Über eine allgemeine Relation zwischen Todesfallversicherung und Rente.

Von Dr. *Alfred Berger.*

Im Folgenden sollen aus einer Darstellung der abgekürzten Todesfallversicherung — Versicherung auf Ab- und Erleben — als temporäre Rente und aus der Umkehrung dieser Relation eine Reihe von Resultaten gewonnen werden, die zwar auch auf anderem Wege abgeleitet werden können, aus den beiden genannten Relationen aber fast ohne Rechnung folgen. Dazu gehören die bekannten Relationen zwischen Todesfallversicherung und Rente für den speziellen Fall, daß die versicherten Beträge bezw. Rentenzahlungen sämtlich unter einander gleich oder gleichmäßig fallend oder steigend angenommen werden. Weiters Resultate über Beziehungen zwischen Kapitalsversicherungen und Renten, die Herr Broggi in seinem Lehrbuch der Versicherungsmathematik S. 229 ff. mitgeteilt hat. Sie erscheinen hier als Spezialfall allgemeinerer Fragestellungen. Endlich eine ganze Reihe von Darstellungen des durchschnittlichen Risikos, die ich in den letzten Jahren bekannt gemacht habe. So viel ich sehe, haben die beiden erwähnten Relationen, abgesehen von einem ganz speziellen Fall, bisher keine Beachtung gefunden. Sie sind aber wegen ihrer Allgemeinheit an sich von Interesse und jedenfalls über den Rahmen des in dieser Arbeit Mitgeteilten zu verwerten.

Wir verwenden die kontinuierliche Methode, die Ableitungen sind jedoch sämmtlich fast wörtlich auf das diskontinuierliche Verfahren zu übertragen, dem wir nur an einer Stelle folgen. Den Betrachtungen zugrunde gelegt wird eine Versicherung auf Ab- und Erleben des Beitrittsalters x und der Versicherungsdauer n. Die laufende Zeitvariable sei t, die vom Zeitpunkt der Zahlung abhängigen versicherten Kapitale seien A_t. Die Prämienzahlung erfolge nach Maßgabe einer Funktion π_t, so daß $\pi_t dt$ die dem Zeitpunkte t entsprechende Prämienzahlung bedeutet. Geschlungene Klammern $\{\}$ bezeichnen die Werte, die für die Kapitals- bezw. Rentenversicherung als Zahlungen in Betracht kommen. Es ist demnach

$$\bar{A}_{x\overline{n}|}\{\bar{A}_t\} \quad \text{bezw.} \quad \bar{a}_{x\overline{n}|}\{r_t\}$$

der Einmalwert einer Versicherung auf Ab- und Erleben auf die Beträge A_t, bezw. der Wert einer temporären Rente auf die Beträge r_t.

Für die Versicherung auf Ab- und Erleben gilt

$$\bar{A}_{x\overline{n}|}\{A_t\} = {}_n\bar{A}_x\{A_t\} + {}_nE_x\,A_n$$

$$= -\frac{1}{l_x}\int_0^n \frac{\mathrm{d}l_{x+t}}{\mathrm{d}t}\,e^{-\delta t}\,A_t\,\mathrm{d}t + \frac{l_{x+n}}{l_x}\,e^{-\delta n}\,A_n. \tag{1}$$

Für den Wert der temporären Rente gilt

$$\bar{a}_{x\overline{n}|}\{r_t\} = \frac{1}{l_x}\int_0^n l_{x+t}\,e^{-\delta t}\,r_t\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Setzt man in letzterer Formel

$$l_{x+t} = -\int_t^n \frac{\mathrm{d}l_{x+\lambda}}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda + l_{x+n}$$

und formt den sich so aus (2) ergebenden Ausdruck mittels der Dirichletschen Integralformel um, so erhält man

