Aktuárské vědy

Fr. Kudela

Sur quelques inégalités entre les moments absolus d'ordre positif d'une suite de variables aléatoires indépendantes et le second théorème — limite du calcul des probabilités au domaine de la loi de Laplace — Gauss dans la formulation de Liapounoff. II

Aktuárské vědy, Vol. 3 (1932), No. 4, 174–184

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144582`

Zusammenfassend wäre zu bemerken: Die Formeln (6) bezw. (7) gehen auf die primäre Definition der mittleren Abweichung zurück. Die Formel (7a) ist nur durch den Hinweis auf ihren recht einfachen Bau zu rechtfertigen, die Formel (7b) ist zwar auch willkürlich gewählt, lässt aber wenigstens die Gewichte nicht ganz unberücksichtigt. Umsoweniger ist es am Platze, aus der mehr oder weniger ausgesprochenen Übereinstimmung der rechnerischen Ergebnisse von (7a) und (7b) — beziehungsweise der aus diesen Formeln durch Ausscheidung der Unbekannten w abgeleiteten Ausdrücke — irgendwelche Schlüsse zu ziehen.

Sur quelques inégalités entre les moments absolus d'ordre positif d'une suite de variables aléatoires indépendantes et le second théorème — limite du calcul des probabilités au domaine de la loi de Laplace — Gauss dans la formulation de Liapounoff.

Par *Fr. Kudela.*

(Suite).

La question se pose comment se modifient les résultats obtenus si le nombre n des variables croît au delà de toute limite. Puisque les inégalités (13) et (16), aussi bien que (18) et (19), se rapportent aux moyennes arithmétiques des moments absolus d'une suite de variables aléatoires, il est évident qu'elles conservent leur sens dans le cas de $n = \infty$, si les variables étudiées, parlant en terminologie physique, sont de même ordre de grandeur de sorte que les limites

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\mu_i}^{(m)}}{n}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\mu_i}^{(l)}}{n}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\mu_i}^{(k)}}{n},$$

ainsi que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{m_i}^{(m)}}{n}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{m_i}^{(l)}}{n}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{m_i}^{(k)}}{n},$$

existent et sont différentes de zéro. A l'égard des inégalités (17) et (20), on peut dire seulement qu'elles seront remplies encore pour $n = \infty$ si les séries infinies entre crochets sont convergentes.

2. Dans l'article cité plus haut, nous avons démontré aussi, par une méthode élémentaire, une autre inégalité, savoir

$$(x + y)^p < 2^{p-1}\,(x^p + y^p)^{7)} \tag{21}$$

x, y étant deux nombres positifs et $p > 1$, dont la posibilité d'application au calcul des probabilités doit être illustrée dans la suite.

Soit x une valeur quelconque de la variable aléatoire X avec la fonction de répartition $V(x)$ et la valeur probable $\bar{x}$. Sachant que, en conséquence de la proposition bien connue sur la valeur absolue d'une somme algébrique,

$$|x - \bar{x}|^k \leqq (|x| + |\bar{x}|)^k, \; k > 0$$

on peut, dans le cas de $k > 1$, appliquer à la dernière somme l'inégalité (21), de ce que résulte la relation

$$|x - \bar{x}|^k \leqq 2^{k-1}\,(|x|^k + |\bar{x}|^k);$$

en la intégrant au sens de Stieltjès par rapport à la fonction déterminante $V(x)$, il suit, avec les symboles définis par (3) et (4), que

$$\overline{\mu^{(k)}} < 2^{k-1}\,(\overline{m^{(k)}} + |\bar{x}|^k).$$

Jusqu'ici, la recherche actuelle ne se distingue pas essentiellement de celle du mémoire précédent. Comme

$$|\bar{x}| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dV(x)\right| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, dV(x) = \overline{m^{(1)}},$$

et comme, en vertu de l'inégalité (2) pour $y(x) = |x|$,

$$[\overline{m^{(1)}}]^k < \overline{m^{(k)}}, \; k > 1,$$

on aura l'inégalité

$$\overline{\mu^{(k)}} < 2^k . \overline{m^{(k)}}, \tag{22}$$

un peu grossière, entre le moment absolu central $\mu^{(k)}$ et le moment absolu $\overline{m^{(k)}}$ de même ordre présentant toutefois un résultat nouveau.

