Otomar Pankraz
Zum Problem der Massenfabrikation

Aktuárské vědy, Vol. 5 (1935), No. 1, 34–47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144621

determined than the mean on 13 days, worse determined on 9 days and equally well determined on 2 days. Roughly speaking this means that mean and median are on the whole about equally well determined."

On observera d'ailleurs que notre étude concerne le cas de 3 observations et qu'il s'agit ici de la médiane et de la moyenne empirique calculées 24 fois pour 500 observations.

Zum Problem der Massenfabrikation.

Otomar Pankraz.

In jeder entwickelten Wirtschaft wirken verschiedene wirtschaftliche „Kräfte", die sich teilweise in ihren Wirkungen gegenseitig stören, sodaß manchmal als Resultat eine wirtschaftliche Erscheinung eintritt, die weder erwartet noch beabsichtigt war. Um diese unbeabsichtigte und gewöhnlich schädliche Wirkungen zu vermeiden oder zu milden, strebt jede Wirtschaft zur Planwirtschaft.

Ich will mich nicht mit der Frage der Definitionen des Wirtschaftsplanes befassen. Für unsere Zwecke genügt, wenn wir einige Punkte hervorheben, die in der Regel bei jedem Wirtschaftsplan erfüllt sind:

1. Man verlangt, daß es möglich ist entweder alle oder wenigstens einen größeren Teil der wirtschaftlichen Zahlen als Funktionen der zeitlichen Parameter auszudrücken.

2. In jedem Augenblicke resp. in jedem Zeitintervalle von gegebener Länge soll ein Gleichgewicht zwischen dem Güterverbrauch und der Güterproduktion stattfinden. Dabei muß man eine besondere Rücksicht auf das Bilden der Vorräte (Lager) nehmen.

3. Durch Einflüsse, die bewußt oder unbewußt bei dem Feststellen der Bedingungen des Gleichgewichtes [siehe Punkt 2] vernachlässigt wurden, können Abweichungen vom Gleichgewichtszustande entstehen.

4. Es wird die Bedeutung des menschlichen Willens betont und man läßt zu, daß dieser Wille bewußt und zweckmäßig die wirtschaftliche Tätigkeit als ein Ganzes lenken und so (wenigstens teilweise) die Entstehung der Kontraste und Unstimmigkeiten in dieser Tätigkeit vermeiden kann. Es bleibt dabei die Frage offen, inwieweit überhaupt dieses Eingreifen des menschlichen Willens möglich ist.

5. Infolge der Punkte sub 2. und 4. stehen bei der Herstellung eines wirtschaftlichen Planes die deduktiven Methoden im Vordergrund. Das bedeutet aber keine Abweichung oder sogar einen Gegensatz zu den induktiven Methoden, schon deswegen nicht, weil die Bestimmung der Hilfsgrößen, die das Gleichgewicht sub 2. erfordert, sich an empirischen Daten stützen muß.

Im folgenden will ich nur solche wirtschaftliche Erscheinungen ins Auge fassen, welche sich kvantitativ ausdrücken lassen; speziell will ich mich mit dem Problem der Massenfabrikation eines bestimmten wirtschaftlichen Gutes beschäftigen. Genauer gesagt, will ich mich nur um die Güterseite der Wirtschaft (speziell um die Konsumgüter) interessieren, von welcher ich voraussetze, daß sie isoliert ist, d. h. daß sie in keinem Zusammenhange mit der Geldseite der Wirtschaft steht. Das wird freilich zur Folge haben, daß ich das Preisproblem der Massenfabrikation vollständig beiseite lassen werde.

Die Frage, um deren Lösung es sich handelt, formuliere ich wie folgt: Es sei eine bestimmte Gattung von Gütern gegeben, deren Verbrauch (Konsum) wir kennen. Man soll die Zeitverteilung der Produktion bestimmen, d. h. die Anzahl der Gütereinheiten, welche man in bestimmter Zeit erzeugen muß, damit die Bedingung des Gleichgewichtes erfüllt ist. Diese Bedingung bei isolierter Güterseite der Wirtschaft lautet: In jedem Augenblicke resp. in jedem Zeitintervalle von gegebener Länge soll die Gleichheit gelten:

$$\text{Verbrauchsvolumen} = \text{Produktionsvolumen}.$$

Anders gesagt, es ist kvantitativ der Zeitverlauf der Produktion zu beschreiben (Dynamik der Produktion).

