Aktuárské vědy

Emil Schoenbaum

Note sur la théorie mathématique des assurances contre l'invalidité

Aktuárské vědy, Vol. 2 (1931), No. 1, 10–36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144535

festhält, dass eigentlich nur allgemeine Tendenzen aus der Vergangenheit und diese auch nur für die in der Einleitung kennzeichneten rechnungsmässigen Zwecke zu übertragen sind, so kann der Einfluss etwaiger störender Elemente stark gedämpft werden, indem man aktuelle Störungen durch Bildung von entsprechend gewogenen Durchschnittswerten ausschaltet. Bei Vorhandensein genügend vieler Angaben kann auch eine vorherige, glättende mechanische Ausgleichung der zu verwendenden representativen Züge vorgenommen werden. — Die Bestimmung von ϱ muss durch eine wohldurchdachte Auswahl aus den mit verschiedenen empirischen Ausgangsdaten berechneten Probewerten geschehen; hierbei können auch die für das Auftreten eines im Endlichen vermutbaren Wendepunktes massgebenden Kriterien eine verfeinerende Rolle haben.

Budapest, den 17. Juli 1930.

Note sur la théorie mathématique des assurances contre l'invalidité.

Par *Emile Schoenbaum.*

I.*)

J'ai montré, dans une note publiée dans les Rozpravy de l'Académie des Sciences Tchèque que la théorie mathématique des phénomènes collectifs nous conduit aux équations intégrales de Volterra. Il en est ainsi, par exemple, pour la théorie des assurances d'invalidité si on prend égard à la possibilité de la réactivité. Dans cette note je traite un autre problème, plus simple, qui conduit à la solution d'une équation intégrale et, en passant, j'indique les solutions nouvelles d'autres problèmes connus en pratique.

1. Considérons un groupe homogène des personnes actives d'un âge déterminé et observons le pendant un certain intervalle de temps. Une partie d'individus de ce groupe meurt et d'autres personnes deviennent invalides. Le groupe primitif se divisera donc en deux groupes: un groupe des personnes actives, diminuant par des décès et par des invalidités — et un groupe des personnes invalides qui augmente par les

---

allem das genaue Studium der zu erfassenden allgemeinen Tendenz und in dieser Richtung geben die klassischen Arbeiten von Moser über die Untersuchungsmethoden eines Beharrungszustandes und deren bereits vorliegende Anwendungen (so durch Wyss in den Mitt. der Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 24 (1929), S. 39—93) tiefgreifende Weisungen, auch für den Praktiker.

*) Traduction d'un article publiée 1917 dans Časopis pro pěstování matematiky a fysiky.

personnes du groupe primitif devenues invalides et diminue par la mortalité. Nous supposons que les lois de mortalité des invalides sont différentes de celles des personnes actives. Le chiffre global de ces deux groupes indique le nombre des personnes vivantes encore, actives ou invalides, du groupe primitif, au bout d'un certain temps.

L'activité et l'invalidité ont un sens très large ici: l'activité est réprésentée par une qualité quelconque, qu'une personne peut posséder. L'invalidité signifie alors la perte ou le manque de cette qualité. L'exemple d'une telle dichotomie est l'aptitude ou inaptitude pour une profession donnée. Pour simplifier, nous considérons l'invalidité comme définitive, c'est à dire, nous n'admettons pas la réactivité.

Supposons encore que pour un grand et homogène matérial d'observation, nous connaissons les taux instantannés de mortalité et de l'invalidité, comme fonctions de l'âge, et l'état primitif du groupe des personnes actives d'âge x, où on n'a pas encore d'invalidité. Nous pouvons alors construire facilement une table de mortalité pour le groupe mixte des personnes actives et invalides.

Soit

$l^{aa}(x)$ le nombre des personnes actives d'âge x,

$l^{ii}(x)$ le nombre des personnes invalides, à l'âge x, devenues invalides de $l^{aa}(x)$

$l(x)$ le nombre des personnes actives et invalides, vivantes à l'âge x, encore,

$l^{i}(x)$ le nombre des invalides d'après la table de mortalité des invalides.

On a alors tout d'abord

$$l(x) = l^{aa}(x) + l^{ii}(x).$$

Soit encore

$i(x)$ la probabilité (appelée dépendante) pour une personne active d'âge x, de devenir invalide dans le délai plus court d'une année, soit avant l'âge $x+1$,

$p^{ai}(x)$ la probabilité pour une personne active, d'âge x, de devenir invalide dans le délai plus court d'une année et atteindre l'âge $x+1$,

$p^{i}(s)$, $p^{i}(s, x)$ les probabilités, d'après la table de mortalité des invalides, pour une personne d'âge s, d'atteindre l'âge $s+1$ et l'âge x respectivement.

On a alors

$$p^{i}(s) = \frac{l^{i}(s+1)}{l^{i}(s)}, \quad p^{i}(s, x) = \frac{l^{i}(x)}{l^{i}(s)} = p^{i}(s) \cdot p^{i}(s+1) \ldots p^{i}(x-1).$$

Le problème que nous nous proposons de résoudre est alors le suivant:

[1]) Conformément à l'usage générale, le double indice indique l'état active ou invalide au commencement et à la fin du temps d'observation.

Supposons que nous connaissons les nombres

$$l^{aa}(x_0),\ l^{aa}(x_0+1),\ l^{aa}(x_0+2),\ \ldots \text{ et } l^{aa}(x),$$

pour les personnes actives, en outre encore

$$p^{ai}(x) \text{ et } p^{i}(x)$$

et que nous voulons calculer une table générale des nombres

$$l(x_0),\ l(x_0+1),\ \ldots\ l(x).$$

Le problème se trouve résolu par l'équation

$$l(x) = l^{aa}(x) + l^{ii}(x) = l^{aa}(x) + \sum_{s=x_0}^{x-1} l^{aa}(s)\, p^{ai}(s)\, p^{i}(s+1, x) \tag{1}$$

dont la construction est facile à voir; chaque membre de la somme signifie combien de personnes d'âge s deviennent invalides pendant le délai d'un an et atteignent, comme invalides, l'age x.

Ayant égard qu'on a

$$p^{i}(s, x) = \frac{l^{i}(x)}{l^{i}(s)}$$

et en posant, pour simplifier

$$l^{aa}(s) \cdot \frac{p^{ai}(s)}{l^{i}(s+1)} = \gamma(s),$$

on aura enfin

$$l(x) = l^{aa}(x) + l^{i}(x) \sum_{s=x_0}^{x-1} \gamma(s).$$

En posant encore[2])

$$\sum_{s=x_0}^{x-1} \gamma(s) = \Gamma(x)$$

nous aurons

$$l(x) = l^{aa}(x) + l^{i}(x)\, \Gamma(x). \tag{2}$$

Dans la pratique, on résout le problème successivement, en sortant de l'âge x, car l'équation (2) permet de calculer $l(x)$ à l'aide des quantités auxiliaires.

Le problème inverse arrive plus souvent encore: on connaît une table de mortalité générale, c'est à dire une série de nombres $l(x)$, $p^{ai}(x)$ et $p^{i}(s, x)$ et on a à déterminer une table des nombres $l^{aa}(x)$.

Devant le problème de ce genre se trouve par exemple une compagnie d'assurances, employant une table de mortalité et voulant introduire à côté des assurances sur la vie, des assurances d'invalidité.[3])

[2]) Conformément au mémoire de Tauber: Die Sterblichkeitsuntersuchungen etc.

[3]) Voir par ex. Karup: Die Reform . . . etc. page 67, où on emploie, au contraire, l'hypothèse que la mortalité des invalides est la même comme celle des personnes actives.

Le problème[4]) peut être résolu à l'aide de l'équation (1) qui indique la liaison récurrente entre $l^{aa}(x)$, $l^{aa}(x-1)$, $l^{aa}(x-2), \ldots, l^{aa}(x_0)$. Pour obtenir une solution plus simple que celle indiquée ordinairement dans les traités d'assurances, écrivons

$$\frac{l(x)}{l^i(x)} = \frac{l^{aa}(x)}{l^i(x)} + \sum_{s=x_0}^{x-1} \frac{l^{aa}(s)}{l^i(s)} \cdot p^{ai}(s) \cdot \frac{l^i(s)}{l^i(s+1)}$$

et en désignant

$$\frac{l^{aa}(x)}{l^i(x)} = \varphi(x), \qquad \frac{l(x)}{l^i(x)} = f(x)$$

$$p^{ai}(s) \frac{l^i(s)}{l^i(s+1)} = \frac{p^{ai}(s)}{p^i(s)} = h^{ai}(s)$$

nous aurons

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{s=x_0}^{x-1} \varphi(s)\, h^{ai}(s) \tag{3}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $f(x)$ et $h^{ai}(s)$ des quantités connues pour tous les x entiers.

De l'équation (3), nous avons encore

$$f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum_{s=x_0}^{x} \varphi(s)\, h^{ai}(s)$$

et par subtraction

$$f(x+1) - f(x) = \varphi\,(x+1) - \varphi(x) + h^{ai}(x)\,\varphi(x)$$

ou

$$\varphi(x+1) - \varphi(x)\,(1 - h^{ai}(x)) = \Delta f(x). \tag{4}$$

La formule recurrente (4) nous permet de calculer $\varphi(x)$ et encore $l^{aa}(x)$ plus facilement que l'équation (1), employée d'ailleurs couramment.[5]) L'équation (4) peut être mise sous une forme plus commode encore, en écrivant

$$\Delta\varphi(x) = -\,h^{ai}(x)\,\varphi(x) + \Delta f(x).$$

Il est important de remarquer que le coefficient $h^{ai}(x)$ et plus petit que 1[6]) de sorte qu'une inexactitude éventuelle d'un $\varphi(x)$ n'intervient pas aggrandie dans le calcul d'autres $\varphi(x)$, une circonstance qu'il ne faut jamais négliger en employant les formules de récurrence.