$$\bar{a}_{x\overline{n}|}\{r_t\} = -\frac{1}{l_x}\int_0^n e^{-\delta t}\,r_t\left[\int_0^n \frac{\mathrm{d}l_{x+\lambda}}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda - l_{x+n}\right]\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{l_x}\int_0^n \frac{\mathrm{d}l_{x+t}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\int_0^t e^{-\delta\lambda}\,r_\lambda\,\mathrm{d}\lambda + \frac{l_{x+n}}{l_x}\int_0^n e^{-\delta t}\,r_t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{l_x}\int_0^n \frac{\mathrm{d}l_{x+t}}{\mathrm{d}t}\,\bar{a}_{\overline{t}|}\{r_\lambda\}\,\mathrm{d}t + \frac{l_{x+n}}{l_x}\,\bar{a}_{\overline{n}|}\{r_t\},$$

wobei $\bar{a}_{\overline{t}|}\{r_\lambda\}$ den Barwert der kontinuierlich zahlbaren Zeitrente der Dauer t auf die Beträge r_λ bedeutet. Diese Relation kann auch

$$\bar{a}_{x\overline{n}|}\{r_t\} = {}_n\bar{A}_x\,\{e^{\delta t}\,\bar{a}_{\overline{t}|}\{r_\lambda\}\} + {}_nE_x\,e^{\delta n}\,\bar{a}_{\overline{n}|}\{r_t\}$$

oder

$$\bar{a}_{x\overline{n}|}\{r_t\} = \bar{A}_{x\overline{n}|}\{e^{\delta t}\,\bar{a}_{\overline{t}|}\{r_\lambda\}\} \tag{3}$$

geschrieben werden. Dies besagt, daß der Barwert der Rente auf die Beträge r_t gleichkommt dem Werte einer Versicherung auf Ab- und Erleben auf die bis zum Ablebens- bezw. Erlebenstermin aufgezinsten Beträge aller bis dahin fällig gewesenen r_t. Das ist auch ohne jede Rechnung einzusehen. Es entspricht der Festsetzung, daß bei einer temporären Rente die Rentenzahlungen nicht fortlaufend bei Erleben der Termine zu erfolgen haben, sondern jeweils mit Zins und Zinseszins am Todestag bezw. am Erlebenstermin — Ablaufstermin der Rente — nachgezahlt werden sollen.

Andererseits ist im Wege partieller Integration zu erhalten

$$
\begin{aligned}
{}_n\bar{A}_x\{A_t\} &= -\frac{1}{l_x}\int_0^n \frac{\mathrm{d}l_{x+t}}{\mathrm{d}t} e^{-\delta t} A_t \,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{l_{x+t}}{l_x} e^{-\delta t} A_t \Big|_0^n + \frac{1}{l_x}\int_0^n l_{x+t}\, e^{-\delta t}\left(\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} - \delta A_t\right)\mathrm{d}t \\
&= A_o - \frac{l_{x+n}}{l_x} e^{-\delta n} A_n + \bar{a}_{x\overline{n}|}\left\{\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} - \delta A_t\right\}
\end{aligned}
$$

und daher ist auch

$$
\bar{A}_{x\overline{n}|}\{A_t\} = A_o + \bar{a}_{x\overline{n}|}\left\{\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} - \delta A_t\right\}. \tag{4}
$$

Auch diese Relation ist ohne Rechnung einzusehen. Nach ihr ist der Barwert der Versicherung auf Ab- und Erleben auf die Beträge A_t gleich dem Anfangesbetrag A_o unter Abzug des Wertes aller künftig von den bereitgestellten Beträgen A_t abreifenden Zinsen und unter Berücksichtigung des Wertes der Anderung der Beträge A_t mit t.

Die Relation (4) ist die Umkehrung von Relation (3). Denn setzt man in (3)

$$
r_t = \frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} - \delta A_t
$$

und beachtet

$$
\int_0^t e^{-\delta\lambda} r_\lambda \,\mathrm{d}\lambda = \bar{a}_{\overline{t}|}\{r_\lambda\} = \int_0^t e^{-\delta\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}A_\lambda}{\mathrm{d}\lambda} - \delta A_\lambda\right)\mathrm{d}\lambda = e^{-\delta t} A_t - A_o
$$

so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{x\overline{n}|}\left\{\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} - \delta A_t\right\} &= \bar{A}_{x\overline{n}|}\{e^{\delta t}(e^{-\delta t} A_t - A_o)\} \\
&= \bar{A}_{x\overline{n}|}\{A_t\} - \bar{A}_o\, \bar{A}_{x\overline{n}|}\{e^{\delta t}\} \\
&= \bar{A}_{x\overline{n}|}\{A_t\} - A_o
\end{aligned}
$$

demnach Relation (4).