Diese Beschreibung führen wir mittels mathematischer Methoden durch, und zwar sowohl mittels der stetigen als auch der unstetigen Methode. Ich verweise darauf, was übrigens selbstverständlich ist, daß alle betrachteten Größen den Charakter der bloßen „mittleren Werten“ haben, wodurch alle Hypothesen über die beliebige Teilbarkeit des Gutes wegfallen.

I. *Anwendung der stetigen Methode.*

Die stetige Methode geht (vom analytischen Standpunkt beobachtet) aus der Voraussetzung heraus, daß man den Zeitverlauf einer Erscheinung mittels stetiger differenzierbarer Funktionen beschreiben kann. In unseren Erwägungen genügt speziell vorauszusetzen, daß die Funktionen bis zur zweiten Ordnung differenzierbar sind.

§ 1. — Zu der mathematischen Beschreibung der Güterseite der Wirtschaft brauchen wir vor allem folgende drei Funktionen: die Konsumintensität (Verbrauchsintensität), die Anzahl der Konsumenten und die Anzahl der für gegebenen Markt erzeugten Gütereinheiten.

Definition 1. Die Verbrauchsintensität α ist die mittlere Anzahl der in gegebener Zeiteinheit von einem Individuum aus gegebener Gesamtheit konsumierten Gütereinheiten (einer ganz bestimmten Gattung von Gütern).

Voraussetzung: Die Verbrauchsintensität hängt von dem stetig veränderlichen Beobachtungsaugenblicke t ab, sodaß $\alpha = \alpha(t)$ ist.

Definition 2. Wir bezeichnen

$\lambda(t)$ die Anzahl der im Augenblicke t auf dem Konsum beteiligten Individuen und

$l(t)$ die Anzahl der Gütereinheiten bestimmter Gattung, die von einem fest gewählten Anfang (gewöhnlich vom Anfange der Produktion und des Konsums) bis zum Beobachtungsaugenblicke t erzeugt worden sind.

Aus der Definition 2 folgt: Für jedes t ist

$$\lambda(t) \geqq 0, \; l(t) \geqq 0.$$

Außerdem ist $l(t)$ eine nicht abnehmende Funktion, so daß auch $l'(t) \geqq 0$ ist. Zum Anfangspunkt a des Definitionsintervalles $[a, b]$ $(a \leqq t \leqq b)$ dieser Funktionen wählen wir den Anfang der Produktion und setzen voraus, daß er sich allgemein mit dem Anfange des Konsums deckt; der Endpunkt b soll das Ende des Konsums vorstellen. Wenn wir zum Definitionsintervall $a \leqq t < +\infty$ wählen, dann bedeutet diese Wahl, daß wir keine Voraussetzung von dem Ende des Konsums machen. Die Funktionen $\alpha(t)$ und $\lambda(t)$ sind aus statistischen Daten abgeleitet und haben gewöhnlich einen anderen als von uns aufgestellten Definitionsintervall. Durch einfache Transformation der Veränderlichen t kann man aber erreichen, daß alle betrachteten Funktionen auf demselben Intervall definiert sind.

§ 2. — Damit wir (im Grenzen unserer Voraussetzungen) am einfachsten zu den Verhältnissen der wirklichen Güterseite der Wirtschaft Annäherung finden, müssen wir zuerst folgende Erwägung machen.

Wenn der Produzent im Augenblicke τ A Gütereinheiten einer bestimmten Gattung erzeugt und die Konsumenten in τ aus dieser Produktion B Einheiten $(A > B)$ verbrauchen, dann gibt die Differenz $A - B = C$ an, um wieviel Gütereinheiten in τ mehr erzeugt wurde, als man verbraucht. Die Zahl C stellt jenen Teil der Produktion vor, der zur Bildung der Vorräte (Lagerbildung) bestimmt ist, und wir können sie kurz als Produktionsreserve (für den Augenblick τ) bezeichnen. Diese Produktionsreserve übt aber einen Einfluß auf den Markt nicht nur im Augenblicke τ aus, sondern der Einfluß der Zahl C offenbart sich auf dem Markte auch in den Augenblicken t, für welche $t > \tau$ und dadurch ist die Stetigkeit des Marktes bedingt. Auf welcher Art die Zahl C den Markt beeinflußt, davon entscheiden sehr verschiedene Faktoren.

Zur analytischen Beschreibung der Produktionsreserve führen wir die Hilfsgröße $k = k(t)$ ein, die wir „den Koeffizient des unmittelbaren Verbrauchs“ nennen.