L'inégalité (21) se prêt à des généralisations faciles. Soit

$$X_{(n)} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \tag{23}$$

une grandeur aléatoire définie comme la somme des autres variables aléatoires de la suite (7); à cause de leur indépendance supposée, la valeur probable a_n et le carré de l'écart quadratique moyen $s_n{}^2$ de la variable $X_{(n)}$ seront exprimés par les sommes

$$a_n = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n \tag{24}$$

$$s_n{}^2 = \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \ldots + \sigma_n{}^2. \tag{25}$$

A la base de la relation de récurrence

$$W_i(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_i\,(x - t)\, dW_{i-1}\,(t), \; i = 2, 3, \ldots, n;\; W_1(x) = V_1(x)$$

---

[7]) L. c. for. (12).

pour la fonction de répartition $W_n(x)$ de la variable $X_{(n)}$, résultant du principe des probabilités composées, il est facile d'établir une expression explicite de la même fonction, savoir

$$W_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} V_n\,(x - x_1 - x_2 \dots -$$
$$\dots - x_{n-1})\, dV_{n-1}\,(x_{n-1}) \dots dV_2(x_2)\, dV_1(x_1) \qquad (26)$$

au moyen de laquelle la validité des deux égalités (24) et (25) est évidente.

Comme l'écart de la variable $X_{(n-i)}$, définie à l'aide des $(n-i)$ premières variables de la suite (7) en forme d'une somme analogue à (23), par rapport à sa valeur probable a_{n-i} est donné par la différence

$$X_{(n-i)} - a_{n-i} = \sum_{r=1}^{n-i}(X_r - \overline{x}_r) = [X_{(n-i-1)} - a_{n-i-1}] + [X_{n-i} - \overline{x}_{n-i}],$$

et comme pour $k > 0$

$$|X_{(n-i)} - a_{n-i}|^k \leqq [|X_{(n-i-1)} - a_{n-i-1}| + |X_{n-i} - \overline{x}_{n-i}|]^k,$$

on aura enfin sous la supposition de $k > 1$, par suite de l'inégalité (21),

$$|X_{(n-i)} - a_{n-i}|^k < 2^{k-1}\,[|X_{(n-i-1)} - a_{n-i-1}|^k + |X_{n-i} - \overline{x}_{n-i}|^k],\ i = 0, 1, \dots n-1.$$

C'est par l'application successive de cette relation que l'on arrive à l'inégalité

$$|X_{(n)} - a_n|^k < 2^{k-1}\sum_{i=1}^{n} 2^{(n-i)(k-1)}\,|X_i - \overline{x}_i|^k$$

d'une part et à l'inégalité

$$|X_{(n)} - a_n|^k < 2^{k-1}\sum_{i=1}^{n} 2^{(i-1)(k-1)}\,|X_i - \overline{x}_i|^k,$$

d'autre part, or, en les ajoutant, à l'inégalité

$$|X_{(n)} - a_n|^k < 2^{k-2}\sum_{i=1}^{n}[2^{(i-1)(k-1)} + 2^{(n-i)(k-1)}\,[X_i - \overline{x}_i]^k.$$

Donc l'intégration au sens de Stieltjès avec la fonction déterminante $W_n(x)$ donnée par expression (26) entraîne l'inégalité

$$\overline{\mu}_{(n)}^{(k)} < 2^{k-2}\left\{\sum_{i=1}^{n}[2^{(i-1)(k-1)} + 2^{(n-i)(k-1)}]\,\overline{\mu}_i^{(k)}\right\},\ k > 1, \qquad (27)$$

dans laquelle

$$\overline{\mu}_{(n)}^{(k)} = \int_{-\infty}^{+\infty}|x - a_n|^k\, dW_n(x)$$

désigne le moment absolu central d'ordre k de la grandeur étudiée.

L'inégalité (27), ainsi que l'inégalité

$$\overline{m}_{(n)}{}^{(k)} < 2^{k-2}\left\{\sum_{i=1}^{n}[2^{(i-1)(k-1)} + 2^{(n-i)(k-1)}]\,\overline{m}_i{}^{(k)}\right\} \qquad (27')$$

résultant par la même réflexion, n'a cependant qu'une importance théorique, bien qu'il ne soit pas exclu la possibilité d'en déduire, à l'aide des inégalités analogues aux inégalités du numéro précédent, des nouvelles inégalités entre les moments absolus de la variable $X_{(n)}$ exprimée par la somme (23) d'une côté et les moments de ses variables composantes X_i d'autre côté.

II.

