Fr. Kudela

Sur quelques inégalités entre les moments absolus d'ordre positif d'une suite de variables aléatoires indépendantes et le second théorème — limite du calcul des probabilités au domaine de la loi de Laplace — Gauss dans la formulation de Liapounoff. I

Aktuárské vědy, Vol. 3 (1932), No. 3, 102–109

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144575

dieser Gleichungen aus jeder anderen folgt, u. zw. auf Grund eines Satzes von Loewy,[5]) wonach unter geeigneten Voraussetzungen folgende Relation gilt:

$$\int_a^b \varrho(t)\, d\left(\int_0^t \varphi(\tau)\, ds(\tau)\right) = \int_a^b \varrho(t)\, \varphi(t)\, ds(t).$$

6. Bei den vorhergehenden Untersuchungen handelte es sich um Integralgleichungen für das Deckungskapital;[6]) beachtet man aber, daß das Deckungskapital selbst in der Form

$$_tV_{[y]} = {_0V_{[y]}}\, e^{\delta t} + \int_0^t e^{\delta(t-\tau)}\, d\mathfrak{P}^s_{[y]+\tau} - \int_0^t e^{\delta(t-\tau)}\, d\mathfrak{S}_{[y]+\tau}$$

dargestellt werden kann, so können im Falle der bloßen Stetigkeit, wie auch im Falle der Differenzierbarkeit für die Sparprämiensummenfunktion und für die Sparprämienintensität analoge Integralgleichungen aufgestellt werden, die eine gründlichere Analyse der Versicherungsprämie gestatten. Hieraufsoll demnächst noch zurückgegriffen werden.

Trieste, 8. Dezember 1931.

Sur quelques inégalités entre les moments absolus d'ordre positif d'une suite de variables aléatoires indépendantes et le second théorème — limite du calcul des probabilités au domaine de la loi de Laplace — Gauss dans la formulation de Liapounoff.

Par *Fr. Kudela.*

Dans un petit article publié dans ce Journal[1]), nous avons démontré, entre autres, deux inégalités concernant les moments absolus d'une variable aléatoire dont la répartition (c'est-à-dire l'ensemble de valeurs

---

[5]) Zweite Mitteilung, Satz 4. S. 77. Vgl. auch die indessen erschienene Arbeit des Verf: Sugli integrali di Stieltjes e sulla loro applicazione nella matematica attuariale, Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari III/2 (April 1932), p. 160—181.

[6]) Vgl. auch A. Berger, Über das Aequivalenzprinzip, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1929 Heft 4, S. 197—217.

[1]) Note sur quelques inégalités entre les valeurs probables d'une grandeur aléatoire qui ne prend que des valeurs positives, deuxième année, Prague 1931, p. 157 et s.

possibles et l'ensemble de probabilités correspondantes) est arithmétique (discontinue) ou géométrique (continue). Cette démonstration, basée sur la notion de fonction convexe, au sens strict, peut s'étendre sans peine à la variable aléatoire générale X avec la répartition définie par sa fonction de répartition $V(x)$ désignant pour toute valeur réelle x la probabilité pour que la valeur de la variable en question soit plus petite que x; en complétant les propriétés analytiques de cette fonction, qui découlent facilement de la définition, par la condition de prendre aux points de discontinuité la valeur de sa limite à droite, on obtient la notion de fonction de répartition au sens de Mises[2]) se distinguant d'une manière insignifiante de la notion de fonction de probabilités totales donnée par M. Lévy.[3])

En comprenant par $y(x)$ une fonction essentiellement positive de cette variable X, c'est-à-dire une fonction ne prenant que des valeurs positives, les inégalités suivantes seront remplies:

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[y(x)]^l\,dV(x)\right\}^{k-m} < \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[y(x)]^k\,dV(x)\right\}^{l-m} \cdot \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[y(x)]^m\,dV(x)\right\}^{k-l} \tag{1}$$

pour $k > l > m$, et

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[y(x)]^l\,dV(x)\right\}^{k} < \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[y(x)]^k\,dV(x)\right\}^{l} \tag{2}$$

pour $k > l > 0$, bien entendu, sous la supposition évidente que les intégrales de Stieltjès aient un sens. Les inégalités démontrées dans l'article cité comme (8) et (9), pour la variable discontinue, ou comme (8 bis) et (9 bis), pour la variable continue, ne sont qu'un cas particulier des inégalités ci-dessus en cas de répartition arithmétique ou géométrique.