Definition 3. Der Koeffizient des unmittelbaren Verbrauchs $k(t)$ ist die Zahl, die angibt, welcher Teil der während der Zeitspanne $[t, t + dt]$ erzeugten Güter, in derselben Zeitspanne verbraucht wird.

Ersichtlich muß für jedes t die Bedingung $0 \leqq k(t) \leqq 1$ erfüllt sein.

Aus der Definition 2 folgt, daß die Anzahl der in der Zeitspanne $[t, t + \mathrm{d}t]$ erzeugten Gütereinheiten gleich

$$\mathrm{d}l(t) = l(t + \mathrm{d}t) - l(t)$$

ist. Nach unserer Voraussetzung arbeitet die Produktion für die Deckung des unmittelbaren Konsums und zur Bildung der Produktionsreserve (Lagerbildung). Aus der Produktion $\mathrm{d}l(t)$ wird unmittelbar (nach der Definition 3) $k(t) \, . \, \mathrm{d}l(t)$ verbraucht. Es sei $r(t) \, . \, \mathrm{d}t$ die Anzahl der Gütereinheiten, die für den Lager während $[t, t + \mathrm{d}t]$ erzeugt worden sind. Dann gilt

$$\mathrm{d}l(t) = k(t) \, . \, \mathrm{d}l(t) + r(t) \, . \, \mathrm{d}t.$$

Daraus

$$r(t) \, . \, \mathrm{d}t = [1 - k(t)] \, . \, \mathrm{d}l(t),$$

oder nach Einführung

$$1 - k(t) = q(t) \quad [0 \leqq q(t) \leqq 1]$$

und

$$\mathrm{d}l(t) = l'(t) \, . \, \mathrm{d}t$$

ist

$$r(t) = q(t) \, . \, l'(t). \tag{1}$$

§ 3. — Führen wir noch eine weitere Definition ein. [Cf. die Funktion $L(x, t)$ im III. Teile dieser Arbeit.]

Definition 4. $p(t) \, . \, \mathrm{d}t$ ist die Zahl, die angibt, welcher Teil aus der Produktionsreserve während der Zeitspanne $[t, t + \mathrm{d}t]$ verbraucht wird.

Bezeichnet $s(t) \, . \, \mathrm{d}t$ den Verbrauch in $[t, t + \mathrm{d}t]$, dann ist

$$s(t) \, . \, \mathrm{d}t = \alpha(t) \, . \, \lambda(t) \, . \, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Den Betrag $s(t) \, . \, \mathrm{d}t$ kann man aber in zwei Teile zerlegen, nämlich

$$s(t) \, . \, \mathrm{d}t = s_1(t) \, . \, \mathrm{d}t + s_2(t) \, . \, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

Dabei bedeutet

$s_1(t) \, . \, \mathrm{d}t$ den während $[t, t + \mathrm{d}t]$ aus der Produktion $\mathrm{d}l(t)$ gedeckten Verbrauch und

$s_2(t) \, . \, \mathrm{d}t$ den während $[t, t + \mathrm{d}t]$ aus den Produktionsreserven, die vom Anfang der Produktion bis zum Augenblicke t angehäuft worden sind, gedeckten Verbrauch.

Nun (nach der Definition 3) ist

$$s_1(t) \, \mathrm{d}t = k(t) \, . \, \mathrm{d}l(t). \tag{4}$$

Zur Bestimmung des Teiles $s_2(t) \, . \, \mathrm{d}t$ gelangen wir wie folgt: Wählen wir einen beliebigen Augenblick τ vor dem Beobachtungsaugenblicke t, also $\tau < t$. In der Zeitspanne $[\tau, \tau + \mathrm{d}\tau]$ haben sich die Produktionsreserven um $r(\tau)\,.\,\mathrm{d}\tau$ vergrößert, sodaß die gesamte Produktionsreserve vom Anfang der Produktion $t = 0$ bis zum Beobachtungsaugenblicke t

$$\int_0^t r(\tau)\,.\,\mathrm{d}\tau$$

ist. Weil wir nach der Voraussetzung, die die Definition 4 enthält, keinen Unterschied zwischen den Einheiten machen, die im Lager aufbewahrt sind, werden in $[t, t + \mathrm{d}t]$ aus dem Lager

$$s_2(t)\,.\,\mathrm{d}t = p(t)\,.\,\mathrm{d}t\,.\int_0^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

Gütereinheiten verbraucht.