Malgré la facilité de la détermination simple et commode des $\varphi(x)$ au moyen de (4), il n'est pas sans intéret de déterminer $\varphi(x)$ et $l^{aa}(x)$ une fois indépendamment.

---

[4]) Voir Pokorný: Les pensions Invalides.

[5]) Voir par ex. Schaertlin etc.

[6]) Pour tous les x ne dépassant pas une certaine limite (60 ans par exemple); pour $x < x_0$ on a, évidémment,

$$h^{ai}\,(x) = 0.$$

Dans ce but, résolvons l'équation aux différences (1). Posons

$$\varphi(x) = \prod_{s=x_0}^{x-1} (1 - h^{ai}(s)) \,.\, C(x),$$

où la fonction inconnue $C(x)$ sera déterminée par la substitution dans l'équation (4)

$$C(x+1) - C(x) = \frac{\Delta f(x)}{\prod\limits_{s=x_0}^{x} (1 - h^{ai}(s))}$$

ou

$$C(x) = \sum_{t=x_0}^{x-1} \frac{\Delta f(t)}{\prod\limits_{s=x_0}^{t} (1 - h^{ai}(s))} + \varphi(x_0)$$

et alors

$$\varphi(x) = \prod_{s=x_0}^{x-1} (1 - h^{ai}(s)) \,.\left[\sum_{t=x_0}^{x-1} \frac{\Delta f(t)}{\prod\limits_{s=x_0}^{t} (1 - h^{ai}(s))} + f(x_0)\right] \tag{5}$$

où nous avons alors, dans le membre droit, uniquement les quantités connues.

La formule (5), trouvée, je crois, pour la première fois, est évidemment trop compliquée; mais elle peut être employée pour la contrôle du calcul d'après (4).

Il me reste à montrer comment on peut déterminer les nombres $p^{ai}(s)$, si on ne les connaît pas d'après les observations. Pour résoudre cette question, il faut accepter une hypothèse sur la répartition des cas d'invalidité et des décès pendant la période d'une année.

D'après l'hypothèse d'une répartition homogène des cas de décès et de l'invalidité, on a

$$p^{ai}(s) = i(s)\,(1 - \tfrac{1}{2} q^i(s)) = \tfrac{1}{2} i(s)\,(1 + p^i(s)),$$

nous supposons alors que tous les invalides le sont devenus dans la moitiè de l'année et meurent aussi dans une moitié de l'année seulement. Pour cette hypothèse, on aura alors

$$h^{ai}(s) = \frac{p^{ai}(s)}{p^i(s)} = \tfrac{1}{2}\, i(s) \left(\frac{1}{p^i(s)} + 1\right).$$

2. Au lieu de l'année, nous pouvons prendre pour unité de temps une partie de l'année seulement $\frac{1}{n}$ d'année par exemple. Si n croit indéfiniment, on aura comme unité de temps le différentiel du temps dx.

[7]) Pour d'autres hypothèse voir par ex. Pokorný: Les Pensions Invalides, p. 15—18.

Considérons alors les quantités $l^{aa}(x)$, $l^{ii}(x)$ comme fonctions réelles et ayant des dérivées. Au lieu des probabilités, considérons les taux instantannés:

1. celui de l'invalidité $\nu(x)$, dont le sens est que $\nu(x) . dx$ donne la probabilité de devenir invalide dans un temps infiniment petit dx;

2. celui de mortalité $\mu^i(x)$, où $\mu^i(x) . dx$ désigne la probabilité du décès pour une personne d'âge x, dans l'intervalle dx;

3. celui de mortalité en général $\mu(x)$ où alors

$$l(x) . \mu(x)\, dx$$

indique le nombre des personnes mortes dans l'intervalle dx. On a d'après la définition

$$\frac{dl^i(x)}{dx} = - l^i(x)\, \mu^i(x)$$

et en intégrant

$$l^i(x) = C(x)\, e^{-\int_s^x \mu^i(\xi)\, d\xi} .$$

On détermine la constante C en posant $x = s$, alors

$$\frac{l^i(x)}{l^i(s)} = e^{-\int_s^x \mu^i(\xi)\, d\xi} = p^i(x, s).$$

Ainsi on trouve comme probabilité qu'une personne invalide d'âge s atteindra l'âge x
et d'une manière analogue

$$p(x, s) = \frac{l(x)}{l(s)} = e^{-\int_s^x \mu(\xi)\, d\xi}$$

comme la probabilité qu'une personne d'âge s survivra l'âge x (comme active ou invalide).

Si on connaît alors les taux instantannés $\mu(x)$ et $\mu^i(x)$ comme fonctions de l'âge et intégrables, on connaît par conséquent les nombres $l(x)$ et $l^i(x)$.

La détermination des taux instantannés se fait ou directement d'après le matériel statistique[8]) à l'aide de la différentiation numérique ou au moyen d'autres données statistiques. Notre problème est alors encore à déterminer la fonction $l^{aa}(x)$, si on connaît les taux instantannées $\nu(x)$, $\mu^i(x)$, $\mu(x)$ et l'état au commencement $l^{aa}(x_0) = l(x_0)$. On a évidément

$$l(x) = l^{aa}(x) + l^{ii}(x)$$

où $l^{ii}(x)$ désigne le nombre d'invalides qui ont atteint l'âge x.

[8]) Voir Karup, etc.

En nous rappelant que la probabilité de devenir invalide dans un intervalle ds, pour une personne active d'âge s et de survivre, commeinvalide, l'âge x est

$$\nu(s) \,.\, ds \,.\, p^i(x, s)$$

nous trouvons tout de suite, en intégrant de x_0, à x, l'équation

$$l(x) = l^{aa}(x) + \int_{x_0}^{x} l^{aa}(s)\, \nu(s)\, p^i(x, s)\, ds \tag{7}$$

qui correspond à l'équation (1).

D'après cette équation, nous déterminons la fonction $l(x)$ par des méthodes numériques si l'on veut, des qu'on connaît les fonctions

$$l^{aa}(x),\ \nu(x),\ \mu^i(x).$$

Mais nous voulons résoudre le problème inverse, c'est â dire déterminer $l^{aa}(x)$ si on connaît les fonctions $\mu(x)$, $\nu(x)$, $\mu^i(x)$.

A ce but, rappelons nous que

$$p(x, s) = \frac{l^i(x)}{l^i(s)} = e^{-\int_s^x \mu^i(\xi)\, d\xi}.$$

De l'équation (7) nous aurons

$$\frac{l(x)}{l^i(x)} = \frac{l^{aa}(x)}{l^i(x)} + \int_{x_0}^{x} \frac{l^{aa}(s)}{l^i(s)}\, \nu(s)\, ds$$

et en posant

$$\frac{l(x)}{l^i(s)} = f(x), \quad \frac{l^{aa}(x)}{l^i(x)} = \varphi(x)$$

nous trouvons après la dérivation

$$f'(x) = \varphi'(x) + \varphi(x)\, \nu(x) \tag{8}$$

où $f(x)$ et $\nu(x)$ sont les fonctions données et $\varphi(x)$ inconnue. L'équation différentielle linéaire (8) nous donne comme solution pour

$$\varphi(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \nu(\xi)\, d\xi} + e^{-\int_{x_0}^{x} \nu(\xi)\, d\xi} \int_{x_0}^{x} f'(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \nu(\xi)\, d\xi} dx$$

et en nous rappelant que pour $x = x_0$ on a

$$l^{aa}(x_0) = l(x_0)$$

et alors

$$\varphi(x_0) = f(x_0)$$

$$\varphi(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} \nu(\xi)\, d\xi} [f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \nu(\xi)\, d\xi} dx].$$

---

[9]) Voir par ex. Spangenberg etc.

En effectuant l'intégration partielle même dans le second membre on aura après quelques simplifications

$$\varphi(x) = f(x) - e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \nu(\xi)\, d\xi} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, e^{\int\limits_{x_0}^{t} \nu(\xi)\, d\xi}\, \nu(t)\, dt$$

ou

$$\varphi(x) = f(x) - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, e^{-\int\limits_{t}^{x} \nu(\xi)\, d\xi}\, \nu(t)\, dt$$

et en substituant pour $\varphi(x)$ et $f(x)$

$$l^{aa}(x) = l(x) - l^i(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{l(t)}{l^i(t)}\, e^{-\int\limits_{t}^{x} \nu(\xi)\, d\xi}\, \nu(t)\, dt; \tag{9}$$

cette expression analytique de la fonction cherchée $l^{aa}(x)$ est tant que je peux juger nouvelle.

3. Jusqu'ici nous avons supposé que la mortalité des invalides ne dépende que de l'âge, conformément aux considérations employés dans la pratique. Nous avons alors eu, pour la probabilité qu'une personne invalide d'âge s survivra à l'âge x, l'expression

$$p^i(s, x) = \frac{l^i(x)}{l^i(s)}.$$

Mais depuis les commencements de la théorie des assurances d'invalidité on prononçait souvent l'opinion que la mortalité des invalides dépend, non seulement de l'âge, mais aussi de la durée de l'invalidité.

Cette hypothèse a été confirmé depuis par plusieurs résultats statistiques qui permettent d'ailleurs de se faire une idée assez exacte de cette dépendence.

Ainsi, par exemple, d'après les statistiques des assurances d'invalidité des ouvriers allemands,[10]) il meurt de 1000 ouvriers de l'âge de 60 ans, devenus invalides à l'instant, dans le délai d'une année, 172;

au contraire, de 1000 ouvriers invalides d'un âge de 60 ans, devenus invalides il y a 5 ans, il n'en meurt que 74.[11]) Ces résultats permettent d'établir une table indiquant les probabilités qu'une personne devenue invalide à l'âge ξ (dans l'intervalle ξ, $\xi+1$ plus exactement) survivra, après $x - \xi$ années, l'âge x.[12])

[10]) Das Ausscheiden . . .