On est conduit tout d'abord, par (2), à une proposition importante citée sans démonstration par M. Liapounoff, dans son mémoire postérieur sur le second théorème-limite,[4]) comme suit: „On peut démontrer, en toute généralité, que l'existence de l'espérance mathématique de X^k, X étant une variable positive et k un nombre positif donné quelconque, entraîne l'existence des espérances mathématiques de toutes les puissances positives de X qui sont inférieures à k". Comme en vertu de (2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[y(x)]^l\,dV(x) < \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[y(x)]^k\,dV(x)\right\}^{\frac{l}{k}}, \quad k > l > 0,$$

[2]) Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Zeitschrift, T. 4, Berlin 1919, p. 20.

[3]) Calcul des probabilités, Paris 1925, p. 136.

[4]) Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité, Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg, T. XII., No 5 (1901), p. 5 — Cf. de plus S. Bernstein, Sur l'extension du théorème-limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes, Mathematische Annalen, T. 97, 1927, Chapitre 1er, § 4.

la proposition en suit immédiatement, et cela dans l'énoncé encore plus large que celui de Liapounoff, en se rapportant aux valeurs probables de toute fonction essentiellement positive $y(x)$ d'une grandeur aléatoire quelconque X, et non seulement à celles d'une variable aléatoire positive.

I.

1. Rappelons que les inégalités (1) et (2) sont le point de départ de la démonstration de l'existence de certaines inégalités entre des moments absolus d'une quantité aléatoire X, en entendant, d'une manière géné rale, par le moment absolu d'ordre k tantôt l'espérance mathématique de la k-ième puissance de sa valeur absolue

$$\overline{m^{(k)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \, dV(x) \tag{3}$$

(le moment absolu par rapport à l'origine, ou simplement le moment absolu), tantôt l'espérance mathématique de la valeur absolue de la différence entre la grandeur X elle-même et sa valeur probable $\overline{x}$

$$\overline{\mu^{(k)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \overline{x}|^k \, dV(x) \tag{4}$$

(le moment absolu par rapport à la valeur probable, ou bien le moment absolu central d'après la terminologie de Mises).

On se sert de l'inégalité (2) voulant déduire des inégalités d'un caractère plus général existant entre des moments d'un ensemble de variables aléatoires. A la page 2 du mémoire de Liapounoff se trouve, sans démonstration, un lemma dont le contenu est plus large que la portée des inégalités (1) et (2) qui s'en sont ensuivies par une réflexion ressemblant à celle qui va suivre. Dans une notation modifiée, ce lemma prend la forme suivante:

En désignant par

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_i, \ldots$$

deux suites, limitées ou illimitées, de nombres positifs quelconques et en général

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i + \ldots = \Sigma a_i,$$

on est conduit à l'inégalité

$$(\Sigma a_i b_i^l)^{k-m} < (\Sigma a_i b_i^k)^{l-m} \,.\, (\Sigma a_i b_i^m)^{k-l} \tag{5}$$

valable pour tous les nombres réels vérifiant les inégalités

$$k > l > m \geqq 0;$$

si d'ailleurs

$$\Sigma a_i = 1,$$

il résulte de (5), comme le cas particulier, en y posant $m = 0$, l'inégalité

$$(\Sigma a_i b_i^l)^k < (\Sigma a_i b_i^k)^l \tag{6}$$

ayant lieu pour tous $k > l > 0$.