Setzen wir nach (2), (4), (5) in (3), dann ist

$$\alpha(t)\,.\,\lambda(t)\,.\,\mathrm{d}t = k(t)\,.\,\mathrm{d}l(t) + p(t)\,.\,\mathrm{d}t\,.\int_0^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

oder

$$\alpha(t)\,.\,\lambda(t) = k(t)\,.\,l'(t) + \int_0^t K(t, \tau)\,.\,l'(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{6}$$

wo

$$K(t, \tau) = p(t)\,.\,q(\tau).$$

Die Gleichung (6) gibt die Bedingung für die Planmäßigkeit der Güterproduktion beim Respektieren der Produktionsreserven an. Sie ist im Grunde eine Volterra'sche Integralgleichung für die Produktionsgeschwindigkeit $l'(t)$.

Ist die Produktionsgeschwindigkeit $l'(t)$ bestimmt und kennt man den Anfangszustand der Produktion $l(0)$, dann

$$l(x) = l(0) + \int_0^x l'(t)\,\mathrm{d}t,$$

wo $0 \leqq t \leqq x < +\infty$.

§ 5. — Bemerkungen:

1. Die Integralgleichung für die Produktionsgeschwindigkeit kann man allgemein auf zwei Arten ableiten und zwar entweder a) retrospektiv oder b) prospektiv. Im ersten Falle gehen wir aus der Forderung aus, daß der gegenwärtige Verbrauch teils durch die gegenwärtige Produktion und teils aus den durch vergangene Produktion geschaffenen Reserven gedeckt wird. Diese Methode haben wir benützt. Wir können aber aus der äquivalenten Forderung ausgehen, nach der die wirtschaftliche Tätigkeit nicht nur die gegenwärtigen, sondern auch teilweise die zukünftigen Bedürfnisse decken soll. Es kommen da analoge Verhält-

nisse in Vorschein wie in der Versicherungsmathematik bei der Ableitung der Prämienreserven.

2. Warum haben wir die Gleichung für die Geschwindigkeit $l'(t)$ und nicht für die Anzahl der Gütereinheiten $l(t)$ abgeleitet? Darauf kann man antworten: Die Wichtigkeit einer wirtschaftlichen Erscheinung offenbart sich nicht nur durch ihr bloßes Vorkommen, sondern es ist sehr häufig daran gelegen, wie schnell sich diese Erscheinung auswirkt. Schon bei den statischen Problemen der Ökonomie war es zweckmäßig die wirtschaftlichen Geschwindigkeiten einzuführen (z. B. J. Fisher, J. A. Schumpeter). Umsomehr wird das Einführen dieses Begriffes bei den dynamischen Problemen der Volkswirtschaft notwendig.

§ 6. — Die Voraussetzung, die die Definition 4 enthält, ist allgemein nicht erfüllt. So hängt z. B. der Konsum der auf dem Lager aufbewahrten Güter von der Dauer der Einlagerung ab, d. h. davon, wie lange die Gütereinheit auf dem Lager war. In diesem Falle ist p eine Funktion nicht nur von t, sondern auch von $t - \tau$, sodaß

$$p = p(t, t - \tau) \qquad (t > \tau)$$

und der Kern der Gleichung (6) hat jetzt die Form

$$K(t, \tau) = p(t, t - \tau) \,.\, q(\tau).$$

§ 7. — In zwei Spezialfällen reduziert sich die Integralgleichung (6) sogleich auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

I. Fall. Es sei $k(t) =$ konst. $(= k)$, sodaß dann auch $q(t) =$ konst. $(= 1 - k)$ ist und (6) in die Differentialgleichung

$$\alpha(t) \,.\, \lambda(t) - (1 - k) \,.\, l(0) \,.\, p(t) = k \,.\, l'(t) + (1 - k) \,.\, p(t) \,.\, l(t) \qquad (6a)$$

übergeht. $l(t)$ ist die unbekannte Funktion, $l(0)$ die Anfangsbedingung.

II. Fall. Es sei $p(t) =$ konst. $(= p)$. Durch Derivation nach t entsteht aus (6)

$$\frac{d}{dt}[\alpha(t) \,.\, \lambda(t)] = \frac{d}{dt}[k(t) \,.\, l'(t)] + p \,.\, q(t) \,.\, l'(t),$$

oder nach Einführung

$$\frac{d}{dt}[\alpha(t) \,.\, \lambda(t)] = \beta(t),$$

wird

$$\beta(t) = k(t) \,.\, l''(t) + [k'(t) + p\, q(t)] \,.\, l'(t). \qquad (6b)$$

Die unbekannte Funktion ist da $l'(t)$; aus (6) folgt die Anfangsbedingung [unter Voraussetzung $k(0) \neq 0$]