1. Dans son ouvrage déjà cité, Liapounoff a démontré, sous certaines hypothèses un peu restrictives, que la probabilité pour que la somme (23) des variables aléatoires indépendantes X_i remplisse l'inégalité

$$z_1 < \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - \overline{x}_1 - \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n}{\sqrt{2\,(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \sigma_n{}^2)}} < z_2 \qquad (28)$$

tend, lorsque leur nombre n croît indéfiniment, vers la limite exprimée par l'intégrale connu de probabilité

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-t^2}dt, \qquad (29)$$

et cela uniformément pour toutes les valeurs réelles de z_1 et $z_2 > z_1$, toutes les fois qu'on peut désigner un nombre fixe $\delta > 0$ pour lequel

$$\lim_{n=\infty} \frac{(\overline{\mu}_1{}^{(2+\delta)} + \overline{\mu}_2{}^{(2+\delta)} + \ldots + \overline{\mu}_n{}^{(2+\delta)})^2}{(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \ldots\ldots\ldots + \sigma_n{}^2)^{2+\delta}} = 0. \qquad (30)$$

Regardant la somme étudiée comme une nouvelle grandeur aléatoire $X_{(n)}$ définie par (23), avec la valeur probable a_n et le carré de l'écart quadratique moyen $s_n{}^2$ donnés par les sommes (24) et (25), l'inégalité (28) prend la forme plus concise

$$z_1 < \frac{X_{(n)} - a_n}{s_n\sqrt{2}} < z_2.$$

En définissant, par analogie avec la notion de l'écart réduit d'une grandeur aléatoire, laquelle notion fut introduite par M. Lévy,[8]) comme écart normal d'une variable X l'écart de cette grandeur par rapport à sa valeur probable et réduit ensuite par le produit de son écart qua-

[8]) l. c. p. 66, 203 et 213. Cf. aussi G. Castelnuovo, Calcolo delle Probabilità, Milano-Roma 1919.

dratique moyen et de $\sqrt{2}$ (lequel produit est nommé en statistique module de la répartition), et en appelant l'expression exponentielle

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \tag{31}$$

la forme normale de la loi de Laplace-Gauss, par opposition à sa forme réduite d'après M. Lévy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ [8]},$$

le théorème de Liapounoff peut s'expliquer comme suit:

La probabilité pour que les valeurs de l'écart normal d'une variable aléatoire, cette variable étant la somme des autres variables aléatoires indépendantes (qui seront dites variables partielles dans la suite), soient comprises dans l'intervalle (z_1, z_2), s'approche avec le nombre croissant de variables partielles à la probabilité correspondante d'une variable aléatoire continue répartie d'après la forme normale de loi de Laplace-Gauss, savoir à la limite donné par l'intégrale (29), et cela uniformément pour tous les nombres réels $z_1, z_2 > z_1$ contenus dans l'intervalle fini d'ailleurs arbitrairement large, toutes les fois qu'on peut choisir un nombre positif δ pour lequel la condition (30) est remplie.

Telle est la signification propre de la formulation de Liapounoff du second théorème-limite du calcul des probabilités au sens restreint[9]) qui met en évidence un lien intime existant entre la probabilité de l'écart normal

$$Z_n = \frac{X_{(n)} - a_n}{s_n\sqrt{2}} \tag{32}$$

d'une quantité $X_{(n)}$, définie comme la somme de variables aléatoires indépendantes mutuellement, et la forme normale de la loi de Laplace-Gauss; la valeur probable de la grandeur aléatoire Z_n donnée par l'équation (32) est, comme il est aisé de voir, égale à zéro, et son écart quadratique moyen à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, la variable aléatoire répartie d'après la loi (31) ayant les mêmes caractéristiques.

[9]) Dans les traités sur le calcul des probabilités, celui est plus connu sous le nom de théorème de Laplace-Tchebycheff; c'était Tchebycheff qui, prenant pour le point de départ un problème posé par Laplace (Théorie analytique des Probabilités, chapitre IV, Nro. 18, p. 133, Paris 1847), l' a démontré d'une manière indirecte, pour la première fois dans toute sa généralité, mais non en toute rigueur nécessaire, comme une conséquence d'un théorème-limite plus général se rapportant à la fonction de répartition de l'écart normal d'une somme de variables aléatoires indépendantes que j'appelle le second théorème-limite du calcul des probabilités au sens large. Cf. P. L. Tchebycheff: „Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités", Acta Mathematica T. 14, et G. Castelnuovo „Calcolo delle Probabilità", Vol. II., ed. sec. Bologna 1928, § 16.