[11]) Voir d'autres tables dans mon mémoire cité.

[12]) Dans ce chapitre, les valeurs $p^i(x, \xi)$ ont un sens un peu différent que dans le chap. 1. Surtout l'égalité

$$p^i(x, \xi) = \frac{l^i(x)}{l^i(\xi)}$$

n'est plus valable.

La question de la détermination des nombres $l^{aa}(x)$, à la base des fonctions $l(x)$, $i(x)$ et $p^i(x, \xi)$, exige maintenant d'autres considérations.

On peut successivement calculer les valeurs $l^{aa}(x_0)$, $l^{aa}(x_0+1)$, $l^{aa}(x_0+2)$, ... en partant de l'âge le plus bas x_0, où on n'a pas encore d'invalides, à l'aide du système d'équations

$$\begin{aligned}
l(x_0) &= l^{aa}(x_0) \\
l(x_0+1) &= l^{aa}(x_0)\, i(x_0)\, p^i(x_0+1, x_0) + l^{aa}(x_0+1) \\
l(x_0+2) &= l^{aa}(x_0)\, i(x_0)\, p^i(x_0+2, x_0) + l^{aa}(x_0+1)\, p^i(x_0+2, x_0+1) + \\
&\quad + l^{aa}(x_0+2) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
l(x) &= l^{aa}(x_0)\, i(x_0)\, p^i(x, x_0) + l^{aa}(x_0+1)\,.\, i(x_0+1)\, p^i(x, x_0+1) + \\
&\quad \ldots + l^{aa}(x)
\end{aligned}$$

lequel peut etre mis sous la forme

$$l(x) = l^{aa}(x) + \sum_{k=x_0}^{x-1} l^{aa}(k),\, \varkappa(x, k) \tag{10}$$

où on a posé, pour simplifier,

$$\varkappa(x, k) = i(k)\, p^i(x, k).$$

Le déterminant des coefficients étant égal à 1, on a

$$l^{aa}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots l(x_0) \\ \varkappa(x_0+1, x_0), & 1 & 0 \ldots l(x_0+1) \\ \varkappa(x_0+2, x_0), & \varkappa(x_0+2, x_0+1), & 1 \ldots l(x_0+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varkappa(x, x_0), & \varkappa(x, x_0+1) & \ldots l(x) \end{vmatrix} \tag{11}$$

ce qui donne une expression indépendente pour $l^{aa}(x)$. La décomposition de ce déterminant et la formation de formules récurrentes n'a pas d'importance pour nous et est d'ailleurs entièrement dévelopée dans „Les leçons sur les équations intégrales" de Volterra.[13]) Le caractère de notre solution est tout à fait différent de celui de nos considérations de la chapitre I, ce qui deviendra encore plus évident dans la suite.

4. Appliquons maintenant la méthode continue et proposons nous de déterminer la fonction $l^{aa}(x)$, sur la base des fonctions $\mu(x)$, $\nu(x)$ et $\mu^i(x, \xi)$; ces fonctions sont finies et intégrables dans l'intervalle

$$x_0 \leqq \xi \leqq x \leqq \omega$$

où x_0 est l'âge le plus bas et ω celui le plus élévé de la table. Alors $\mu^i(x, \xi)$ signifie le taux instantanné de mortalité d'une personne d'âge x, devenue invalide à l'âge ξ.[14]) Le produit

---

[13]) Paris 1913, page 40—44.

[14]) On trouve dans beaucoup de travaux au lieu de $\mu^i(x, \xi)$ le symbole $(\mu^i\,[\xi] + x - \xi)$ qui est peu commode pour être introduit dans les équation différentielles.

$$l^i(x,\xi)\,\mu^i(x,\xi)\,dx$$

nous donne alors le nombre des personnes devenues invalides à l'âge ξ et x mortes dans l'intervalle dx.

On a

$$dl^i(x,\xi) = -\,l^i(x,\xi)\,\mu^i(x,\xi)\,dx$$

et alors

$$\frac{l^i(x,\xi)}{l^i(\xi,\xi)} = e^{-\int_\xi^x \mu^i(s,\xi)\,ds} = p(x,\xi)$$

où $p^i(x,\xi)$ est la probabilité de survivre l'âge x pour une personne devenue invalide à l'âge ξ.

D'après le chap. 2, nous savons qu'il est

$$l(x) = l(\xi)\,e^{-\int_\xi^x \mu(s)\,ds}$$

et nous pouvons, en conséquence, considérer comme données aussi les fonctions

$$l(x),\ \nu(x),\ p^i(x,\xi).$$

La détermination de la fonction $l^{aa}(x)$ exige maintenant la solution d'une équation intégrale de Volterra du second type.

Nous pouvons l'écrire immédiatement

$$l(x) = l^{aa}(x) + \int_{x_0}^{x} l^{aa}(\xi)\,\nu(\xi)\,p^i(x,\xi)\,d\xi \tag{12}$$

ou en posant

$$K(x,\xi) = \nu(\xi)\,p^i(x,\xi)$$

$$l(x) =)\,l^{aa}(x) + \int_{x_0}^{x} l^{aa}(x)\,K(x,\xi)\,d\xi.$$

D'après la théorie des équations intégrales de Volterra[15]) nous savons que l'équation (12) a une et une seule solution finie et continue, donnée par l'équation

$$l^{aa}(x) = l(x) + \int_{x_0}^{x} S(x,\xi)\,l(\xi)\,d\xi \tag{13}$$

où la série des noyaux itérés

$$S(x,\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} K^{(i)}(x,\xi)$$

est absolument et uniformément convergente dans l'intervalle $x_0 \leq \xi$

[15]) Voir par ex. Les leçons de Volterra ou Goursat Cours d'Analyse 2 éd. Tome III cah. 2, 1914.

$< x \leq \omega$ et a, comme fonction majorante, la série

$$M + M^2 (x - \xi) + M^3 \frac{(x - \xi)^2}{2!} + \ldots \quad = M e^{M(x-\xi)}.$$

Les noyaux itérés sont donnés par des formules récurrentes

$$\left.\begin{aligned} K^{(1)} (x, \xi) &= - K (x, \xi) \\ K^{(2)} (x, \xi) &= \int_{\xi}^{x} K^{(1)}(x, z) K^{(1)} (z, \xi) dz \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K^{(i)} (x, \xi) &= \int_{\xi}^{x} K^{(1)} (x, z) K^{(i-1)} (z, \xi) dz. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Dans notre cas, il est

$$K^{(1)} (x, \xi) = - \nu (\xi) \; p^i (x, \xi)$$

$$K^{(2)} (x, \xi) = \int_{\xi}^{x} \nu(z) \, p^i (x, z) \, \nu (\xi) \, p^i (z, \xi) \, dz$$

$$K^{(3)} (x, \xi) = - \int_{\xi}^{x} \nu(z) \, p^i(z, x) \, dz \int_{\xi}^{z} \nu(z_1) \, p^i(z, z_1) \, \nu (\xi) \, p^i(z_1, \xi) \, dz_1, \quad \text{etc.}$$

Nous avons alors pour la fonction cherchée une expression indépendente des valeurs antérieures de $l^{aa} (x)$ et donnée par une série convergente

$$l^{aa}(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots$$

où on a encore

$$\varphi(x) = l(x)$$

$$\varphi_1(x) = - \int_{x_0}^{x} l(\xi) \, \nu(\xi) \, p^i(x, \xi) \, d\xi$$

$$\varphi_2(x) = \int_{x_0}^{x} l(\xi) \, \nu(\xi) \, d\xi \int_{\xi}^{x} \nu(z) \, p^i(x, z) \, p^i(z, \xi) \, dz, \quad \text{etc.}$$

Le sens de ces approximations successives est évident: Dans la première approximation, nous posons

$$l^{aa}(x) = l(x),$$

dans la seconde, nous retranchons le nombre d'invalides d'âge x qui seraient la si toutes les personnes $l(\xi)$ étaient soumises à l'invalidité; dans la troisième, nous prenons égard à la circonstance que les personnes devenues invalides jusqu'à l'âge x ont été prises deux fois, etc. Pour le calcul numérique, la convergence rapide de la série est d'une grande importance ainsi que le fait, que la fonction $p^i(x, \xi)$, connue par des donnés statistiques, dépend seulement d'une variable, si

$$x - \xi > m$$

par exemple, et m est un nombre connu (5—11 ans).

