+b)(b+c)(c+a)}\,.$$

S využitím rovnosti (2) dostaneme, že (1) je ekvivalentní s

$$\begin{aligned} &(a+b)\sqrt{ab(a+b)} + (b+c)\sqrt{bc(b+c)} + (c+a)\sqrt{ca(a+c)} < \\ &< \sqrt{2(a+b)(b+c)(c+a)}(a+b+c)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Pro výrazy na pravé straně nerovnosti (3) platí

$$\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)} = \sqrt{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc} \tag{4}$$

a

$$\sqrt{2}(a+b+c) = \sqrt{2(a+b+c)^2} = \sqrt{(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2+2(ab+bc+ca)}\,. \tag{5}$$

Aplikací Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti na levou stranu nerovnosti (3) dostaneme

$$\begin{aligned}(a+b)\sqrt{ab(a+b)} + (b+c)\sqrt{bc(b+c)} + (c+a)\sqrt{ca(a+c)} \le \\ \le \sqrt{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}\cdot\sqrt{ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)}\,.\end{aligned}$$

Odtud a z rovností (4) a (5) dostáváme (3) a tedy i (1). Zároveň je zřejmé, že v nerovnosti (1) nikdy nebude platit rovnost.

Hledaná konstanta C je tedy rovna $C = \sqrt{2}$.

Řešení úlohy 4. Číslo n^k končí nulou kdykoliv je n dělitelné 10 a začíná nenulovou číslicí. Ukážeme, že tvrzení platí pro všechna ostatní n.

Pro $n = 1$ tvrzení triviálně platí. Proto budeme předpokládat, že $n \ge 2$. Všechna čísla

$$n, n^5, n^9, \ldots, n^{4m+1}, \ldots \tag{6}$$

končí na stejnou číslici, protože číslo $n^{4i+5} - n^{4i+1}$ je sudé a z malé Fermatovy věty plyne, že je dělitelné pěti. Nyní stačí ukázat, že pro libovolnou nenulovou číslici c je v posloupnosti (6) číslo, které začíná na c. Pro libovolné nezáporné celé číslo m položme $d_m = \frac{n^{4m+1}}{10^l}$, kde l je největší celé číslo pro které $10^l \le n^{4m+1}$. Tudíž $1 \le d_m < 10$ a $\lfloor d_m \rfloor$ je první číslice n^{4m+1}.

Pro čísla $m < m'$ platí $\frac{n^{4m'+1}}{n^{4m+1}} \ge 2^4 > 10$, a proto $l' > l$. Protože $10 \nmid n$, dostáváme

$$\frac{d_{m'}}{d_m} = \frac{n^{4(m'-m)}}{10^{l'-l}} \ne 1\,.$$

Všechna čísla d_m jsou tedy různá.

V dalším textu budeme potřebovat následující lemma charakterizující posloupnost $\{d_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Lemma 1. *Jestliže $d_{m+i} = d_m q$, pak $d_{m+2i} = d_m q^2 \cdot 10^{\varepsilon}$, kde $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$.*

Důkaz. Položme

$$d_m = \frac{n^{4m+1}}{10^l}, \quad d_{m+i} = \frac{n^{4(m+i)+1}}{10^{l'}} \quad \text{a} \quad d_{m+2i} = \frac{n^{4(m+2i)+1}}{10^{l''}}\,.$$

Potom máme $q = \frac{d_{m+i}}{d_m} = \frac{n^{4i}}{10^{l'-l}}$ a tedy

$$\frac{d_{m+2i}}{d_m} = \frac{n^{8i}}{10^{l''-l}} = q^2 10^{2l'-l-l''} = q^2 10^{\varepsilon}$$

pro nějaké celé číslo ε. Ale $d_m, d_m q, d_m q^2 10^{\varepsilon} \in [1, 10)$, a proto $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$. □

Jelikož všechny členy posloupnosti $\{d_m\}_{m=1}^{\infty}$ jsou různé a všechny leží v intervalu $[1, 10)$, musí existovat dva členy d_m a $d_{m'}$ takové, že $|d_{m'} - d_m| < \frac{1}{10}$. Bez újmy na obecnosti nechť $m' > m$. Máme dvě možnosti.