Le but de la recherche qui va suivre consiste essentiellement dans l'étude de la condition (30) au point de vue des inégalités entre les moments absolus des variables partielles et dans la recherche du rapport existant entre la condition de Liapounoff et des autres conditions suffisantes et parfois nécessaires pour l'application du théorème énoncé sur la limite de probabilité.

Si l'on pose, dans l'inégalité (13), $k = 2 + \delta$, $l = 2$ où $\delta > 0$, on aura

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right\}^{2+\delta} < \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i}^{(2+\delta)}\right\}^2,$$

or, après une modification facile,

$$n^{-\delta} < \frac{\{\overline{\mu_1}^{(2+\delta)} + \overline{\mu_2}^{(2+\delta)} + \ldots + \overline{\mu_n}^{(2+\delta)}\}^2}{\{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots\ldots\ldots + \sigma_n^2\}^{2+\delta}};$$

L désignant le plus grand des moments $\overline{\mu_i}^{(2+\delta)}$

$$\overline{\mu_i}^{(2+\delta)} \leqq L,$$

il viendra que

$$n^{-\delta} < \frac{\{\overline{\mu_1}^{(2+\delta)} + \overline{\mu_2}^{(2+\delta)} + \ldots + \overline{\mu_n}^{(2+\delta)}\}^2}{\{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots\ldots\ldots + \sigma_n^2\}^{2+\delta}} <$$

$$< \frac{L^2}{\left\{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots \sigma_n^2}{n}\right\}^{2+\delta}} n^{-\delta}. \tag{33}$$

Si la suite de grandeurs σ_i^2 remplit la condition complémentaire de Markoff[10]) exigeant que les valeurs de σ_i^2 ne soient pas infiniment petites, c'est-à-dire qu'il soit, pour n'importe quelle valeur de i,

$$\sigma_i^2 > s^2$$

de sorte que la série

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \ldots \tag{34}$$

est divergente, mais limitant ensuite cette divergence par le postulat que, quelque grand que soit n, le rapport

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2}{n} \tag{35}$$

---

[10]) Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\dfrac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$, Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, V série, T. IX. (1898), p. 445. — Zakon bolšich čisel i zposob najměnšich kvadratov, Izvěstija fys.-matěm. obščestva pri Kazanskom universitětom (La loi des grands nombres et la méthode des moindres carrés, Bulletin de la Société phys. mat. de l'Université de Kazan), II série, T. VIII. (1898), p. 177.

soit fini, qu'il soit, par exemple, plus petit qu'un nombre fini S^2, il suit que

$$n^{-\delta} < \frac{\{\overline{\mu}_1^{(2+\delta)} + \overline{\mu}_2^{(2+\delta)} + \ldots + \overline{\mu}_n^{(2+\delta)}\}^2}{\{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots\ldots\ldots + \sigma_n^2\}^{2+\delta}} < M \, . \, n^{-\delta}, \tag{30'}$$

où

$$M = \left(\frac{L}{s^{2+\delta}}\right)^2$$

est un nombre fini; n croissant au delà de toute limite, on ne pourra satisfaire à l'inégalité (30′) d'une autre manière que si l'égalité (30) a lieu.

On voit alors que la condition de Liapounoff sera sûrement remplie, s'il existe, pour chacune de variables partielles, le moment absolu central d'ordre supérieur à deux, et si la suite des carrés d'écarts quadratiques moyens satisfait à la condition de Markoff. Il est manifeste d'ailleurs que la condition de Liapounoff est plus générale que la condition réunie de Tchebycheff-Markoff ne demandant pas, comme la condition même de Tchebycheff[11]), l'existence des moments (des espérances mathématiques) de toutes les puissances entières et positives des variables partielles.

La condition de Markoff peut se remplacer encore par une condition un peu moins restrictive qui exprime en langage mathématique une locution bien employée en physique, savoir que les variables partielles sont de même ordre de grandeur. En caractérisant son contenu, par exemple, par la condition qu'il soit

$$s^2 < \sigma_i^2 < S^2,$$

il est clair que la condition de Markoff, et même, en vertu de ce que précède, la condition de Liapounoff, sera satisfaite.