$$l'(0) = \frac{\alpha(0) \,.\, \lambda(0)}{k(0)}.$$

§ 8. — Um die Tragweite unserer Erwägungen klar zu machen, wollen wir die Gleichung (6) im konkreten Falle analysieren. Die Funktionen $\alpha(t)$, $\lambda(t)$, $k(t)$, $p(t)$, $q(t)$ sind nach Voraussetzung entweder > 0 oder ≥ 0. Die Funktionen $p(t)$ und $q(t)$ sind allgemein voneinander nicht unabhängig, denn es existiert allgemein eine Relation zwischen dem unmittelbaren und dem aus der Produktionsreserven gedeckten Konsum. Die Lösung der Gleichung genügt dem Problem der Massenfabrikation dann und nur dann, wenn $l'(t) \geq 0$, $l(t) > 0$ [mit möglicher Ausnahme $l(0) = 0$].

Setzen wir voraus, daß die gegebenen Funktionen sämtlich konstant sind, sodaß sich (6) auf die Form

$$A = B \,.\, l'(t) + C\int_0^t l'(\tau)\,.\,\mathrm{d}\tau \qquad (A, B, C = \text{konst.} > 0) \tag{6c}$$

reduziert. Wählen wir $l(0) = 0$, dann nimmt diese Gleichung die Form

$$A = B \,.\, l'(t) + C\, l(t)$$

an. Die Lösung

$$l(t) = \frac{A}{C}\left(1 - e^{-\frac{C}{B}t}\right)$$

genügt den Bedingungen des Problems und hat die Eigenschaft, daß für $t \to +\infty$

$$l(t) \to \frac{A}{C}$$

ist, was annähernd folgende Bedeutung hat: Die unveränderlichen Marktverhältnisse führen zu einer Abnahme der Produktion und zur Deckung des Konsums überwiegend aus den Produktionsreserven.

Dieses Schema kann man auch zur annähernden Beschreibung der planmäßigen landwirtschaftlichen Produktion verwenden. Bei dieser Produktion (wenigstens bei ihrem wesentlichen Teil) kommt folgender Verlauf vor: Die Produktion erstreckt sich über eine bestimmte im voraus gegebene Periode (z. B. ein Jahr). In einem Teile dieser Periode steigt die Produktion sehr rapid (z. B. Ernte), darauf aber nimmt sie ab, sodaß der Verbrauch praktisch nur aus den Reserven gedeckt ist. Diese Reserven erschöpfen sich regelmäßig bis zur Zeit, wo die Periode der neuen Produktion eintritt.

II. *Anwendung der unstetigen Methode.*

Wir wollen nun die Gleichung für die Produktionsgeschwindigkeit mit Hilfe der unstetigen Methode herleiten. Dabei gewinnen wir sowohl die zur numerischen Bearbeitung vorteilhaften Formeln als auch eine anschauliche (und der Natur des Problems besser angepaßte) Ableitung.

§ 1. — Es sei gegeben eine Folge von äquidistanten Augenblicken

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n < \ldots < t_m < \ldots,$$

wobei

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = 1 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Inhaltlich soll t_i einen Augenblick bedeuten, in dem man die Produktion kontrolliert (t_0 = Anfang der Produktion und des Konsums) und Δt_i ist die gewählte Zeiteinheit.

Die Definitionen 1 und 2 (I, § 1) lauten wie folgt:

$\alpha(t_i)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ ist die mittlere Anzahl der Einheiten eines gegebenen Gutes, die ein Individuum aus gegebener Gesamtheit während des Zeitintervalles $[t_{i-1}, t_i]$ konsumiert;

$\lambda(t_i)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ ist die Anzahl der an dem Konsum während $[t_{i-1}, t_i]$ beteiligten Individuen;

$l(t_i)$ für $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ist die Anzahl der Gütereinheiten einer bestimmten Gattung, die vom Anfange der Produktion bis zum Augenblicke t_i erzeugt worden sind [$l(t_0)$ = die Anzahl der Gütereinheiten, die vor Beginn der Produktion zur Disposition waren].

Die Definitionen 3 (I, § 2) und 4 (I, § 3) gehen in folgende über:

$k(t_i)$ [resp. $p(t_i)$] für $i = 1, 2, 3, \ldots$ ist die Zahl, die angibt, welcher Teil aus der Anzahl der während des Zeitintervalles $[t_{i-1}, t_i]$ erzeugten Gütereinheiten (resp. aus der Produktionsreserve) in $[t_{i-1}, t_i]$ konsumiert wird.