Předpokládejme $d_{m'} > d_m$. Potom platí $d_{m'} < d_m + \frac{1}{10}$. Tudíž

$$1 < q = \frac{d_{m'}}{d_m} < \frac{d_m + \frac{1}{10}}{d_m} = 1 + \frac{1}{10d_m} \leq 1 + \tfrac{1}{10}.$$

Podle lemmatu 1 číslo $d_m q^2$ leží ve studované posloupnosti, pokud leží v intervalu $[1, 10)$. Opakováním této myšlenky dostaneme, že všechna čísla d_m, $d_m q$, $\ldots$, $d_m q^r$ pro nějaké r leží ve studované posloupnosti. Po překročení hodnoty 10 leží v posloupnosti čísla $\frac{d_m q^{r+1}}{10}$, $\ldots$, $\frac{d_m q^s}{10}$, $\frac{d_m q^{s+1}}{100}$ atd. Rozdíl dvou po sobě jdoucích výrazů v této posloupnosti je roven

$$\begin{aligned} q_m q^{j+1} - d_m q^j &= d_m q^j (q-1) < \frac{d_m q^j}{10} < 1 && \text{pro } j = 1, \ldots, r-1\,, \\ \frac{d_m q^{j+1}}{10} - \frac{d_m q^j}{10} &= \frac{d_m q^j (q-1)}{10} < \frac{d_m q^j}{100} < 1 && \text{pro } j = r+1, \ldots, s-1\,. \end{aligned}$$

Dále platí

$$\frac{d_m q^{r+1}}{10} = \frac{q_m q^r}{10}\, q < \frac{10}{10}\left(1 + \frac{1}{10}\right) < 2\,.$$

Protože jsou rozdíly menší než 1 a po překročení desítky se dostaneme do intervalu $[1, 2)$, musí pro každou nenulovou číslici c existovat číslo $d_{m+j(m'-m)}$ ležící v intervalu $[c, c+1)$.

Předpokládejme $d_{m'} < d_m$. Potom platí $d_m < d_{m'} + \frac{1}{10}$. Tudíž

$$1 < q = \frac{d_m}{d_{m'}} < \frac{d_{m'} + \frac{1}{10}}{d_{m'}} = 1 + \frac{1}{10d_{m'}} \leq 1 + \frac{1}{10}\,.$$

Analogicky jako v prvním případě dostaneme posloupnost výrazů (místo násobení použijeme dělení) s rozdíly po sobě jdoucích členů menšími než 1. Když posloupnost klesne pod jedničku, dostaneme

$$\frac{10d_m}{q^{r+1}} = \frac{d_m}{q^r}\,\frac{10}{q} > 1\,\frac{10}{1 + \frac{1}{10}} > 9\,.$$

Protože jsou rozdíly menší než 1 a po poklesu pod jedničku se dostaneme do intervalu $[9, 10)$, musí i v tomto případě pro každou nenulovou číslici c existovat číslo $d_{m+j(m'-m)}$ ležící v intervalu $[c, c+1)$.

Zadané podmínce tedy vyhovují všechna přirozená čísla, která nejsou dělitelná 10.

Druhá kategorie

Řešení úlohy 1. Z předpokladu plyne

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} f(2^{n+1})}{2^n f(2^n)} < 1\,.$$

Potom podle podílového kritéria dostaneme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^n)$$

konverguje. Využitím Cauchyova kondenzačního kritéria obdržíme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konverguje. Nyní pomocí integrálního kritéria máme

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

Řešení úlohy 2. Nechť $x^\top = (0, x_1, \ldots, x_9)$. Potom přímým výpočtem dostaneme

$$x^\top M x = x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + \cdots + (x_9 - x_8)^2 + x_9^2\,. \tag{7}$$

Nechť $\lambda_{\min}$ označuje nejmenší vlastní číslo. (Poznamenejme, že matice M je symetrická, a proto jsou všechna její vlastní čísla reálná.) Navíc, jelikož M je symetrická, existuje ortogonální matice C taková, že $C^\top M C = \operatorname{diag}\{\lambda_{\min}, \lambda_1, \ldots, \lambda_9\}$. Odtud dostáváme, že $y^\top(\lambda_{\min} E - M)y \le 0$ pro každé $y \in \mathbb{R}^{10}$. Nechť $y^\top = (1, -1, 0, \ldots, 0)$. Potom $2\lambda_{\min} \le y^\top M y = -5$. Tudíž $\lambda_{\min} < 0$.

Nechť $V_1 = \{(0, x_1, \ldots, x_9) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{10}$. Potom z rovnosti (7) máme

$$y^\top M y \ge 0 \tag{8}$$

pro každé $y \in V_1$ a $y^\top M y = 0$, právě když $y = 0$.