Für $A_t = 1$ bezw. $A_t = t$ erhält man aus (4) sogleich die bekannten Relationen

$$
\bar{A}_{x\overline{n}|} = 1 - \delta\bar{a}_{x\overline{n}|}
$$

bezw. $$\bar{A}_{x\overline{n}|}\{t\} = \bar{a}_{x\overline{n}|} - \delta\bar{a}_{x\overline{n}|}\{t\},$$

wobei $\overline{A}_{x\overline{n}|}\{t\}$ und $\overline{a}_{x\overline{n}|}\{t\}$ die abgekürzte Todesfallversicherung und die temporäre Rente auf steigende Beträge bedeuten. Dieselben Beziehungen folgen natürlich auch aus (3).

Auf grund von (4) läßt sich auch leicht die Frage entscheiden, welche Bedingungen die A_t erfüllen müssen, damit zwischen der Todesfallversicherung und Rente, wenn beide auf dieselben Beträge lauten sollen, eine lineare Relation besteht. Es müßte dann gelten

$$\overline{A}_{x\overline{n}|}\{A_t\} = A_o + \overline{a}_{x\overline{n}|}\left\{\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} - \delta A_t\right\} = \alpha + \beta\, \overline{a}_{x\overline{n}|}\{A_t\},$$

wo α und β zwei Konstante bedeuten. Hieraus aber folgt

$$A_o - \alpha + \overline{a}_{x\overline{n}|}\left\{\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} - \delta A_t - \beta A_t\right\} = 0$$

für jeden Wert von x und n und daher

$$\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} = (\delta + \beta)\, A_t$$

oder

$$A_t = Ce^{(\delta+\beta)}.$$

Die A_t müssen daher durch die Exponentialfunktion definiert sein in Übereinstimmung mit einem eingangs erwähnten Resultat von Broggi. Aus (4) entnimmt man auch sofort die Antwort auf die Frage, welche Bedingungen die A_t erfüllen müssen, wenn die Barwerte der Versicherung auf Ab- und Erleben unabhängig von x und n sein sollen. Die Bedingung hiefür wäre

$$\overline{A}_{x\overline{n}|}\{A_t\} = A_o + \overline{a}_{x\overline{n}|}\left\{\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} - \delta A_t\right\} = C$$

woraus man

$$A_o = C, \qquad \frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} = \delta A_t$$

$$A_t = Ce^{\delta t}$$

entnimmt. Die Beträge sind demnach aus $A_o = C$ durch Aufzinsung zu erhalten.

So viel ich sehe, ist die Relation (3) und (4) bisher nur in einem besonders einfachen Fall bei der Definition der Lebenserwartung beachtet worden. Im Falle der lebenslänglichen Leibrente folgt nämlich aus (3)

$$\overline{a}_x = \overline{A}_x\,\{e^{\delta t}\, \overline{a}_{\overline{t}|}\}$$

und für den speziellen Fall $\delta = 0$

$$\int_0^\infty \frac{l_{x+t}}{l_x}\,\mathrm{d}t = e_x{}^0 = -\int_0^\infty \frac{1}{l_x}\frac{\mathrm{d}l_{x+t}}{\mathrm{d}t}\,.\,t\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t_t\,p_x\,.\,\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t,$$

wonach die vollständige Lebenserwartung einmal als Mittelwert der von den Lebenden und das andere mal als Mittelwert der von den Toten durchlebten Zeit definiert erscheint.