Il est intéressant qu'on peut déduire de l'équation (13) le cas particulier du chapitre 2, dans lequel on a supposé pour $p^i(x, \xi)$ une forme fonctionnelle spéciale

$$p^i(x, \xi) = \frac{l^i(x)}{l^i(\xi)}.$$

On trouve dans ce cas là facilement

$$K^{(1)}(x, \xi) = -\frac{l^i(x)\,\nu(\xi)}{l^i(\xi)}$$

$$K^{(2)}(x, \xi) = \int_\xi^x \frac{\nu(z)\,l^i(x)}{l^i(z)} \cdot \frac{\nu(\xi)\,l^i(z)}{l^i(\xi)}\,dz = \frac{\nu(\xi)\,l^i(x)}{l^i(\xi)} \int_\xi^x \nu(z)\,dz$$

$$K^{(3)}(x, \xi) = -\frac{\nu(\xi)\,l^i(x)}{l^i(\xi)} \int_\xi^x \nu(z_1)\,dz_1 \int_\xi^{z_1} \nu(z_2)\,dz_2$$

et, en général

$$K^{(n)}(x, \xi) = (-1)^n \frac{\nu(\xi)\,l^i(x)}{l^i(\xi)} \int_\xi^x \nu(z_1)\,dz_1 \int_\xi^{z_1} \nu(z_2)\,dz_2 \ldots \int_\xi^{z_{n-2}} \nu(z_{n-1})\,dz_{n-1}.$$

On peut démontrer une relation intéressante pour l'intégral $(n-1)$ multiple du second membre. $f(x)$ étant une fonction quelconque, on a

$$A_n(\xi, x) = \int_\xi^x f(z_1)\,dz_1 \int_\xi^{z_1} f(z_2)\,dz_2 \ldots \int_\xi^{z_{n-1}} f(z_n)\,dz_n = \frac{[\int_\xi^x f(z)dz]^n}{n!}. \quad (16)$$

Je démontre cette relation à l'aide de l'induction complète. Pour $n = 1$, la relation est évidente. Pour $n = 2$ nous avons

$$A_2(x, \xi) = \int_\xi^x f(z_1)\,dz_1 \int_\xi^{z_1} f(z_2)\,dz_2 = \int_\xi^x F'(z_1)\,F(z_1)\,dz_1$$

si nous posons

$$\int_\xi^{z_1} f(z_1)\,dz_1 = F(z_1), \qquad f(z_1) = F'(z_1)$$

et alors

$$A_2(x, \xi) = \tfrac{1}{2}\{[F(x)]^2 - [F(\xi)]^2\} = \tfrac{1}{2}[F(x)]^2 = \tfrac{1}{2}[\int_\xi^x f(z)\,dz]^2.$$

Nous allons démontrer que si le théorème (15) est valable pour $(n-1)$, il en est de même pour n.

On a en effet

$$A_n(\xi,\ x) = \int_\xi^x f(z_1)\, A_{n-1}(\xi, z_1)\, dz_1 = \int_\xi^x f(z_1)\, dz_1 \frac{[\int_\xi^x f(z)\, dz]^{n-1}}{(n-1)!}$$

et en posant encore

$$\int_\xi^{z_1} f(z)\, dz = F(z_1), \qquad f(z_1) = F'(z_1)$$

on aura

$$A_n(\xi, x) = \int_\xi^x \frac{F'(z_1)\, [F(z_1)]^{n-1}}{(n-1)\,!}\, dz_1 = \frac{[F(x)]^n}{n!} = \frac{[\int_\xi^x f(z)\, dz]^n}{n\,!}$$

ce qui était à démontrer.[16]) En utilisant ce théorème et en substituant pour les valeurs

$$K^i(x, \xi)$$

[16]) Mons. Dr. Hostinský avait l'amabilité de me communiquer une autre démonstration de ce théorème, que je publie ici avec son autorisation: Si nous permutons l'expression $A_n(x, \xi)$ pour toutes les $z_1, z_2, \ldots z_n$, nous obtenons $n!$ d'expressions

$$P,\ P',\ P'', \ldots, P^{(n!-1)},$$

qui ont tous la même valeur. On a alors

$$P = \frac{1}{n!}\,(P + P' + P'' + \ldots + P^{(n!-1)}).$$

Dans tous les intégrales, la fonction $f(z_1),\ f(z_2), \ldots, f(z_n)$ est une fonction symmétrique donc en considérant P comme une intégrale multiple

$$P = \frac{1}{n!} \underbrace{\int\int\ldots\int}_{\Sigma} f(z_1)\ f(z_2) \ldots f(z_n)\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$$

ou l'intégration doit être effectuée dans la somme de toutes les domaines d'intégration

$$\begin{array}{ll}
\xi \leqq z_1 \leqq z_2 \ldots \leqq z_{n-1} \leqq x & \text{(domaine de l'intégrale } P) \\
\xi \leqq z_2 \leqq z_1 \ldots \leqq z_n \quad\ \ \leqq x & (\quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad P') \\
\xi \leqq z_3 \leqq z_3 \ldots \leqq z_1 \quad\ \ \leqq x & (\quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad P'') \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\xi \leqq z_n \leqq z_{n-1} \ldots \qquad\quad \leqq x & (\quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad P)
\end{array}$$

est alors un cube Σ a dimensions et dont le coté est $x - \xi$ et on a alors

$$P = \frac{1}{n!} \int_\xi^x \int_\xi^x \ldots \int_\xi^x f(z_1)\, f(z_2) \ldots f(z_n)\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$$

$$= \frac{1}{n!} \left[\int_\xi^x f(z)\, dz \right]^n.$$

les quantités trouvées déjà, on obtient de l'équation (13) pour $l^{aa}(x)$ l'expression

$$l^{aa}(x) = l(x) - l^i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{l(\xi)\,\nu(\xi)}{l^i(\xi)} \left[1 - \int_{\xi}^{x} \nu(z)\,dz + \tfrac{1}{2}\left[\int_{\xi}^{x} \nu(z)\,dz\right]^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3\,!}\left[\int_{\xi}^{x} \nu(z)\,dz\right]^3 + \ldots\right] d\xi$$

ou

$$l^{aa}(x) = l(x) - l^i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{l(\xi)\,\nu(\xi)}{l^i(\xi)}\, e^{-\int_{\xi}^{x} \nu(z)\,dz}\, d\xi$$

qui est identique avec l'expression (9) trouvée directement comme la solution de l'équation différentielle linéaire du 1 ordre.

Cette concordance est évidente. Car on sait, en effet, que la solution d'une équation différentielle linéaire est équivalente à celle d'une équation intégrale de Volterra du second type à laquelle on peut, sous certaines conditions, ramener la solution des équations différentielles linéaires d'un ordre infini.

II.

A l'occasion des travaux préparatoires de l'assurance sociale des ouvriers en Tchécoslovaquie on a acquis par des calculs pratiques[17]) l'expérience de la possibilité d'une solution numérique de l'équation intégrale qui serve pour le point du départ pour la construction de la table d'activité. Comme la base des calculs servent les suivantes fonctions biométriques:

$\nu(x)$ le taux instantané pour l'âge x, déduit à l'aide de la méthode de King et Karup-Sprague appliquée aux expériences allemandes (l'assurance-invalidité et vieillesse des ouvriers 1906—1908) pour les groupes d'âge décennaires publiqués dans les „Amtliche Nachrichten des Reichsversicherungsamtes" 1908, 1909, 1910;[18])

les probabilités $p^i(x+k, x)$ qu'un invalide qui est devenu invalide á l'âge x survive en état d'invalidité jusqu'à l'âge $x+k$, ont été déduites des probabilités de la très connue table-mortalité et rentrée en activité des ouvriers allemandes publiée en 1906 d'après les expériences 1891-1899

---

[17]) V. Le Rapport des motifs de loi tchécoslovaque etc. 1924 (traduit aussi en allemande). Les calculs ont été établis avec l'aide de Dr. Havlík qui je remercie aussi pour nombreux détails techniques.

[18]) Voir pour les détails de la méthode Le Rapport cité p. 163 et suivantes.

table qui prend en considération soit l'âge des invalides soit le temps qui s'est écoulé à partir du commencement de l'invalidité;[19])

$l(x)$ la table de survie des personnes vivantes de l'âge x (actives et invalides) qui a été reprise à la suite des résultats du récensement populaire autrichien et de la statistique du mouvement de la population pour les années 1906—1910 ajustée par Blaschke à l'aide des polynomes d'Hermite.[20])

Le problème est à construire la table des nombres $l^{aa}(x)$ qu'on peut, comme je l'ai montré dans la première partie, déduire de l'équation

$$l(x) = l^{aa}(x) + \int_{x_0}^{x} l^{aa}(x)\, \nu(\xi)\, p^i(x, \xi)\, d\xi.$$

Le „noyau" de cette équation est:

$$K(x, \xi) = \nu(\xi)\, p^i(x, \xi)$$

et la solution en est

$$l^{aa}(x) = l(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} l(\xi)\, K^i(x, \xi)\, d\xi.$$

La question principale de cette solution est la possibilité du calcul numérique des noyaux itérés

$$K^i(x, \xi) = \int_{\xi}^{x} K^{(1)}(x, z)\, .\, K^{(i-1)}(z, \xi)\, dz$$

c'est à dire de l'expression

$$\varphi_k(x) = \int_{x_0}^{x} l(\xi)\, K^{(k)}(x, \xi)\, d\xi.$$

On peut démontrer en s'aidant du théorème de Dirichlet, qu'on a

$$\varphi_k(x) = -\int_{x_0}^{x} K(x, z)\, \varphi_{k-1}(z)\, dz$$

Si l'on pose

$$f_k(x) = -\nu(x)\, \varphi_{k-1}(x),$$
$$f_1(x) = -\nu(x)\, l(x),$$

on peut écrire

$$\varphi_k(x) = \int_{x_0}^{x} f_k(z)\, p^i(x, z)\, dz.$$

La quéstion de la solution numérique est maintenant réduite au calcul numérique de cette intégrale.

---

[19]) Voir Amtliche Nachrichten des Reichsversicherungsamtes 1906 I Beiheft. Voir pour les détails de la déduction le Rapport cité p. 163 et suiv.

[20]) Oesterr. Statistik, Neue Folge, I. Bd. 4 Heft.