La démonstration de (5), pour un nombre fini de termes, se trouve dans l'étude fameuse de M. Jensen sur les valeurs moyennes,[5]) et cela pour tous les exposants $k > l > m$; quant au cas de nombre infini de termes, celui-ci a observé seulement que les inégalités faisant l'objet de son étude ne perdent pas de sens si les suites infinies en question convergent. Or, la série infinie

$$S(k) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^k$$

étant convergente, quel que soit le nombre réel k, on peut déduire, au moyen de la forme quadratique binaire définie positive suivante

$$\Sigma a_i \, (\lambda b_i^{\frac{k}{2}} + \nu \, b_i^{\frac{l}{2}})^2 = \lambda^2 \, S(k) + 2\lambda\nu S\left(\frac{k+l}{2}\right) + \nu^2 S(l),$$

que le logarithme de la série $S(k)$ est la fonction convexe, au sens strict, de l'exposant k dans tout le domaine de nombres réels à supposition que les nombres b_i ne soient pas tous identiques, d'où les inégalités (5) et (6) s'ensuivent immédiatement.[6]) Quant à l'effet plus detaillé, nous renvoyons à notre mémoire cité plus haut.

L'application des inégalités ci-dessus aux moments absolus d'une suite de quantités variables aléatoires indépendantes conduit à des conséquences très intéressantes.

Considérons donc une suite, limitée ou illimitée, de variables aléatoires indépendantes les unes des autres

$$X_1, X_2, X_3, \ldots X_i, \ldots \tag{7}$$

dont les répartitions soient définies par leurs fonctions de répartition au sens de Mises:

$$V_1(x), \; V_2(x), \; V_3(x), \ldots, V_i(x), \ldots \tag{8}$$

et supposons qu'il existe des moments d'ordre positif $\overline{m_i}^{(k)}$, $\overline{\mu_i}^{(k)}$ représentés par les intégrales de Stieltjès

---

[5]) Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Mathematica, T. 30 (1906), p. 183 et 186.

[6]) A l'aide de la formule (5) de Jensen, l. c. p. 180.

$$\left.\begin{aligned}\overline{m}_i^{(k)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \, dV_i(x), \qquad (9)\\ \overline{\mu}_i^{(k)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \overline{x}_i|^k \, dV_i(x), \qquad (10)\end{aligned}\right\} i = 1, 2, 3, \ldots;$$

dans lesquelles

$$\overline{x}_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x dV_i(x)$$

désigne la valeur probable de la variable X_i, ou bien la moyenne arithmétique de la répartition $V_i(x)$.

En observant encore que l'intégrale

$$\overline{\mu}_i^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x}_i)^2 \, dV_i(x) = \sigma_i^2$$

définit le carré de l'écart quadratique moyen σ_i, nous pouvons maintenant aborder la recherche proposée.

Etant posé $y(x) = |x|$, dans l'iné galité(2), les inégalités suivantes, par égard à la notation (3), en découlent

$$[\overline{m}^{(m)}]^l < [\overline{m}^{(l)}]^m, \qquad (11)$$
$$[\overline{m}^{(m)}]^k < [\overline{m}^{(k)}]^m, \qquad (11')$$
$$[\overline{m}^{(l)}]^k < [\overline{m}^{(k)}]^l, \qquad (11'')$$

ce que l'on peut résumer en

$$\overline{m}^{(k)} > [\overline{m}^{(l)}]^{\frac{k}{l}} > [\overline{m}^{(m)}]^{\frac{k}{m}}$$

où $k > l > m > 0$; si l'on pose, dans la même inégalité, $y(x) = |x - \overline{x}|$, on arrive successivement aux relations

$$[\overline{\mu}^{(m)}]^l < [\overline{\mu}^{(l)}]^m \qquad (12)$$
$$[\overline{\mu}^{(m)}]^k < [\overline{\mu}^{(k)}]^m, \qquad (12')$$
$$[\overline{\mu}^{(l)}]^k < [\overline{\mu}^{(k)}]^l, \qquad (12'')$$

or

$$\overline{\mu}^{(k)} > [\overline{\mu}^{(l)}]^{\frac{k}{l}} > [\overline{\mu}^{(m)}]^{\frac{k}{m}},$$

présentant la forme exactement la même que les inégalités qui les précèdent.