Předpokládejme, že naopak M má alespoň dvě nekladná vlastní čísla λ_1, λ_2. Vezměme příslušné vlastní vektory $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{10}$ takové, že $y_1^\top y_1 = y_2^\top y_2 = 1$ a $y_1 \perp y_2$. Platí tedy $M y_i = \lambda_i y_i$ $(i = 1, 2)$. Položme $V_2 := \operatorname{span}\{y_1, y_2\}$. Potom pro libovolné $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in V_2$ platí

$$y^\top M y = \alpha_1^2 \cdot \lambda_1 + \alpha_2^2 \cdot \lambda_2 \le 0\,. \tag{9}$$

Z předchozího dostaneme, že

$$\dim V_1 + \dim V_2 = 9 + 2 = 11 > 10\,.$$

Proto $V_1 \cap V_2 \ne \{0\}$. Vezměme $0 \ne y \in V_1 \cap V_2$. Potom z (8) plyne $y^\top M y > 0$. Ale (9) implikuje, že $y^\top M y \le 0$, což je spor.

Řešení úlohy 3. Označme $U(A)$ multiplikativní grupu jednotek okruhu A,

$$U(A) = \{x \mid x \in A \text{ je invertibilní}\}\,.$$

Z vlastnosti okruhu A plyne, že grupa $(U(A), \cdot)$ je komutativní. Pro $x, y \in U(A)$ totiž platí $x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1$ a vynásobením rovnosti $xy \cdot xy = 1$ z levé strany x a z pravé strany y dostáváme

$$xy = yx. \tag{10}$$

Nyní ukážeme, že

$$\text{pro } x \notin U(A) \text{ platí } 1 - x \in U(A)\,. \tag{11}$$

Předpokládejme naopak, že existuje $x \notin U(A)$ takové, že $y = 1 - x \notin U(A)$. Podle předpokladu existují $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $x^m = 0$ a $y^n = 0$.

Jelikož platí

$$xy = x(1-x) = x - x^2 = (1-x)x = yx\,,$$

dostaneme

$$(x+y)^{m+n} = \sum_{i+j=m+n} \binom{m+n}{i} x^i y^j = 0\,,$$

protože pro $i + j = m + n$ máme $i \geq m$ nebo $j \geq n$ a odtud $x^i = 0$ nebo $y^j = 0$. Je tedy $1 = x + y \notin U(A)$, což je spor, a tvrzení (11) je dokázáno.

Komutativitu ukážeme rozborem čtyř případů. Nechť $x, y \in A$.

1. Jestliže $x, y \in U(A)$, pak $xy = yx$ podle (10).
2. Jestliže $x \in U(A)$, $y \notin U(A)$, pak $1 - y \in U(A)$ podle (11) a z (10) máme $x(1-y) = (1-y)x$. Odtud $xy = yx$.
3. Případ $x \notin U(A)$, $y \in U(A)$ je analogický případu 2.
4. Jestliže $x, y \notin U(A)$, pak podle (11) platí $1 - x$, $1 - y \in U(A)$ a

$$xy = (1-x)(1-y) - 1 + x + y = (1-y)(1-x) - 1 + y + x = yx\,.$$

Ve všech případech pro každé $x, y \in A$ tedy dostáváme $xy = yx$.

Řešení úlohy 4. Použijeme následující variantu Schurovy nerovnosti.

Lemma 2. *Pro libovolná kladná čísla A, B, C platí*

$$x(A-B)(A-C) + y(B-A)(B-C) + z(C-A)(C-B) \geq 0\,.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $A \leq B \leq C$. Nechť $U = B - A$ a $V = C - B$. Potom pro levou stranu výrazu dostáváme

$$xU(U+V) - yUV + z(U+V)V \geq U(U+V) - 4UV + (U+V)V == (U-V)^2 \geq 0\,.$$

□

Lemma 3. *Pro libovolná kladná čísla p, s platí*

$$\frac{1}{p^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t.$$

Důkaz. Použitím substituce $u = pt$ dostaneme

$$\int_0^\infty t^{s-1} \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{p^s} \int_0^\infty u^{s-1} \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u = \frac{\Gamma(s)}{p^s}.$$