Zu weiteren Folgerungen aus (3) und (4) gelangen wir unter Heranziehung des Äquivalenzprinzipes, nach welchem

$$\bar{A}_{x\overline{n}|}\{A_t\} = \bar{a}_{x\overline{n}|}\{\pi_t\}$$

und daher auf grund von (3)

$$\bar{A}_{x\overline{n}|}\{A_t\} = \bar{A}_{x\overline{n}|}\{e^{\delta t}\bar{a}_{\overline{t}|}\{\pi_\lambda\}\}$$

oder

$$\bar{A}_{x\overline{n}|}\{A_t - e^{\delta t}\bar{a}_{\overline{t}|}\{\pi_\lambda\}\} = 0 \tag{5}$$

gilt. Die letzte Relation ist ausführlich geschrieben

$$-\frac{1}{l_\lambda}\int_0^n \frac{dl_{x+t}}{dt} e^{-\delta t}(A_t - e^{\delta t}\bar{a}_{\overline{t}|}\{\pi_\lambda\})\,dt + \frac{l_{x+n}}{l_x} e^{-\delta n}(A_n - e^{\delta n}\bar{a}_{\overline{n}|}\{\pi_\lambda\}) = 0.$$

Unter der Annahme, daß die Gleichung

$$A_t - e^{\delta t}\bar{a}_{\overline{t}|}\{\pi_\lambda\} = 0 \tag{6}$$

nur für einen Wert $t = k$ erfüllt ist und für $t \lesssim k$ bezw.,

$$A_t \gtrless e^{\delta t}\bar{a}_{\overline{t}|}\{\pi_\lambda\}$$

gilt, erhält man aus (5)

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{l_x}\int_0^k \frac{dl_{x+t}}{dt} e^{-\delta t}(A_t - e^{\delta t}\bar{a}_{\overline{t}|}\{\pi_\lambda\})\,dt \\ &= \frac{1}{l_x}\int_k^n \frac{dl_{x+t}}{dt} e^{-\delta t}(A_t - e^{\delta t}\bar{a}_{\overline{t}|}\{\pi_\lambda\})\,dt - \frac{l_{x+n}}{l_x} e^{-\delta n}(A_n - e^{\delta n}\bar{a}_{\overline{n}|}\{\pi_\lambda\}) \end{aligned} \tag{7}$$

als Ausdruck für das dem Äquivalenzprinzip entsprechende Prinzip des gerechten Spieles im Sinne der Risikotheorie, wobei D das durchschnittliche Risiko bezeichnet.

Weiter erhält man auf grund von (3) die Nettoprämienreserve

$${}_mV_x = \bar{A}_{x+m,\,\overline{n-m}|}\{A_{m+t}\} - \bar{a}_{x+m,\,\overline{n-m}|}\{\pi_{m+t}\}$$

in der Gestalt

$${}_mV_x = \bar{A}_{x+m,\,\overline{n-m}|}\{A_{m+t} - e^{\delta t}\bar{a}_{\overline{t}|}\{\pi_{m+\lambda}\}\}. \tag{8}$$

Für den speziellen Fall $A_t = 1$, $\pi_t = \pi$ der gewöhnlichen Versicherung aus Ab- und Erleben mit gleichbleibender Prämie folgt aus (8)

$$\begin{aligned} {}_mV_x &= \bar{A}_{x+m,\,\overline{n-m}|}\{1 - \pi\,.\,e^{\delta t}\int_0^t e^{-\delta\lambda}\,d\lambda\} \\ &= \bar{A}_{x+m,\,\overline{n-m}|}\left\{1 - \frac{\pi}{\delta}(e^{\delta t} - 1)\right\} \\ &= \bar{A}_{x+m,\,\overline{n-m}|} - \pi\,\bar{a}_{x+m,\,\overline{n-m}|}. \end{aligned}$$

Ganz analog erhält man aus Relation (4)

$$ {}_mV_x = A_m + \bar{a}_{x+m,\,\overline{n-m|}} \left\{ \frac{\mathrm{d}A_{m+t}}{\mathrm{d}t} - \delta A_{m+t} - \pi_{m+t} \right\}. \tag{9} $$

Für den Beginn der Versicherung $m = 0$ folgt aus (9)

$$ A_o + \bar{a}_{x\overline{n|}} \left\{ \frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} - \delta A_t - \pi_t \right\} = 0 \tag{10} $$

als zu (5) entsprechende Relation, demnach wiederum als Ausdruck für das Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung.