Le calcul des fonctions $\varphi_k(x)$ a été fait en employant la formule Euler-Maclaurin

$$\int_a^b F(x)\,dx = h \sum_{k=0}^{n} F(a+kh) - \tfrac{1}{2} h\,[F(a)+F(b)] + \tfrac{1}{12} h^2[F'(a) - F'(b)]$$

où on calculé les $F'(a)$ et $F'(b)$ selon les expressions

$$F'(a) = \Delta F(a) - \tfrac{1}{2}\,\Delta^2 F(a) + \dots$$
$$F'(b) = \Delta F(b-h) + \tfrac{1}{2}\,\Delta^2 F(b-2h) + \dots$$

On peut écrire

$$\int_a^b F(x)\,dx = S(b) - C_1(a) - C_2(b),$$

où il y a

$$S(b) = h \sum_{k=0}^{n} F(a+kh),$$
$$C_1(a) = \tfrac{1}{2}\,h\,F(a) - \tfrac{1}{12}h^2\,F'(a),$$
$$C_2(b) = \tfrac{1}{2}\,h\,F(b) + \tfrac{1}{12}h^2\,F'(b).$$

Si on suppose maintenant $h = 1$, on parvient á l'expression

$$C_1(a) = \tfrac{1}{24}\,[15F(a) - 4F(a+1) + F(a+2)],$$
$$C_2(b) = \tfrac{1}{24}\,[15F(b) - 4F(b-1) + F(b-2)]$$
$$S(b) = \sum_{k=0}^{n} F(a+k).$$

En employant ces résultats pour le calcul des nombres $\varphi_k(x)$ on reçoit immédiatement des formules pour ces fonctions

$$\varphi_k(x) = \int_{x_0}^{x} p^i(x,z)\,f_k(z)\,dz = \tfrac{3}{8}\,p^i(x,x)\,f_k(x) + \tfrac{7}{6}\,p^i(x,x-1)\,f_k(x-1) +$$
$$+ \tfrac{23}{24}\,p^i(x,x-2)\,f_k(x-2) + \sum_{m=3}^{x-x_0-3} p^i(x,x-m)\,f_k(x-m) +$$
$$+ \tfrac{23}{24}\,f_k(x_0+2)\,p^i(x,x_0+2) + \tfrac{7}{6}\,p^i(x,x_0+1)\,f_k(x_0+1) +$$
$$+ \tfrac{3}{8}\,p^i(x,x_0)\,f_k(x_0).$$

Pour obtenir les fonctions $p^i(x, x-k)$, on s'aide des nombres $\sigma^i{}_{[x]+k}$ qui donnent les probabilités d'extinction de la pension d'un invalide ayant atteint l'âge $x+k$ en l'année k de la durée d'invalidité déduites comme j'ai déjà dit de l'expérience allemande. On a

$$\tfrac{3}{8}\,p^i(x,x) = \tfrac{3}{8},$$
$$\tfrac{7}{6}\,p^i(x,x-1) = \tfrac{7}{6}\,[1 - \sigma^i{}_{[x-1]+0}],$$
$$\tfrac{23}{24}\,p^i(x,x-2) = \tfrac{23}{24}\,[1 - \sigma^i{}_{[x-1]+0}]\,[1 - \sigma^i{}_{[x-2]+1}],$$
$$p^i(x,\xi) = \prod_{k=0}^{x-\xi-1} [1 - \sigma^i{}_{[\xi]+k}]$$

On peut calculer maintenant les nombres

$$\tfrac{3}{8}\, f_k(x_0),\ \tfrac{7}{6}\, f_k\,(x_0+1),\ \tfrac{23}{24}\, f_k(x_0+2)$$

et pour $x > x_0 + 2$ les nombres

$$f_k(x) = -\nu(x)\,\varphi_{k-1}(x).$$

Si on considère que la durée de la sélection est limitée dans les tables allemandes au plus à les 10 premières années, ou encore moins et que la table donne après des nombres dépendants seulement de l'âge atteint on peut faire le calcul, autrement très difficile, en le simplifiant au moyen des nombres

$$P_m{}^{(k)}\,(x+1) = p^i(x+1,\, x-m)\, f_k(x-m) - (1-\sigma^i{}_{x+1})\, P_m{}^{(k)}\,(x),$$

auxquels s'applique cette formule, si durée de la sélection m est la même pour les deux âges au moment de l'entrée en jouissance de la pension $x-m$ et $x-m+1$; si en passant par l'âge $x-m$ jusqu' á $x-m+1$ cette durée est réduit d'un an, on a alors:

$$P_{m-1}{}^{(k)}\,(x+1) = p^i(x+1,\, x-m+1)\, f_k(x-m+1) + p^i(x+1,\\ x-m)\, f_k(x-m) + (1-\sigma^i{}_{x+1})\, P_m{}^{(k)}\,(x)$$

où le nombre $\sigma_x{}^i$ désigne les nombres ultimatifs de la table, c'est à dire les probabilités d'élimination de la jouissance de la retraite - invalidité l'âge x étant atteint, quand la probabilité d'élimination ne dépend plus de la durée de l'invalidité. On a alors

$$P_{10}{}^{(k)}(x_0+11) = \tfrac{3}{8}\, f_k(x_0)\, p^i(x_0+11,\, x_0),$$
$$P_{10}{}^{(k)}(x_0+12) = \tfrac{7}{6}\, f_k(x_0+1)\, p^i(x_0+12,\, x_0+1) + \\ + (1-\sigma_{x_0+12})\, P_{10}{}^{(k)}(x_0+11),$$
$$P_{10}{}^{(k)}(x_0+13) = \tfrac{23}{24}\, f_k(x_0+2)\, p^i(x_0+13,\, x_0+2) + \\ + (1-\sigma_{x_0+13})\, P_{10}{}^{(k)}(x_0+12),$$
$$P_{10}{}^{(k)}(x_0+14) = f_k(x_0+3)\, p^i(x_0+14,\, x_0+3) + \\ + (1-\sigma_{x_0+14})\, P_{10}{}^{(k)}(x_0+13)$$

etc.

Après avoir calculé ces nombres on peut déduire aussitôt les nombres

$$\varphi_k(x) = \tfrac{3}{8}\, p^i(x,\, x)\, f_k(x) + \tfrac{7}{8}\, p^i(x,\, x-1)\, f_k(x-1) + \\ + \tfrac{23}{24}\, p^i(x,\, x-2)\, f_k(x-2) + \sum_{i=3}^{m} p^i(x,\, x-1)\, f_k(x-i) + P_m{}^{(k)}(x).$$

Les nombres $\nu(x)$, $\sigma^i{}_{[x]+k}$ qui ont servi au calcul effectif de $l^{aa}(x)$ sont donnés par la table I.

Pour montrer la rapidité de la convergence des nombres $\varphi_k(x)$ de laquelle rapidité dépend l'application de la méthode, ces nombres sont également donnés dans la suite de la table I. On voit immédiatement que la convergence est très rapide pour $x < 45$.

Dans le but de prouver l'exactitude de la méthode des équations intégrales on a calculé les nombres $l^{aa}(x)$ en appliquant une autre méthode approximative. Cette méthode provient aussi de l'équation

$$l(x) = l^{aa}(x) + \int l^{aa}(\xi)\, \nu(\xi)\, p^i(x, \xi)\, d\xi,$$

mais le procès numérique consiste dans ce qu'on essaie d'obtenir par des méthodes numériques les expressions

$$A(x) = \int_{x_0}^{x_0+{}^1/_2} l^{aa}(\xi)\, \nu(\xi)\, p^i(x, \xi)\, d\xi,$$

$$B(x) = \sum_{t=x_0+1}^{x-1} \int_{t-{}^1/_2}^{t+{}^1/_2} l^{aa}(\xi)\, \nu(\xi)\, p^i(x, \xi)\, d\xi,$$

$$C(x) = \int_{x-{}^1/_2}^{x} l^{aa}(\xi)\, \nu(\xi)\, p^i(x, \xi)\, d\xi$$

en quelles on peut décomposer l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} l^{aa}(\xi)\, \nu(\xi)\, p^i(x, \xi)\, d\xi.$$

Si on emploie d'une part le théorème de la valeur moyenne de l'intégrale et d'autre part la rélation connue

$$\int_{\tau}^{\tau+1} l^{aa}(z)\, \nu(z)\, dz = l^{aa}(\tau)\, i(\tau),$$

où $i(\tau)$ est la probabilité de devenir invalide dans le cours d'une année; on peut écrire

$$A(x) = p^i(x, x_0 + \vartheta)\, \alpha\, .\, l^{aa}(x_0)\, i(x_0),$$

$$B(x) = \sum_{t=x_0+1}^{x-1} p^i(x, t + \vartheta')\, .\, l^{aa}(t - \tfrac{1}{2})\, i(t - \tfrac{1}{2}),$$

$$C(x) = p^i(x, x - \vartheta'')\, \alpha'\, .\, l^{aa}(x - 1)\, i(x - 1),$$

où il y a

$$0 < \vartheta < \tfrac{1}{2}, \quad 0 < \alpha < 1, - \tfrac{1}{2} < \vartheta' < + \tfrac{1}{2}$$
$$0 < \vartheta'' < \tfrac{1}{2}, \qquad 0 < \alpha' < 1.$$

Si on pose maintenant approximativement

$$\vartheta = 0,\ \vartheta' = 0,\ \vartheta'' = \tfrac{1}{4},\ \alpha = \alpha' = \tfrac{1}{2},$$

et si on calcule les nombres $p^i(x, x - \frac{1}{4})$ par l'interpolation quadratique des valeurs

$$p^i(x, x - 1) = 1 - \sigma^i{}_{[x-1]},$$
$$p^i(x, x - 2) = [1 - \sigma^i{}_{[x-1]+0}]\ [1 - \sigma^i{}_{[x-2]+1}]$$

ou selon la formule

$$p^i(x, x - \tfrac{1}{4}) = \tfrac{21}{32} + \tfrac{7}{16}\, p^i(x, x - 1) - \tfrac{3}{32}\, p^i(x, x - 2),$$