Wenn

$$q(t_i) = 1 - k(t_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

dann geht die Gleichung (6) in die Form $[\Delta l(t_i) = l(t_i) - l(t_{i-1})]$

$$\alpha(t_n) \,.\, \lambda(t_n) = k(t_n) \,.\, \Delta l(t_n) + p(t_n) \,.\sum_{i=1}^{n} q(t_i) \,.\, \Delta l(t_i) \tag{7}$$

über.

§ 2. — Im ersten Teile haben wir die Lösung der Gleichung für die planmäßige landwirtschaftliche Produktion angegeben. Ich will nun (was übrigens sehr leicht ist) die Gleichung für die Bedingung dieser Planmäßigkeit durchrechnen. Zu diesem Zwecke muß man voraussetzen, daß die gegebenen Hilfsfunktionen $\alpha(t_i)$, $\lambda(t_i)$, $k(t_i)$, $p(t_i)$ konstant sind, sodaß sich die Gleichung auf die Form

$$\alpha \,.\, \lambda = k \,.\, \Delta l(t_n) + p \cdot q \,.\sum_{i=1}^{n} \Delta l(t_i)$$

reduziert. Führen wir die Konstanten $A, B, C,$ die sämtlich $\geqq 0$, durch die Definitionen

$$\begin{aligned} A &= \alpha\lambda + pq\, l(t_0), \\ B &= k, \\ C &= pq \end{aligned}$$

ein, dann entsteht eine nichthomogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten von der Form

$$A = B\,.\,\Delta l(t_n) + C\,l(t_n). \tag{7a}$$

Die Lösung dieser Gleichung kann man, wie wohl bekannt, sehr leicht finden. Wählen wir die partikuläre Lösung $l_h(t_n)$ der homogenen Gleichung

$$B\,.\,\Delta l_h(t_n) + C\,l_h(t_n) = 0$$

in der Form

$$l_h(t_n) = \beta^{t_n}$$

und suchen wir die Bedingung für die Konstante β. Nachdem $t_{n-1} = t_n - 1$, ist $\Delta\beta^{t_n} = \beta^{t_n}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$, sodaß

$$\beta = \frac{B}{B+C}$$

folgt. Ersichtlich allgemein

$$0 \leqq \beta \leqq 1.$$

(Wenn $A, B, C > 0$, ist $0 < \beta < 1$.)

Daher
$$l_h(t_n) = \left(\frac{B}{B+C}\right)^{t_n}.$$

Die allgemeine Lösung $l(t_n)$ der nichthomogenen Gleichung leiten wir wie folgt ab: Wir schreiben

$$l(t_n) = \beta^{t_n}\,.\,v(t_n),$$

wobei $\beta^{t_n} = l_h(t_n)$ und $v(t_n)$ eine noch zu bestimmende Funktion ist. Weil

$$\Delta l(t_n) = v(t_n)\,.\,\Delta\beta^{t_n} + \beta^{t_n - 1}\,\Delta v(t_n),$$

folgt für $v(t_n)$ die Gleichung

$$\Delta v(t_n) = \frac{A}{B}\,\beta^{1-t_n}, \qquad (B > 0)$$

woraus nach

$$\sum_{n=1}^{m} \Delta v(t_n) = v(t_m) - v(t_0)$$

sogleich
$$v(t_m) = v(t_0) + \frac{A}{B}\sum_{n=1}^{m} \beta^{1-t_n};$$

$v(t_0)$ ist durch die Anfangsbedingung bestimmt.

Also

$$l(t_m) = v(t_0)\,\beta^{t_m} + \frac{A\beta}{B}\sum_{n=1}^{m} \beta^{t_m - t_n}.$$

Aber

$$t_m = t_0 + m \;(m = 0, 1, 2, \ldots),$$

sodaß

$$\sum_{n=1}^{m} \beta^{t_m - t_n} = \beta^0 + \beta^1 + \ldots + \beta^{m-1} = \frac{1-\beta^m}{1-\beta},$$

weiter

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{\beta}{1-\beta} = \frac{A}{C}\;(C > 0).$$

Daher

$$l(t_m) = \frac{A}{C} + \left[v(t_0) - \frac{A}{C}\left(\frac{B+C}{B}\right)^{t_0}\right]\cdot\left(\frac{B}{B+C}\right)^{t_m}.$$

Im Falle, daß $t_m \to +\infty$, folgt

$$l(t_m) \to \frac{A}{C}.$$

Die Anzahl der im $[t_{m-1}, t_m]$ erzeugten Gütereinheiten ist dann

$$\Delta l(t_m) = \left[\frac{A}{B}\left(\frac{B+C}{B}\right)^{t_0} - v(t_0)\,\frac{C}{B}\right]\cdot\left(\frac{B}{B+C}\right)^{t_m}.$$

Wenn $v(t_0) = 0$, dann

$$\Delta l(t_m) = \frac{A}{B}\left(\frac{B}{B+C}\right)^{m}.$$

§ 3. — Anmerkung.