Bornons nous d'abord aux n premiers termes de la suite (7). De (6) on obtient pour

$$a_i = \frac{1}{n}, \; b_i = [\overline{\mu}_i^{(k)}]^{\frac{1}{k}}$$

l'inégalité

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}_i^{(l)}\right\}^k < \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mu}_i^{(l)}]^{\frac{k}{l}}\right\}^l$$

et par suite, en vertu de (12″), l'inégalité

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}_i^{(l)}\right\}^k < \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}_i^{(k)}\right\}^l \tag{13}$$

ayant lieu pour tous les nombres $k > l > 0$. Cette dernière inégalité, comme on le voit, est une analogie complète avec l'inégalité (12″), mais, en se rapportant à la moyenne arithmétique des moments absolus de même ordre appartennant aux n premières variables de la suite (7), elle est plus générale que celle-là. L'application de l'inégalité (5) au cas considéré de la suite présente néanmoins certaines difficultés. En y posant d'une part

$$a_i = \frac{1}{n},\quad b_i = [\overline{\mu}_i^{(m)}]^{\frac{1}{m}},$$

d'autre part

$$a_i = \frac{1}{n},\quad b_i = [\overline{\mu}_i^{(l)}]^{\frac{1}{l}},$$

on aura successivement

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mu}_i^{(m)}]^{\frac{l}{m}}\right\}^{k-m} < \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mu}_i^{(m)}]^{\frac{k}{m}}\right\}^{l-m}\cdot\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}_i^{(m)}\right\}^{k-l},$$

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}_i^{(l)}\right\}^{k-m} < \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mu}_i^{(l)}]^{\frac{k}{l}}\right\}^{l-m}\cdot\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mu}_i^{(l)}]^{\frac{m}{l}}\right\}^{k-l},$$

ce que l'on peut étendre, grâce aux inégalités (12), (12′) et (12″), de la manière suivante:

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mu}_i^{(m)}]^{\frac{l}{m}}\right\}^{k-m} < \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mu}_i^{(m)}]^{\frac{k}{m}}\right\}^{l-m}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}_i^{(m)}\right\}^{k-l} < \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}_i^{(k)}\right\}^{l-m}\cdot\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}_i^{(m)}\right\}^{k-l} <$$

$$< \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}_i^{(k)}\right\}^{l-m}\cdot\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mu}_i^{(k)}]^{\frac{m}{k}}\right\}^{k-l},$$

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mu}_i^{(m)}]^{\frac{l}{m}}\right\}^{k-m} < \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}_i^{(l)}\right\}^{k-m} < \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mu}_i^{(l)}]^{\frac{k}{l}}\right\}^{l-m}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mu}_i^{(l)}]^{\frac{m}{l}}\right\}^{k-l} < \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu}_i^{(k)}\right\}^{l-m}\cdot\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mu}_i^{(k)}]^{\frac{m}{k}}\right\}^{k-l}.$$

De ces expressions, il résulte qu'il doit

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(l)}}\right\}^{k-m} \gtreqless \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(k)}}\right\}^{l-m} \cdot \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(m)}}\right\}^{k-l} \tag{14}$$

où les nombres k, l, m vérifient l'inégalité

$$k > l > m > 0. \tag{15}$$

Nous venons démontrer que le signe $\geqq$, dans (14), ne peut avoir lieu.

Supposons alors qu'il soit

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(l)}}\right\}^{k-m} \geqq \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(k)}}\right\}^{l-m} \cdot \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(m)}}\right\}^{k-l} \tag{14'}$$

pour tous les nombres k, l, m assujettis à l'inégalité

$$k > l > m \geqq 0; \tag{15'}$$

cela posé, il est évident que, si l'inégalité (14') se trouvait remplie sous la condition (15'), elle aurait lieu, à fortiori, sous la condition (15), cette condition étant moins large que (15'), et, n'étant pas vérifiée sous la condition (15'), elle ne peut avoir lieu non plus dans le cas de la condition (15). Mais, comme nous le verrons, la supposition de l'existence de (14') est incompatible, dans sa conclusion, avec l'inégalité (13) établie plus haut: en y posant $m = 0$, ce qu'il est évidemment permis, il en suivrait, tenant compte de l'identité

$$\overline{\mu_i^{(0)}} = 1,$$

la relation suivante

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(l)}}\right\}^{k} \geqq \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(k)}}\right\}^{l}, \quad k > l > 0.$$