Ia

x	$l(x)$	$\nu(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$	$\varphi_5(x)$	$\varphi_6(x)$	$\varphi_7(x)$
20	100000,00	0,0006	0,00						
21	99334,88	0,0008	45,79						
22	98645,30	0,0010	85,73	0,06					
23	97955,72	0,0012	119,82	0,11					
24	97270,73	0,0014	160,78	0,19					
25	96593,38	0,0016	204,82	0,31					
26	95922,14	0,0018	252,97	0,48					
27	95255,50	0,0020	305,46	0,69					
28	94591,91	0,0021	358,97	0,95					
29	93928,32	0,0023	415,21	1,28					
30	93263,20	0,0025	478,53	1,70					
31	92595,03	0,0026	543,68	2,19	0,00				
32	91916,15	0,0027	608,45	2,76	0,01				
33	91220,45	0,0028	674,95	3,40	0,01				
34	90503,35	0,0029	743,58	4,14	0,02				
35	89761,78	0,0030	814,54	5,00	0,02				
36	88991,16	0,0031	887,88	5,96	0,03				
37	88189,96	0,0033	967,05	7,09	0,04				
38	87356,66	0,0035	1054,88	8,45	0,05				
39	86485,12	0,0037	1148,74	10,05	0,07				
40	85575,36	0,0040	1251,76	11,98	0,09				
41	84636,56	0,0044	1369,72	14,38	0,12				
42	83674,81	0,0048	1503,23	17,38	0,15				
43	82688,60	0,0052	1649,64	21,02	0,20				
44	81673,34	0,0057	1811,19	25,48	0,28				
45	80624,45	0,0062	1990,37	30,96	0,37				
46	79535,79	0,0068	2187,64	37,69	0,49				
47	78399,74	0,0077	2414,23	46,26	0,67	0,00			
48	77216,29	0,0087	2680,26	57,42	0,93	0,01			
49	75980,86	0,0098	2984,49	71,81	1,29	0,02			
50	74693,43	0,0110	3328,93	90,25	1,81	0,03			
51	73347,91	0,0124	3718,10	113,88	2,57	0,04			
52	71945,81	0,0140	4159,50	114,37	3,68	0,07			
53	70482,55	0,0158	4658,09	183,66	5,30	0,12			
54	68958,14	0,0181	5226,18	234,84	7,69	0,19			
55	67371,03	0,0206	5878,01	302,03	11,27	0,33	0,00		
56	65716,64	0,0240	6626,12	390,94	16,69	0,55	0,01		
57	63993,46	0,0280	7504,50	511,22	25,09	0,96	0,03		
58	62202,99	0,0324	8515,64	672,54	38,13	1,70	0,06		
59	60339,13	0,0374	9661,65	886,89	58,22	3,01	0,13		
60	58401,88	0,0438	10967,06	1173,63	89,49	5,35	0,26	0,00	
61	56591,24	0,0520	12483,32	1564,70	139,25	9,70	0,55	0,02	
62	54307,21	0,0610	14233,19	2098,07	218,79	17,82	1,19	0,06	
63	52148,25	0,0710	16191,33	2811,27	344,12	32,82	2,57	0,16	0,00
64	49917,43	0,0820	18347,45	3751,71	539,10	60,23	5,53	0,42	0,02
65	47617,81	0,0930	20658,01	4963,55	835,48	109,10	11,70	1,06	0,07
66	45250,91	0,1040	23041,47	6475,86	1271,51	193,25	24,09	2,55	0,23
67	42825,91	0,1160	25441,46	8321,57	1896,92	334,04	48,17	5,90	0,63
68	40345,86	0,1290	27824,53	10542,79	2777,96	564,43	93,76	13,23	1,62

Hommes

$\varphi_8(x)$	$\varphi_9(x)$	$\varphi_{10}(x)$	$\varphi_{11}(x)$	$\varphi_{12}(x)$	$\varphi_{13}(x)$	$\varphi_{14}(x)$	$\varphi_{15}(x)$	$\varphi_{16}(x)$	$\varphi_{17}(x)$	$l^{ii}(x)$	$l^{aa}(x)$
										0,00	100000,00
										45,79	99280,09
										85,67	98559,63
										119,71	97836,01
										160,59	97110,14
										204,51	96388,87
										252,49	95669,65
										304,77	94950,73
										358,02	94233,89
										413,93	93514,39
										476,83	92786,37
										541,49	92053,54
										605,70	91310,45
										671,56	90548,89
										739,46	89763,89
										809,56	88952,22
										881,95	88109,21
										960,00	87229,96
										1046,48	86310,18
										1138,76	85346,36
										1239,87	84335,49
										1355,46	83281,10
										1486,00	82188,81
										1628,82	81059,78
										1785,99	79887,35
										1959,78	78664,67
										2150,44	77385,35
										2368,64	76031,10
										2623,76	74592,53
										2913,95	73066,91
										3240,46	71452,97
										3606,75	69741,16
										4018,74	67297,07
										4479,61	66002,94
										4998,84	63959,30
										5586,92	61784,11
										6251,33	59465,31
										7017,44	56976,02
										7879,59	54323,40
										8830,10	51509,03
										9877,83	48524,05
										11048,70	45342,54
										12337,22	41969,99
										13693,77	38454,48
										15079,74	34837,69
0,00										16431,56	31186,25
0,02										17665,62	27585,29
0,05	0,00									18725,62	24100,29
0,17	0,02									19577,27	20748,59

Ia (suite)

x	$l(x)$	$\nu(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$	$\varphi_5(x)$	$\varphi_6(x)$	$\varphi_7(x)$
69	37823,00	0,1420	30123,54	13159,80	3989,95	931,20	177,41	28,67	4,04
70	35268,03	0,1578	32286,59	16192,57	5627,13	1503,04	327,31	60,39	9,70
71	32691,66	0,1709	34261,36	19638,34	7787,34	2369,92	587,20	123,10	22,43
72	31109,17	0,1837	35871,07	23352,39	10504,13	3621,69	1015,41	240,57	49,49
73	27537,38	0,1925	37046,79	27203,10	13785,74	5348,84	1685,62	448,35	103,44
74	24991,59	0,1998	37654,94	30939,21	17528,47	7596,05	2671,00	791,89	203,40
75	22491,67	0,2062	37677,57	34386,02	21621,76	10391,28	4048,84	1328,97	377,54
76	20057,49	0,2120	37117,57	37375,29	25911,95	13721,35	5886,77	2125,92	663,94
77	17705,88	0,2173	36005,76	39764,21	30215,62	17526,83	8231,95	3252,50	1110,52
78	15461,30	0,2223	34389,57	41432,57	34321,91	21692,81	11096,16	4772,11	1772,52
79	13342,10	0,2269	32333,47	42291,59	38004,51	26045,63	14439,95	6727,99	2706,02
80	11362,04	0,2313	29915,45	42292,45	41040,74	30360,06	18162,26	9127,82	3958,36
81	9537,93	0,2354	27231,23	41451,76	43262,04	34404,69	22119,40	11943,38	5562,70
82	7883,55	0,2392	24364,07	39799,84	44512,07	37915,26	26101,68	15087,15	7520,17
83	6403,47	0,2441	21406,06	37419,03	44704,78	40655,95	29873,88	18426,60	9798,98
84	5105,35	0,2505	18455,96	34453,21	43863,50	42482,77	33234,79	21820,68	12349,22
85	3993,76	0,2591	15602,10	31060,30	42065,56	43307,64	36002,77	25114,00	15097,92
86	3068,71	0,2716	12924,24	27019,35	39423,94	43138,32	38069,59	28182,78	17977,96

Ib

x	(lx)	$\nu(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(\varphi)$	$\varphi_4(x)$	$\varphi_5(x)$	$\varphi_6(x)$	$\varphi_7(x)$	$\varphi_8(x)$
20	100000,00	0,0007	0,00	0,00						
21	99333,55	0,0010	61,71	0,02						
22	98646,41	0,0013	123,76	0,10						
23	97941,54	0,0018	198,15	0,26						
24	97221,89	0,0023	301,04	0,59						
25	96491,90	0,0028	427,91	1,17						
26	95751,57	0,0032	576,12	2,12	0,00					
27	95008,28	0,0036	742,85	3,53	0,01					
28	94263,51	0,0041	931,91	5,56	0,02					
29	93515,78	0,0045	1144,69	8,39	0,04					
30	92763,62	0,0048	1372,90	12,11	0,08					
31	92007,03	0,0051	1613,06	16,78	0,13					
32	91244,53	0,0053	1863,71	22,49	0,20					
33	90474,64	0,0055	2120,27	29,27	0,30					
34	89700,32	0,0056	2381,92	37,12	0,42					
35	88917,13	0,0058	2646,07	46,12	0,59					
36	88126,55	0,0059	2919,01	56,45	0,79					
37	87325,63	0,0062	3208,76	68,29	1,05	0,00				
38	86515,84	0,0065	3507,45	82,10	1,38	0,01				
39	85698,66	0,0070	3827,42	98,35	1,81	0,02				
40	84872,62	0,0075	4177,54	117,82	2,38	0,03				
41	84036,23	0,0080	4551,41	140,71	3,11	0,05				
42	83193,94	0,0085	4949,15	167,49	4,04	0,06				