Um nun zu den verschiedenen Ausdrücken für das durchschnittliche Risiko zu gelangen, zerlegt man die Versicherungsdauer n in die beiden Abschnitte k und $n - k$ und erhält aus (5)

$$ {}_kA_x \left\{ A_t - e^{\delta t} \bar{a}_{\overline{t|}} \{\pi_\lambda\} \right\} + {}_k\bar{E}_x \bar{A}_{x+k,\,\overline{n-k|}} \left\{ A_{k+t} - e^{\delta t} \bar{a}_{\overline{t|}} \{\pi_{k+\lambda}\} \right\} - $$
$$ - {}_kE_x e^{\delta k} \bar{a}_{\overline{k|}} \{\pi_\lambda\} = 0 \tag{11} $$

wobei

$$ \bar{A}_{x+k,\,\overline{n-k|}} \left\{ e^{\delta t} \left[e^{\delta k} \bar{a}_{\overline{k|}} \{\pi_\lambda\} + \bar{a}_{\overline{t|}} \{\pi_{k+\lambda}\} \right] \right\} = $$
$$ = A_{x+k,\,\overline{n-k|}} \left\{ e^{\delta t} \bar{a}_{\overline{t|}} \{\pi_{k+\lambda}\} \right\} + e^{\delta k} \bar{a}_{\overline{k|}} \{\pi_\lambda\} $$

berücksichtigt ist. Subtrahiert man von (11) die Relation (8) für $m = k$ nach Multiplikation mit ${}_kE_x$, demnach

$$ {}_kE_x \cdot {}_kV_x = {}_kE_x \bar{A}_{x+k,\,\overline{n-k|}} \left\{ A_{k+t} - e^{\delta t} \bar{a}_{\overline{t|}} \{\pi_{k+\lambda}\} \right\} $$

so erhält man

$$ D = {}_k\bar{A}_x \left\{ \bar{A}_t - e^{\delta t} \bar{a}_{\overline{t|}} \{\pi_\lambda\} \right\} = {}_kE_x \left(\int_0^k \pi_t e^{\delta(k-t)} \, \mathrm{d}t - {}_kV_x \right), \tag{12} $$

demnach die Darstellung des durchschnittlichen Risikos als Erlebenskapital auf die Differenz der zum kritischen Termin aufgezinsten Prämien und der Prämienreserve. Unter Heranziehung der Gleichung für die kritische Dauer

$$ A_k = \int_0^k \pi_t e^{\delta(k-t)} \, \mathrm{d}t \tag{13} $$

ist dann auch

$$ D = {}_kE_x (A_k - {}_kV_x). \tag{14} $$

Weiter folgt aus (9)

$$ A_m - {}_mV_x = \bar{a}_{x+m,\,\overline{n-m|}} \left\{ \delta A_{m+t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_{m+t} + \pi_{m+t} \right\} $$

und daher aus (14)

$$ D = {}_kE_x \cdot \bar{a}_{x+k,\,\overline{n-k|}} \left\{ \delta A_{k+t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_{k+t} + \pi_{k+t} \right\} \tag{15} $$

mithin die Darstellung des durchschnittlichen Risikos als zum kritischen Termin aufgeschobene Rente.