Le résultat obtenu est en contradiction évidente avec l'inégalité (13), donc, la supposition (14') étant fausse, l'inégalité

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(l)}}\right\}^{k-m} < \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(k)}}\right\}^{l-m} \cdot \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(m)}}\right\}^{k-l} \tag{16}$$

sera remplie pour tous les nombres k, l, m vérifiant l'inégalité (15'). Il convient de remarquer que la dernière inégalité peut se présenter sous la forme

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(l)}}\right\}^{k-m} < \left\{\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(k)}}\right\}^{l-m} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i^{(m)}}\right\}^{k-l} \tag{17}$$

qui montre l'analogie parfaite avec l'inégalité

$$\{\overline{\mu_i^{(l)}}\}^{k-m} < \{\overline{\mu_i^{(k)}}\}^{l-m} \cdot \{\overline{\mu_i^{(m)}}\}^{k-l}$$

d'une seule grandeur aléatoire résultant de (1) pour la fonction $y(x) = |x - \overline{x}|$.

L'inégalité (16) est, ainsi que (17), manifestement encore plus générale que l'inégalité (13) plus haut. Il est aisé de voir que les inégalités semblables aurons lieu aussi pour les moments $\overline{m_i}^{(k)}$ de variables en nombre fini de la suite (7). En effet, on obtient de (6), grâce à (11''),

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{m_i}^{(l)}\right\}^{k}<\left\{\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}\overline{m_i}^{(k)}\right\}^{l}, \tag{18}$$

et de (5), par l'application de la même méthode,

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{m_i}^{(l)}\right\}^{k-m}<\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{m_i}^{(k)}\right\}^{l-m}\cdot\left\{\frac{1}{n}\sum_{n=i}^{n}\overline{m_i}^{(m)}\right\}^{k-l}, \tag{19}$$

ou bien

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\overline{m_i}^{(l)}\right\}^{k-m}<\left\{\sum_{i=1}^{n}\overline{m_i}^{(k)}\right\}^{l-m}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n}\overline{m_i}^{(m)}\right\}^{k-l} \tag{20}$$

pour tous les nombres $k > l > m \geqq 0$.

(A suivre.)

Die finanzielle Leistungsfähigkeit der tschechoslowakischen Invalidenversicherung der Arbeiter.

Dr. *V. Lenz.*

Professor Dr. Rosmanith befasst sich im letzten d. i. im XII. Kapitel seines Artikels „Zum versicherungstechnischen Aufbau des neuen Pensionsversicherungsgesetzes in der Tschechoslowakei", welcher im Heft 8 der „Versicherungswissenschaftlichen Mitteilungen" veröffentlicht wurde, mit der Invaliditäts- und Altersversicherung der Arbeiter. Auf die übrigen Kapitel des Artikels wurde von Prof. Dr. Schoenbaum und Dr. Havlík erwidert, dieses Kapitel aber zwingt mich als Chefmathematiker der Anstalt, welche die Invaliditäts- und Altersversicherung der Arbeiter durchführt, zu den Ausführungen Prof. R. Stellung zu nehmen.

Die nicht ganz klar formulierten Argumente Prof. R. sind im wesentlichen folgende:

1. Der Hinweis auf die Unzulänglichkeit der von der Zentralsozialversicherungsanstalt gewährten Leistungen, hauptsächlich im Vergleiche zu den Leistungen der Pensionsversicherung.

2. Der Vergleich unserer Invalidenversicherung einerseits mit der reichsdeutschen Invalidenversicherung, anderseits mit dem alten österreichischen Entwurfe aus d. J. 1904 (1908).

3. Die Behauptung, die Zentralsozialversicherungsanstalt habe grosse Ersparnisse an nicht ausgezahlten Leistungen.