Comme il est possible d'interpréter aussi la propriété pour ainsi dire physique des variables partielles d'être de même ordre de grandeur par le fait qu'il est pour chacune d'elles

$$|X_i - \overline{x}_i| \leqq d, \tag{36}$$

d étant un nombre positif fixe et indépendant de i, et comme, par conséquent,

$$\overline{\mu}_i^{(2+\delta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \overline{x}_i|^{2+\delta} \, dV_i\,(x) \leqq d^\delta \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x}_i)^2 \, dV_i(x) = d^\delta \, . \, \sigma_i^2$$

de manière que

$$\frac{\{\overline{\mu}_1^{(2+\delta)} + \overline{\mu}_2^{(2+\delta)} + \ldots + \overline{\mu}_n^{(2+\delta)}\}^2}{\{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots\ldots\ldots + \sigma_n^2\}^{2+\delta}} \leqq d^\delta \cdot \frac{1}{\{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2\}^\delta},$$

la condition de Liapounoff se trouve remplie si la série

[11]) l. c. p. 307.

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \ldots + \sigma_i^2 + \ldots \tag{34}$$

est divergente, quelle que soit d'ailleurs cette divergence.

L'inégalité (36) étant vérifiée en cas de la loi des grands nombres, il suit du précédent que la probabilité de l'inégalité (28), adaptée au cas envisagé, tendra, pour $n = \infty$, vers la limite en forme de l'intégrale (29), et cela uniformément pour tout les nombres z de l'intervalle fini, toutes les fois que la série

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_i q_i + \ldots, \tag{34'}$$

correspondante à la série (34) où p_i, q_i sont les probabilités fondamentales au i-ème coup de deux événements simples contraires, sera divergente. La divergence de la série (34) devident ainsi la condition suffisante pour le théorème de Poisson généralisé[12]) comme M. Markoff a aussi montré.[13])

Mais la condition de Liapounoff est encore plus large que le signale la condition de Markoff et le cas discuté de la loi des grands nombres, comme a déjà reconnu M. Liapounoff lui-même. Supposant donc l'existence des moments absolus centraux $\bar{\mu}_i^{(2+\delta)}$ de tel ordre qu'on puisse déterminer un nombre positif $\beta < 1$, dépendant du nombre δ par l'équation

$$\frac{2}{\beta} = 2 + \delta, \tag{37}$$

pour lequel

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^\beta}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2)} = 0, \tag{38}$$

la condition de Liapounoff sera évidemment remplie, car, à cause de la supposition, il doit

$$\bar{\mu}_i^{(2+\delta)} \leqq L$$

et

$$\frac{\{\bar{\mu}_1^{(2+\delta)} + \bar{\mu}_2^{(2+\delta)} + \ldots + \bar{\mu}_n^{(2+\delta)}\}^2}{\{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots\ldots\ldots + \sigma_n^2\}^{2+\delta}} \leqq L^2 \cdot \frac{n^2}{\{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2\}^{2+\delta}} =$$
$$= L^2 \left\{\frac{n^\beta}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2}\right\}^{\frac{2}{\beta}},$$

d'où résulte la proposition suivante: Si pour les variables partielles d'une grandeur aléatoire composée, à côté de l'existence de leurs moments absolus centraux d'ordre $2 + \delta > 2$, la série (34) de carrés des écarts quadratiques moyens croît au delà de toute limite par ordre supérieur à n^β, le nombre positif $\beta < 1$ étant donné par l'équation (37), le théorème de Laplace - Tchebycheff sera applicable.

Il n'est pas inutile de remarquer ici que la condition (38) se ra-

---

[12]) Recherches sur la probabilité des jugements, etc. Paris 1837, chapitre IV, p. 253.

[13]) La loi des grands nombres etc., p. 118—123.

mène, pour $\beta = \frac{3}{2}$, à la condition de Mises[14]) utilisée par lui dans une de ses démonstrations de „la première proposition fondamentale du calcul des probabilités". Les autres conditions de Mises n'étant pas si générales que la première condition figurant dans l'énoncé de la proposition qui venait d'être démontrée, la condition de Liapounoff (30) reste donc, dans certains cas, la plus générale de toutes les conditions d'applicabilité connues du théorème de Laplace — Tchebycheff.

Quant à l'autre côté de la recherche proposée sur la condition de Liapounoff, on doit signaler que c'était M. Liapounoff lui-même qui a su de profiter, avec beaucoup de finesse, de l'existence de l'inégalité (17) pour rendre sa démonstration du second théorème-limite la plus générale et, au point de vue des moyens mathématiques nécessaires pour la démonstration, autant simple que possible.