Aus (15) und (10) folgt durch Subtraktion

$$D = A_o - \overline{a}_{x\overline{k|}} \left\{ \delta A_t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_t + \pi_t \right\} \tag{16}$$

demnach das durchschnittliche Risiko dargestellt als temporäre Rente und endlich folgt aus

$$\overline{a}_{\overline{k|}} \left\{ \delta A_t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_t + \pi_t \right\} = \int\limits_0^k e^{-\delta t} \left(\delta A_t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_t + \pi_t \right) \mathrm{d}t$$

$$= A_o - e^{-\delta k} A_k + \int\limits_0^k e^{-\delta t} \pi_t \, \mathrm{d}t$$

und mit Rücksicht auf (13)

$$\overline{a}_{\overline{k|}} \left\{ \delta A_t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_t + \pi_t \right\} = A_o \tag{17}$$

und daher aus (16) und (17)

$$D = (\overline{a}_{\overline{k|}} - \overline{a}_{x\overline{k|}}) \left\{ \delta A_t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_t + \pi_t \right\}, \tag{18}$$

sonach die Darstellung des durchschnittlichen Risikos als Nachrente.

Wenn wir beachten, daß

$$\pi_t = R\pi_t + S\pi_t$$

wobei $S\pi_t$ die Sparprämie und $R\pi_t$ die Risikoprämie

$$R\pi_t = \mu_{x+t} (A_t - {}_tV_x)$$

bedeutet, so folgt aus (3)

$$\overline{a}_{x\overline{n|}} \{R\pi_t\} = \overline{A}_{x\overline{n|}} \{e^{\delta t} \, \overline{a}_{\overline{t|}} \{R\pi_\lambda\}\}$$

oder

$$\int\limits_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} e^{-\delta t} \mu_{x+t} (A_t - {}_tV_x) \, \mathrm{d}t = \overline{A}_{x\overline{n|}} \left\{ \int\limits_0^t \pi_\lambda \, e^{\delta(t-\lambda)} \, \mathrm{d}\lambda - {}_tV_x \right\} \tag{19}$$

wobei von der Relation

$${}_tV_x = \int\limits_0^t e^{\delta(t-\lambda)} \, S\pi_\lambda \, \mathrm{d}\lambda \tag{20}$$

Gebrauch gemacht ist. Der Ausdruck links in (19) ist aber der Barwert der Risikoprämien für die ganze Versicherungsdauer, ein Wert für den Bohlmann die Bezeichnung Wrightscher Versicherungswert in Vorschlag gebracht hat. Er ist somit gleich einer Versicherung auf Ab- und

Erleben auf die Werte der Differenzen der aufgezinsten Prämien und der Reserven.

Ebenso folgt aus (3) unter Rücksicht auf (20)

$$\bar{A}_{x\overline{n}|}\{{}_tV_x\} = \bar{a}_{x\overline{n}|}\{S\pi_t\} \tag{21}$$

und aus (4)

$$\bar{A}_{x\overline{n}|}\{{}_tV_x\} = \bar{a}_{x\overline{n}|}\left\{\frac{\mathrm{d}_t V_x}{\mathrm{d}t} - \delta\, {}_tV_x\right\},\quad {}_0V_x = A_0 = 0. \tag{22}$$

Daher aus den beiden letzten Relationen

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}_t V_x}{\mathrm{d}t} &= \delta \,.\, {}_tV_x + S\pi_t \\ &= \delta \,.\, {}_tV_x + \pi_t - \mu_{x+t}(A_t - {}_tV_x)\end{aligned} \tag{23}$$

demnach die Differentialgleichung der Prämienreserve. Gerade aus den letzten Entwicklungen erhellt die große Allgemeinheit der Relationen (3) und (4) wobei die mühelose Ableitung, sonst nicht eben einfach zu erhaltender Beziehungen zwischen gewissen Versicherungswerten bemerkenswert ist.

Verläßt man die kontinuierliche Methode und betrachtet daher die versicherten Beträge bei der Versicherung auf Ab- und Erleben als am Ende, die Prämien am Anfang der Versicherungsjahre Zahlbar, ebenso die Rentenbeträge, dann lauten die (3) und (4) analogen Relationen

$$a_{x\overline{n}|}\{r_k\} = A_{x\overline{n}|}\{v^{-k}\, a_{\overline{k}|}\{r_l\}\} \tag{3'}$$

und

$$A_{x\overline{n}|}\{A_k\} = A_o + a_{x\overline{n}|}\{\Delta A_k - \mathrm{d}A_k\}. \tag{4'}$$

Die Richtigkeit erweist man wohl am kürzesten mittels der zwischen den diskontierten Zahlen der Lebenden und Toten bestehenden Relationen.