Hommes

$\varphi_8(x)$	$\varphi_9(x)$	$\varphi_{10}(x)$	$\varphi_{11}(x)$	$\varphi_{12}(x)$	$\varphi_{13}(x)$	$\varphi_{14}(x)$	$\varphi_{15}(x)$	$\varphi_{16}(x)$	$\varphi_{17}(x)$	$l^{ii}(x)$	$l^{aa}(x)$
0,50	0,05									20174,82	17648,18
1,38	0,17	0,02								20493,50	14774,53
3,62	0,52	0,07	0,00	0,00						20523,80	12167,86
9,02	1,47	0,22	0,03	0,00						20217,71	9891,46
21,11	3,87	0,65	0,10	0,02						19603 49	7933,89
46,19	9,42	1,74	0,30	0,05	0,00					18692,40	6299,19
94,72	21,32	4,36	0,83	0,15	0,02					17542,38	4949,29
182,97	45,19	10,14	2,09	0,40	0,07	0,00				16211,51	3845,98
334,33	90,14	22,04	4,94	1,03	0,19	0,03	0,00			14758,15	2947,73
580,11	169,92	45,11	10,97	2,46	0,51	0,09	0,02			13236,32	2224,98
958,46	303,63	87,11	22,87	5,54	1,24	0,25	0,05	0,00		11695,17	1646,93
1511,00	515,60	159,24	44,98	11,71	2,84	0,63	0,14	0,02	0,00	10177,44	1184,60
2279,70	834,81	276,55	83,74	23,37	6,06	1,46	0,33	0,07	0,01	8719 43	818,50
3297,18	1291,28	457,29	147,94	44,09	12,20	3,15	0,76	0,17	0,03	7346,07	537,48
4582,44	1913,60	722,36	249,00	79,04	23,27	6,40	1,64	0,39	0,09	6079,09	324 38
6144,65	2729,49	1095,72	401,52	135,44	42,36	12,36	3,37	0,86	0,21	4934,73	170,62
7978,60	3763,36	1603,84	623,75	223,24	74,06	22,91	6,64	1,80	0,47	3924,30	69,46
10079,55	5043,28	2279,49	940,04	356,66	125,38	41,09	12,62	3,65	1,00		

Femmes

$\varphi_9(x)$	$\varphi_{10}(x)$	$\varphi_{11}(x)$	$\varphi_{12}(x)$	$\varphi_{13}(x)$	$\varphi_{14}(x)$	$\varphi_{15}(x)$	$\varphi_{16}(x)$	$\varphi_{17}(x)$	$\varphi_{18}(x)$	$\varphi_{19}(x)$	$l^{ii}(x)$	$l^{aa}(x)$
											0,00	100000,00
											61,69	99271,86
											123,66	98522,75
											197,89	97743,65
											300,45	96921,44
											426,74	96065,16
											574,00	95177,57
											739,33	94268,95
											926,37	93337,14
											1136,34	92379,44
											1360,87	91402,75
											1596,41	90410,62
											1841,42	89403,11
											2091,30	88383,34
											2345,22	87355,10
											2692,78	86316,59
											2863,35	85263,20
											3141,52	84184,11
											3426,72	83089,12
											3927,60	81967,80
											4062,07	80810,55
											4695,28	79622,47
											4785,64	78408,30

Ib (suite)

x	$l(x)$	$\nu(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$	$\varphi_5(x)$	$\varphi_6(x)$	$\varphi_7(x)$	$\varphi_8(x)$
43	82341,29	0,0091	5370,69	198,69	5,23	0,10				
44	81478,31	0,0097	5821,04	235,20	6,74	0,14				
45	80604,98	0,0103	6296,75	277,51	8,66	0,20				
46	79721,30	0,0111	6801,80	326,70	11,10	0,30				
47	78821,37	0,0120	7348,19	384,73	14,22	0,40				
48	77900,76	0,0131	7940,53	453,45	18,25	0,57	0,00			
49	76956,50	0,0147	8599,66	536,86	23,58	0,80	0,01			
50	75981,20	0,0166	9351,36	640,69	30,84	1,15	0,03			
51	74966,01	0,0186	10200,32	769,67	40,72	1,67	0,05			
52	73902,06	0,0211	11172,44	931,01	54,31	2,46	0,08			
53	72783,43	0,0236	12244,49	1131,43	73,01	3,65	0,14			
54	71593,86	0,0270	13440,83	1381,09	98,91	5,46	0,24	0,00		
55	70330,42	0,0309	14808,77	1699,47	135,66	8,35	0,42	0,01		
56	68976,83	0,0354	16359,58	2105,08	188,03	12,95	0,72	0,03		
57	67530,15	0,0413	18131,56	2628,25	263,91	20,41	1,29	0,07		
58	65980,02	0,0485	20190,95	3316,95	376,63	32,88	2,34	0,13		
59	64322,02	0,0580	22598,98	4237,23	547,84	54,39	4,39	0,29	0,02	
60	62551,72	0,0680	25412,38	5473,96	810,92	92,09	8,50	0,66	0,04	
61	60669,11	0,0775	28554,26	7082,67	1204,93	156,87	16,60	1,47	0,11	
62	58675,67	0,0863	31921,05	9102,62	1775,75	264,67	32,03	3,27	0,28	0,02
63	56572,88	0,0937	35402,89	11554,28	2573,50	437,21	60,24	6,99	0,70	0,06
64	51366,65	0,1010	38862,48	14427,27	3647,70	702,47	109,60	14,39	1,63	0,16
65	52062,89	0,1083	42291,82	17756,15	5066,99	1099,89	193,24	28,58	3,64	0,40
66	49671,95	0,1155	45602,47	21538,27	6900,49	1679,56	330,54	54,71	7,82	0,97
67	47198,25	0,1228	48738,10	25764,93	9221,59	2504,41	549,43	101,31	16,13	2,25
68	44653,62	0,1317	51651,87	30437,19	12120,96	3658,56	891,30	182,40	32,23	5,01
69	42046,93	0,1448	54408,93	35674,33	15778,28	5283,88	1427,16	323,61	63,34	10,91
70	39390,00	0,1578	57004,02	41574,36	20411,51	7578,87	2267,79	569,33	123,31	23,51
71	36694,64	0,1709	59278,38	48015,59	26130,27	10742,07	3555,92	986,95	236,21	49,76
72	33969,74	0,1837	61137,83	54891,58	33047,06	15012,34	5486,97	1680,42	443,54	103,00
73	31227,10	0,1925	62419,87	61914,92	41102,22	20564,93	8271,67	2785,88	808,16	206,17
74	28482,98	0,1998	62951,92	68656,76	50024,05	27442,28	12093,16	4459,52	1415,63	394,99
75	25753,64	0,2062	62687,87	74818,38	59550,28	35652,36	17134,60	6887,18	2381,75	723,59
76	23058,28	0,2120	61612,77	80114.31	69343,81	45106,14	23538,06	10267,48	3851,59	1268,70
77	20419,08	0,2173	59734,38	84260,48	78968,35	55569,21	31352,73	14780,11	5989,41	2130,39
78	17858,20	0,2223	57121,08	87089,40	88031,46	66753,79	40563,50	20586,04	8977,43	3435,12
79	15400,76	0,2269	53843,93	88436,48	96069,58	78218,78	51006,91	27768,74	12986,11	5326,88
80	13076,31	0,2313	49984,95	88192,53	102630,04	89426,51	62376,75	36310,08	18150,66	7956,12
81	10908,50	0,2354	45671,90	86348,61	107328,33	99785,38	74225,60	46061,02	24538,54	11466,19
82	8923,93	0,2392	41020,41	82917,56	109781,42	108594,99	85899,79	56665,69	32082,52	15919,96
83	7181,70	0,2441	36185,08	78068,69	109853,04	115341,71	96785,54	67706,35	40640,32	21375,40
84	5699,55	0,2505	31321,14	72013,42	107503,46	119580,26	106238,49	78659,16	49959,76	27799,29
85	4464,18	0,2591	26586,68	65067,53	102925,46	121127,26	113777,86	89035,10	59753,54	35125,80
86	3475,59	0,2716	22118,84	57576,49	96455,73	120021.84	119117,01	98447,94	69764,05	43295,02

Femmes

$\varphi_9(x)$	$\varphi_{10}(x)$	$\varphi_{11}(x)$	$\varphi_{12}(x)$	$\varphi_{13}(x)$	$\varphi_{14}(x)$	$\varphi_{15}(x)$	$\varphi_{16}(x)$	$\varphi_{17}(x)$	$\varphi_{18}(x)$	$\varphi_{19}(x)$	$l^{ii}(x)$	$l^{aa}(x)$
											5177,13	77164,16
											5592,44	75885,87
											6027,70	74577,28
											6485,90	73235,40
											6977,28	71844,09
											7504,76	70396,00
											8085,59	68870,91
											8740,39	67240,81
											9469,75	65496,26
											10293,36	63608,70
											11182,56	61600,87
											12153,43	594[illegible]0,43
											13237,02	57093,40
											14430,27	54546,56
											15748,03	51782,12
											17219,96	48760,06
											18859,32	45462,70
											20665,13	41886,59
											22534,89	38134,22
											24358,53	34317,14
											26038,79	30534,09
0,02											27477,14	26889,51
0,04											28670,71	23392,18
0,11											29567,92	20104,03
0,28	0,02										30152,61	17045,64
0,70	0,07										30413,83	14239,79
1,68	0,22	0,02									30386,46	11660,47
4,01	0,60	0,07									30064,04	9325,96
9,37	1,58	0,23	0,03								29414,40	7280,24
21,39	4,00	0,67	0,10	0,02							28446,04	5523,70
47,01	9,69	1,81	0,30	0,05							27168,90	4058,20
98,44	22,18	4,55	0,85	0,15	0,02						25611,30	2871,68
196,25	48,13	10,76	2,21	0,42	0,07						23830,01	1923,63
372,91	99,07	24,01	5,35	1,11	0,22	0,03					21883,02	1175,26
675,87	193,72	50,67	12,19	2,72	0,57	0,11	0,02				19827,55	591,53
1171,94	361,07	101,50	26,24	6,29	1,41	0,29	0,05				17720,37	137,83
1947,59	642,82	193,53	53,59	13,75	3,30	0,73	0,15	0,02			15611,41	
3107,51	1095,35	352,06	104,06	28,49	7,27	1,74	0,39	0,07	0,01		13539,95	
4767,84	1789,60	612,33	192,63	56,12	15,23	3,87	0,92	0,20	0,04			
7035,59	2804,51	1018,81	340,19	105,18	30,29	8,17	2,07	0,49	0,11	0,02		
10010,71	4227,84	1626,88	575,30	188,30	57,41	16,39	4,39	1,12	0,26	0,06		
13770,84	6150,47	2502,38	935,42	323,60	104,24	31,43	8,91	2,38	0,60	0,14		
18379,30	8669,28	3724,43	1469,84	536,72	182,46	58,06	17,36	4,90	1,31	0,33		
23912,12	11903,86	5396,60	2247,11	865,62	310,39	104,15	32,85	9,78	2,76	0,74		