Die Gleichung (7a) kann man auch rekurrent lösen. Wenn nämlich eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung allgemein mit veränderlichen Koeffizienten

$$A(t_n) = B(t_n)\,.\,\Delta l(t_n) + C(t_n)\,.\,l(t_n)$$
$$[\Delta l(t_n) = l(t_n) - l(t_{n-1})]$$

mit der Anfangsbedingung $l(t_0)$ gegeben ist, dann [unter der Bedingung $B(t_n) + C(t_n) \neq 0$] gilt

$$l(t_n) = \frac{A(t_n)}{B(t_n) + C(t_n)} + \frac{B(t_n)}{B(t_n) + C(t_n)}\,l(t_{n-1})$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

[Vgl. 1. A. A. Markoff: Differenzenrechnung, 1896, pag. 155—156. 2. P. M. Marples: Linear difference equations. An elementary treatment. (Journal of the Institute of Actuaries, LXIII (1932), 404—423.)]

III. *Verallgemeinerung.*

Führen wir die Funktion $L(x, \tau)$ für $0 \leqq \tau \leqq x < \infty$ ein, die uns angibt, welcher Teil der Gütermenge aus der während $[\tau, \tau + d\tau]$ angehäuften Produktionsreserve im Augenblicke x konsumiert wird, so stellt

$$\int_0^t L(x, \tau) \,.\, r(\tau)\, d\tau \quad (0 \leqq \tau \leqq t \leqq x) \tag{8}$$

denjenigen Teil der während $[0, t]$ angehäuften Vorräte vor, welcher im Augenblicke x konsumiert wird.

Das Integral (8) schreiben wir

$$\int_0^t K(x, \tau) \,.\, l'(\tau)\, d\tau,$$

wo
$$K(x, \tau) = L(x, \tau) \,.\, [1 - k(\tau)].$$

Die Funktion $K(x, \tau)$ kann man ersichtlich aus den früher eingeführten Funktionen ableiten. Von allen Funktionen wird vorausgesetzt, daß sie den Operationen, die mit ihnen durchgeführt werden, entsprechende analytische Eigenschaften haben.

Konstruiren wir jetzt die Funktion

$$F(x, t; l') = \tfrac{1}{2}\, k(t) \,.\, l'(t) + \int_0^t K(x, \tau) \,.\, l'(\tau)\, d\tau - \alpha(t) \,.\, \lambda(t);$$

diese Funktion hat folgende inhaltliche Deutung: Sei $x = t$; dann gibt

$$F(t, t; l') \,.\, dt$$

die Differenz zwischen dem Konsumvolumen [entsprechend dem Glied $\frac{1}{2}\, k(t) \,.\, l'(t)$ definiert] und dem Produktionsvolumen in $[t, t + dt]$ an.

Betrachten wir jetzt den Punkt x als beliebig aber fest gewählt (z. B. x kann der letzte Augenblick des Konsums sein) und gehen aus dem Integral

$$P = \int_0^x F(x, t; l') \,.\, l'(t)\, dt \tag{9}$$

aus.

Um die Bedingung für das Warenmarktgleichgewicht abzuleiten, setzen wir

$$P = \text{Extremum}, \tag{10}$$

was zu der Bedingung führt, daß die erste Variation des Integrals P gleich Null sein soll, d. h.

$$\delta P = 0,$$

unter der Voraussetzung, daß $l'(t)$ eine veränderliche Funktion ist, während die übrigen Funktionen fest gewählt sind.

Ist ε eine stetig veränderliche Größe und $\eta(t)$ eine beliebige stetige Funktion, dann schreiben wir

$$P(\varepsilon) = \int_0^x F(x, t; l'(t) + \varepsilon\eta(t)) \,.\, [l'(t) + \varepsilon\eta(t)]\, dt.$$

Die Bedingung $\delta P = 0$ ist nun mit der Bedingung

$$\left[\frac{dP(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = P'(0) = 0$$

äquivalent.