Auf grund von

$$C_x = vD_x - D_{x+1}$$

st

$$\begin{aligned}A_{x\overline{n}|}\{A_k\} &= \sum_1^n A_k \frac{C_{x+k-1}}{D_x} + A_n \frac{D_{x+n}}{D_x} \\ &= \sum_1^n A_k \,.\, v \,.\, \frac{D_{x+k-1}}{D_x} - \sum_1^n A_k \frac{D_{x+k}}{D_x} + A_n \frac{D_{x+n}}{D_x}\end{aligned}$$

$$= -(1-v)\sum_1^n A_k \frac{D_{x+k-1}}{D_x} + \sum_1^n A_k \frac{D_{x+k-1} - D_{x+k}}{D_x} + A_n \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$= -\mathrm{d}a_{x\overline{n}|}\{A_k\} + A_o + \sum_1^n \frac{D_{x+k-1}}{D_x}(A_k - A_{k-1})$$

$$= A_o + a_{x\overline{n}|}\{\Delta A_k - \mathrm{d}A_k\}$$

in vollständiger Analogie zu (4). Die Größe A_0 ist hiebei nur scheinbar enthalten, da sie sich aus der Gleichung forthebt.

Andererseits gilt für jedes n die Relation

$$D_x = C_x r + C_{x+1} r^2 + \ldots C_{x+n-1} r^n + D_{x+n} r^n, \qquad r = \frac{1}{v},$$

wie man sofort durch Einsetzen der den C_x entsprechenden Ausdrücke in den D_x verifiziert. Demnach gilt

$$a_{x\overline{n}|} \{r_k\} = \sum_1^n \frac{D_{x+k-1}}{D_x} r_k$$

$$= \frac{1}{D_x} \Big[r_1 (C_x r + C_{x+1} r^2 + \ldots C_{x+n-1} r^n + D_{x+n} r^n)$$
$$+ r_2 (C_{x+1} r + \ldots C_{x+n-1} r^{n-1} + D_{x+n} r^{n-1})$$
$$+ \ldots\ldots$$
$$+ r_n (C_{x+n-1} r + D_{x+n} r) \Big]$$

$$= A_{x\overline{n}|} \{r_1 r^k + r_2 r^{k-1} + \ldots r_n \,.\, r\}$$
$$= A_{x\overline{n}|} \{v^{-k} a_{\overline{k}|} \{r_l\}\}.$$

Die vorstehenden Betrachtungen könnten noch in mannigfacher Richtung weiter verfolgt werden, namentlich unter Einführung der für die Gewinntheorie in Betracht kommenden Momente. Jedenfalls geht aus ihnen hervor, daß der selbstverständliche Inhalt von Relation (3) — Relation (4) ist eine Folge von Relation (3) und umgekehrt — genügt, um eine ganze Reihe von versicherungsmathematischen Beziehungen in Evidenz zu setzen. Dieser Inhalt reduziert sich vom mathematischen Standpunkte aus auf die Dirichletsche Integral- bezw. Summenformel, vom versicherungstechnischen Standpunkte aus auf die Gleichwertigkeit gleicher, zu verschiedenen Terminen fälliger Zahlungen unter Berücksichtigung der entsprechenden Zinsen.

Literatur.

A. Berger, Prinzipien Bd. II. S. 10 ff. — A. Berger, Zur Theorie des durchschnittlichen Risikos. Blätter f. Vers. Math. Heft 3. S. 17. — A. Berger, Über den Hattendorffschen Risikosatz. Assek. Jahrb. Bd. 50. S. 18. — A. Berger, Studien zur Versicherungsmath. Assek. Jahrb. Bd. 52. III. — H. Broggi, Versicherungsmathematik S. 229 ff.