IIa Hommes

x	l_x	A_x	B_x	C_x	l_x^{ii}	l_x^{aa}
20	100000	—	—	—	—	100000
21	99335	12,00	— 0,23	24,23	36	99299
22	98645	7,80	28,93	32,27	69	98576
23	97956	6,14	56,58	40,28	103	97853
24	97271	5,24	87,53	48,23	141	97130
25	96593	4,68	122,16	56,16	183	96410
26	95922	4,31	160,67	64,02	229	95693
27	95256	4,03	203,13	71,84	279	94977
28	94592	3,81	250,58	79,61	334	94258
29	93928	3,63	303,02	83,35	390	93538
30	93263	3,48	354,47	91,05	449	92814
31	92595	3,35	413,04	98,61	515	92080
32	91916	3,23	476,57	102,20	582	91334
33	91220	3,11	541,17	105,72	650	90570
34	90503	2,99	606,81	109,20	719	89784
35	89762	2,88	675,53	112,59	791	88971
36	88991	2,77	745,31	115,92	864	88127
37	88190	2,66	818,20	119,14	940	87250
38	87357	2,56	893,33	126,11	1022	86335
39	86485	2,46	976,64	132,90	1112	85373
40	85575	2,37	1065,14	139,49	1207	84368
41	84637	2,27	1166,09	149,64	1318	83319
42	83675	2,18	1275,64	163,18	1441	82234
43	82689	2,09	1399,55	176,36	1578	81111
44	81673	2,00	1536,79	189,21	1728	79945
45	80624	1,92	1690,88	205,20	1898	78726
46	79536	1,84	1859,54	220,62	2082	77454
47	78400	1,76	2043,28	238,96	2284	76116
48	77216	1,68	2255,41	266,91	2524	74692
49	75981	1,61	2498,42	296,97	2797	73184
50	74693	1,53	2779,56	328,91	3110	71583
51	73348	1,46	3093,17	362,37	3457	69891
52	71946	1,39	3446,39	400,22	3848	68098
53	70483	1,32	3844,89	441,79	4288	66195
54	68958	1,26	4290,41	486,33	4778	64180
55	67371	1,19	4797,78	542,03	5341	62030
56	65717	1,13	5368,72	598,15	5968	59749
57	63993	1,07	6016,53	673,40	6691	57302
58	62203	1,01	6758,45	755,54	7515	54688
59	60339	0,95	7595,01	837,04	8433	51906
60	58402	0,90	8519,13	919,97	9440	48962
61	56391	0,84	9542,29	1018,87	10562	45829
62	54307	0,79	10684,14	1135,07	11820	42487
63	52148	0,74	11932,24	1237,02	13170	38978
64	49917	0,69	13251,64	1323,67	14576	35341
65	47618	0,64	14595,95	1388,41	15985	31633
66	45251	0,59	15896,90	1411,51	17309	27942
67	42826	0,55	17073,71	1395,74	18470	24356
68	40346	0,50	18070,10	1358,40	19429	20917
69	37823	0,46	18842,12	1298,42	20141	17682
70	35268	0,41	19349,37	1209,22	20559	14709

IIa (suite) Hommes

x	l_x	A_x	B_x	C_x	l_x^{ii}	l_x^{aa}
71	32692	0,37	19576,33	1118,30	20695	11997
72	30109	0,34	19489,42	988,24	20478	9631
73	27537	0,30	19081,58	853,12	19935	7602
74	24992	0,27	18358,09	705,64	19064	5928
75	22492	0,24	17350,64	571,12	17922	4570
76	20057	0,21	16121,59	454,20	16576	3481
77	17706	0,18	14736,34	355,48	15092	2614
78	15461	0,16	13258,51	273,33	13532	1929
79	13342	0,13	11741,87	206,00	11948	1394
80	11362	0,11	10237,35	151,54	10389	973
81	9538	0,09	8785,36	107,55	8893	645
82	7884	0,08	7412,59	72,33	7485	399
83	6403	0,06	6142,62	45,32	6188	215
84	5105	0,05	4992,12	24,83	5017	88
85	3994	0,04	3973,57	10,39	3984	10
86	3069	0,03	3092,75	1,22	3094	—

IIb Femmes

x	l_x	A_x	B_x	C_x	l_x^{ii}	l_x^{aa}
20	100000	—	—	—	—	100000
21	99334	16,42	0,47	29,05	45	99289
22	98646	12,79	44,45	41,76	99	98547
23	97942	11,18	98,22	54,60	164	97778
24	97222	10,21	169,86	75,93	256	96966
25	96492	9,50	266,15	97,35	373	96119
26	95752	8,96	386,16	118,88	514	95238
27	95008	8,55	526,34	136,11	671	94337
28	94264	8,23	686,74	153,03	848	93416
29	93516	7,96	872,23	173,81	1054	92462
30	92764	7,72	1077,26	190,02	1275	91489
31	92007	7,51	1301,83	201,66	1511	90496
32	91245	7,31	1538,69	213,00	1759	89486
33	90475	7,11	1782,16	219,73	2009	88466
34	89700	6,92	2032,83	226,25	2266	87434
35	88917	6,73	2289,81	228,46	2525	86392
36	88127	6,55	2548,85	234,60	2790	85337
37	87326	6,38	2815,23	236,39	3058	84268
38	86516	6,21	3089,82	245,97	3342	83174
39	85699	6,04	3377,78	255,18	3639	82060
40	84873	5,87	3685,26	271,87	3963	80910
41	84036	5,72	4015,46	287,82	4309	79727
42	83194	5,56	4366,22	303,22	4675	78519
43	82341	5,41	4736,64	317,95	5060	77281
44	81478	5,26	5124,08	335,66	5465	76013
45	80605	5,12	5534,22	352,66	5892	74713
46	79721	4,98	5964,33	368,69	6338	73383
47	78821	4,84	6418,18	390,98	6814	72007
48	77901	4,71	6905,84	415,45	7326	70575
49	76957	4,58	7430,17	445,25	7880	69077
50	75981	4,45	8003,71	489,84	8498	67483

IIb (suite) Femmes

x	l_x	A_x	B_x	C_x	l_x^{ii}	l_x^{aa}
51	74966	4,33	8650,38	541,29	9196	65770
52	73902	4,20	9364,96	591,84	9961	63941
53	72783	4,07	10161,13	653,80	10819	61964
54	71594	3,95	11036,52	709,53	11750	59844
55	70330	3,83	11996,38	784,79	12785	57545
56	68977	3,71	13066,76	864,53	13935	55042
57	67530	3,58	14246,90	948,52	15199	52331
58	65980	3,46	15555,14	1053,40	16613	49367
59	64322	3,34	17011,48	1168,18	18183	46139
60	62552	3,22	18642,52	1307,26	19953	42599
61	60669	3,09	20426,41	1416,50	21846	38823
62	58676	2,97	22274,53	1472,50	23750	34926
63	56573	2,85	24074,84	1476,31	25554	31019
64	54367	2,73	25717,80	1424,47	27145	27222
65	52063	2,60	27128,63	1347,77	28479	23584
66	49672	2,48	28257,22	1252,30	29512	20160
67	47198	2,36	29076,52	1142,12	30221	16977
68	44654	2,23	29560,40	1022,37	30585	14069
69	42047	2,11	29717,05	908,84	30628	11419
70	39390	1,98	29556,16	810,86	30369	9021
71	36695	1,85	29074,20	697,95	29774	6921
72	33970	1,72	28261,71	579,57	28843	5127
73	31227	1,59	27124,20	461,21	27587	3640
74	28483	1,46	25683,76	342,78	26028	2455
75	25754	1,33	23983,06	239,61	24224	1530
76	23058	1,21	22082,93	153,86	22238	820
77	20419	1,09	20051,32	84,59	20137	282
78	17858	0,97	17951,29	29,74	17982	—

on a ce résultat définitif

$$A(x) = \frac{l^{aa}{}_{(x_0)} \,.\, i(x_0)}{2} \prod_{k=0}^{x-x_0} (1 - \sigma^{i}{}_{[x_0]+k}),$$

$$B(x) = \sum_{t=x_0+1}^{a-1} \frac{l_{(t)}{}^{aa} + l_{(t-1)}{}^{aa}}{2} \cdot \frac{i(t) + i(t-1)}{2} \prod_{k=0}^{x-t} (1 - \sigma^{i}{}_{[t]+k}),$$

$$C(x) = \frac{l_{(x-1)}{}^{aa}\; i(x-1)}{2} \left[\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{6}\,(1 - \sigma^{i}{}_{[x-1]+0})\right] -$$

$$- \tfrac{8}{3\,2}\,[1 - \sigma^{i}{}_{[x-2]+0}]\,[1 - \sigma^{i}{}_{[x-1]+1}].$$

Dans la table II j'ai donné les nombres A, B, C et aussi les résultats de ces calculs.

Selon cette méthode on a déduit les valeurs actuarielles de l'assurance invalidité vieillesse tchécoslovaque. Le rapport des motifs du projet de la loi tchécoslovaque contient aussi une comparaison des résultats de ces deux méthodes qui démontre considérant la différence des procédés et des données empiriques l'accord suffisant des deux méthodes.