□

Slavnostní zakončení soutěže, zleva doc. Mgr. Roman Maršálek, Ph.D., Lisa Sauermann, Damian Orlef (vítězové první kategorie), RNDr. Jan Šustek, Ph.D., Dr. Géza Kós (předseda poroty)

Položme $A = \mathrm{e}^{-at}$, $B = \mathrm{e}^{-bt}$ a $C = \mathrm{e}^{-ct}$. Potom pomocí lemmatu 2 a lemmatu 3 může být tvrzení dokázáno takto

$$\begin{aligned}
0 &\le \int_0^\infty t^{s-1}\Big(x(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt})(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-ct}) + y(\mathrm{e}^{-bt}-\mathrm{e}^{-at})(\mathrm{e}^{-bt}-\mathrm{e}^{-ct}) + \\
&\qquad z(\mathrm{e}^{-ct}-\mathrm{e}^{-at})(\mathrm{e}^{-ct}-\mathrm{e}^{-bt})\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty t^{s-1}\Big(x\mathrm{e}^{-2at} + y\mathrm{e}^{-2bt} + z\mathrm{e}^{-2ct} - (y+z-x)\mathrm{e}^{-(b+c)t} \\
&\qquad - (z+x-y)\mathrm{e}^{-(c+a)t} - (x+y-x)\mathrm{e}^{-(a+b)t}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \Gamma(s)\left(\frac{x}{(2a)^s} + \frac{y}{(2b)^s} + \frac{z}{(2c)^s} - \frac{y+z-x}{(b+c)^s} - \frac{z+x-y}{(c+a)^s} - \frac{x+y-z}{(a+b)^s}\right).
\end{aligned}$$

4. Výsledky

Níže je uvedeno pořadí nejúspěšnějších studentů v každé kategorii.

První kategorie:

Pořadí	Jméno	Město	Úl.1	Úl.2	Úl.3	Úl.4	$\sum$
1.	Damian Orlef	Varšava	10	10	10	10	40
1.	Lisa Sauermann	Bonn	10	10	10	10	40
3.	Felix Dräxler	Cambridge	10	9	10	9	38
4.	Iosif Klimovitsky	Petrohrad	10	8	10	9	37
5.	Szymon Kanonowicz	Varšava	10	10	3	9	32
6.	Ivan Geffner Fuenmayor	Barcelona	10	10	0	10	30
6.	Donát Nagy	Budapešť	10	10	0	10	30
6.	Jens Reinhold	Bonn	10	10	0	10	30
6.	Florian Schweiger	Bonn	10	10	7	3	30
10.	Oleksandr Bagan	Moskva	10	10	0	9	29
10.	Fabian Gundlach	Mnichov	9	10	0	10	29
10.	Miroslav Olšák	Praha	10	10	0	9	29

Druhá kategorie:

Pořadí	Jméno	Město	Úl. 1	Úl.2	Úl.3	Úl.4	$\sum$
1.	Jakub Konieczny	Krakov	9	10	10	3	32
1.	Ievgen Makedonskyi	Kyjev	10	10	10	2	32
3.	Pavel Galashin	Petrohrad	10	10	9	2	31
3.	Vladislav Volkov	Petrohrad	9	10	10	2	31
5.	Maciej Gawron	Krakov	10	4	10	3	27
6.	Alexey Paletskikh	Petrohrad	10	10	3	3	26
7.	Máté Gerencsér	Budapešť	10	4	10	0	24
8.	Kamil Kuźmicki	Krakov	10	10	3	0	23
8.	Pavlo Mishchenko	Moskva	10	1	9	3	23
8.	Alexander Slávik	Praha	10	4	7	2	23
8.	Michał Włodarczyk	Varšava	10	1	10	2	23

5. Závěr

Porota vybírá příklady tak, aby jejich pořadí odpovídalo jejich obtížnosti. Toto pravidlo se téměř potvrdilo. V první kategorii byl nejlehčí příklad první, z něhož téměř 48 % soutěžících získalo plný počet bodů. Nejtěžší byl příklad třetí, neboť jen 13 % studentů z něj získalo alespoň bod a pouze 4 soutěžící dosáhli na plný počet bodů. Ve druhé kategorii za první příklad získalo plný počet 10 bodů přibližně 61 % soutěžících, čímž se ukázalo, že tento příklad byl nejlehčí. Jako nejtěžší se ukázal příklad čtvrtý, neboť pouze 16 soutěžících získalo aspoň bod a nejlepší z nich získali pouze 3 body.