En y posant

$$k = 2 + \delta,\ l = 2 + \gamma,\ m = 2,\ \delta > \gamma > 0,$$

on aura

$$\{\overline{\mu}_1^{(2+\gamma)} + \overline{\mu}_2^{(2+\gamma)} + \ldots + \overline{\mu}_n^{(2+\gamma)}\}^\delta < \{\overline{\mu}_1^{(2+\delta)} + \overline{\mu}_2^{(2+\delta)} + \ldots + \overline{\mu}_n^{(2+\delta)}\}^\gamma \times$$
$$\times \{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2\}^{\delta-\gamma}$$

et ensuite

$$\left\{\frac{[\overline{\mu}_1^{(2+\gamma)} + \overline{\mu}_2^{(2+\gamma)} + \ldots + \overline{\mu}_n^{(2+\gamma)}]^2}{[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots\ldots\ldots + \sigma_n^2]^{2+\gamma}}\right\}^{\frac{1}{\delta}} <$$
$$< \left\{\frac{[\overline{\mu}_1^{(2+\delta)} + \overline{\mu}_2^{(2+\delta)} + \ldots + \overline{\mu}_n^{(2+\delta)}]^2}{[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots\ldots\ldots + \sigma_n^2]^{2+\delta}}\right\}^{\frac{1}{\delta}};$$

on voit de là que, si la condition (30) est remplie pour un nombre positif δ quelconque, elle se trouve à fortiori remplie pour tout le nombre positif γ étant plus petit que δ.

C'est par là que M. Liapounoff se borne, dans sa démonstration, au cas de $0 < \delta \leqq 1$ lequel est plus général que le cas où $\delta > 1$.

2. On sait bien que Liapounoff a démontré le second théorème-limite encore sous les autres conditions d'applicabilité que celle exprimée plus haut. C'est dans le mémoire „Sur une proposition de la théorie de probabilité"[15]) qu'on trouve la condition suffisante sous la forme

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n \,.\, M_3)^{2/3}}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2)} = 0 \tag{39}$$

dans laquelle M_3 signifie le plus grand des n moments absolus d'ordre trois

$$\overline{m}_1^{(3)},\ \overline{m}_2^{(3)},\ \ldots,\ \overline{m}_n^{(3)}.$$

---

14) l. c. p. 23, condition (b 2).

15) Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, V série, T. XIII (1900).

Dans un de ses rapports présentés à l'Académie des Sciences de Paris,[16]) il indique une condition plus générale, savoir

$$\lim_{n=\infty} \frac{[n \,.\, M_{2+\delta}]^{\frac{2}{2+\delta}}}{[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2]} = 0 \tag{40}$$

dans laquelle, par analogie, $M_{2+\delta}$ signale le plus grand des moments absolus

$$\overline{m}_1^{(2+\delta)}, \overline{m}_2^{(2+\delta)}, \ldots, \overline{m}_n^{(2+\delta)}$$

d'ordre $2 + \delta$ où $0 < \delta \leqq 1$.

La condition (39) étant contenue dans la condition précédente (40), il suffit donc de s'occuper de celle-ci.

Suivant le sens de $M_{2+\delta}$, on obtient

$$\left\{\frac{[\overline{m}_1^{(2+\delta)} + \overline{m}_2^{(2+\delta)} + \ldots + \overline{m}_n^{(2+\delta)}]^2}{[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \sigma_n^2]^{2+\delta}}\right\}^{\frac{1}{2+\delta}} =$$

$$= \frac{[\overline{m}_1^{(2+\delta)} + \overline{m}_2^{(2+\delta)} + \ldots + \overline{m}_n^{(2+\delta)}]^{\frac{2}{2+\delta}}}{[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2]} \leqq \frac{[n \,.\, M_{2+\delta}]^{\frac{2}{2+\delta}}}{[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2]};$$

donc, la condition (40) se trouvant remplie, la condition

$$\lim_{n=\infty} \frac{[\overline{m}_1^{(2+\delta)} + \overline{m}_2^{(2+\delta)} + \ldots + \overline{m}_n^{(2+\delta)}]^2}{[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \sigma_n^2]^{2+\delta}} = 0, \; 0 < \delta \leqq 1 \tag{41}$$

sera satisfaite à plus forte raison.

Comme en vertu de l'inégalité (22)

$$\overline{\mu}_i^{(2+\delta)} < 2^{2+\delta} \,.\, \overline{m}_i^{(2+\delta)},$$

il est évident que la condition (41) entraîne la condition (30) en se bornant au cas de $0 < \delta \leqq 1$, tandis que le contraire, en général, ne doit pas être vrai. La condition (41) n'ayant lieu que pour le nombre $0 < \delta \leqq 1$, donc elle n'est pas si générale que la condition (30) qui se rapporte encore à des valeurs de $\delta > 1$.

3. M. Markoff a réussi de donner une autre démonstration du théorème de Laplace - Tchebycheff dans la formulation de Liapounoff moyennant son théorème célèbre sur la valeur limite des espérances mathématiques qui fait la partie intégrante de la méthode des moments.[17])

En divisant chaque variable partielle X_i en deux parties par un nombre arbitraire N à déterminer plus tard, il a été amené à définir deux systèmes des variables dépendantes correspondantes U_i, Y_i par

[16]) Sur un théorème du Calcul des probabilités, C. R. 1901, p. 127.

[17]) O někotorych slučajach těorěmy o prědělě věrojatnosti (Sur quelques cas du théorème sur la limite de probabilité), Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VI série, T. 2 (1908); Isčislenie věrojatnostěj (Calcul des Probabilités), 4ième édition posthume, Moscou 1924.

les équations suivantes:

$$X_i - \bar{x}_i = U_i + Y_i. \quad i = 1,2,\ldots, n$$
$$U_i \equiv X_i - \bar{x}_i, \text{ si } |X_i - \bar{x}_i| \leqq N$$
$$U_i \equiv 0, \qquad \text{si } |X_i - \bar{x}_i| > N$$

et

$$Y_i \equiv 0, \qquad \text{si } |X_i - \bar{x}_i| \leqq N$$
$$Y_i \equiv X_i - \bar{x}_i, \text{ si } |X_i - \bar{x}_i| > N.$$

De là, il est venu, par un procédé ingénieux, au même résultat que M. Liapounoff.

Sa démonstration repose, comme il est aisé de voir, sur l'application de deux égalités entre les moments absolus centraux de variable X_i d'une part et les espérances mathématiques des variables U_i et Y_i d'autre part. $E(X)$ étant, en général, le signe de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X, les égalités mentionées sont exprimées comme suit

$$E\,[(X_i - \bar{x}_i)^2] = E\,(U_i^2) + E(Y_i^2) \tag{42}$$

$$E\,[|X_i - \bar{x}_i|^{2+\delta}] = E\,[|U_i|^{2+\delta}] + E\,[|Y_i|^{2+\delta}]. \tag{43}$$

En remarquant, eu égard à la dépendance constatée entre les variables U_i et Y_i, que l'espérance mathématique du produit $U_i \,.\, Y_i$, savoir

$$E\,(U_i \,.\, Y_i) = E\,(U_i) \,.\, E\,(Y_i;\, U_i),$$

$E\,(Y_i;\, U_i)$ désignant l'espérance mathématique conditionelle (a posteriori) de la variable Y_i par rapport aux valeurs de la variable U_i, est égale à zéro, l'équation (42) s'ensuit immédiatement. Au contraire, d'après notre avis, l'existence de l'équation (43), laquelle M. Markoff a manqué de démontrer, est douteuse; d'autre part la démonstration elle-même du théorème peut s'en passer, car, par définition des quantités U_i, Y_i, il est facile de voir que

$$E\,[|X_i - \bar{x}_i|^{2+\delta}] = \bar{\mu}_i^{(2+\delta)} \geqq E\,[|U_i|^{2+\delta}] = \bar{m}_{U_i}^{(2+\delta)}$$
$$\bar{\mu}_i^{(2+\delta)} > E\,[|Y_i|^{2+\delta}] = \bar{m}_{Y_i}^{(2+\delta)},$$

ce que suffit pour le but de la démonstration de M. Markoff.

Nochmals Prof. Rosmanith.

Die vom Prof. Rosmanith jahrelang geführte Polemik über die Deckungsmethoden der čechoslovakischen Sozialversicherung ist bereits an jenem Punkte angelangt, der eine Fachzeitschrift eigentlich von der Verpflichtung enthebt, sie fortzusetzen. In sachlicher Hinsicht ist sie offensichtlich wertlos, da auf unsere in der letzten Nummer gebrachten Aus-