Es folgt sogleich für $\varepsilon = 0$:

1.

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\int_0^x k(t)\,[l'(t) + \varepsilon\eta(t)]^2\, dt\right\} = \int_0^x k(t)\, l'(t)\, \eta(t)\, dt.$$

2.

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left\{\int_0^x dt \int_0^t K(x, \tau) \,.\, [l'(\tau) + \varepsilon\eta(\tau)] \,.\, [l'(t) + \varepsilon\eta(t)]\, d\tau\right\} =$$

$$= \int_0^x dt \int_0^t K(x, \tau)\, [l'(\tau)\, \eta(t) + l'(t)\, \eta(\tau)]\, d\tau.$$

3.

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left\{\int_0^x \alpha(t)\, \lambda(t)\, [l'(t) + \varepsilon\eta(t)]\, dt\right\} = \int_0^x \alpha(t)\, \lambda(t)\, \eta(t)\, dt.$$

Der Ausdruck sub 2 läßt sich aber in die Form

$$\int_0^x dt \int_0^t K(x, \tau) \,.\, l'(t)\, \eta(\tau)\, d\tau = \int_0^x \eta(\tau)\, d\tau \int_\tau^x K(x, \tau) \,.\, l'(t)\, dt$$

bringen, oder weil

$$\int_t^x l'(\tau)\, d\tau = l(x) - l(t)$$

ist, folgt (nach Vertausch von t und τ)

$$\int_0^x \eta(t) \,.\, K(x, t) \,.\, [l(x) - l(t)]\, dt.$$

Zusammen also

$$P'(0) = \int_0^x \eta(t) \Big\{ k(t)\, l'(t) + K(x, t)\, [l(x) - l(t)] +$$

$$+ \int_0^t K(x, \tau) \,.\, l'(\tau)\, d\tau - \varkappa(t) \,.\, \lambda(t) \Big\}\, dt.$$

Es muß also nach der Bedingung (10) für jedes t

$$\alpha(t) \,.\, \lambda(t) = k(t) \,.\, l'(t) + K(x, t)\,[l(x) - l(t)] + \int_0^t K(x, \tau) \,.\, l'(\tau)\, d\tau \quad (11)$$

gelten, was die gesuchte Bedingung für das Gleichgewicht der Güterproduktion ist. Für $t = x$ folgt die Gleichung (6).

Die Gleichung (11) kann man auch direkt auf Grund der inhaltlichen Deutung der in Betracht gezogenen Hilfsfunktionen ableiten.

Sie sagt aus, wie das Gleichgewicht in t von dem Zustande in allen vergangenen Angenblicken τ und in einem zukünftigen Angenblicke x beeinflußt ist.

Vom analytischen Standpunkte aus ist es zweckmäßig die Gleichung (11) folgendermaßen umzuformen: Setzen wir

$$-\frac{\partial K(x, \tau)}{\partial \tau} = H(x, \tau),$$

so ist

$$\int_0^t K(x, \tau) \,.\, l'(\tau)\, d\tau = K(x, t)\, l(t) - K(x, 0) \,.\, l(0) + \int_0^t H(x, \tau)\, l(\tau)\, d\tau$$

und nach Einführen von

$$h(x, t) = \alpha(t) \,.\, \lambda(t) + K(x, 0) \,.\, l(0),$$

folgt aus (11) die Gleichung

$$h(x, t) = k(t) \,.\, l'(t) + K(x, t) \,.\, l(x) + \int_0^t H(x, \tau) \,.\, l(\tau)\, d\tau. \quad (11a)$$

Es gibt verschiedene Lösungen dieser Gleichung, je nachdem was für Voraussetzungen wir gewählt haben. Für unsere Zwecke hat folgender Fall eine Bedeutung: Der Punkt x ist fest gewählt, z. B. $x = a$ und auch der Funktionswert $l(a)$ ist gegeben. Dann kann man setzen

$$g(t) = h(a, t) - K(a, t) \,.\, l(a)$$

und aus (11a) folgt die Gleichung

$$g(t) = k(t) \,.\, l'(t) + \int_0^t H(a, \tau) \,.\, l(\tau)\, d\tau, \quad (11b)$$

welche leicht zu lösen ist.

IV. *Schlußbemerkungen.*

§ 1. — Ich bemerke, daß man ganz analog das kompliziertere Problem der simultanen Massenfabrikation von zwei oder mehreren Gütergattungen lösen kann unter der Voraussetzung, daß der Verbrauch jeder Gattung durch den Verbrauch der anderen bedingt ist. Speziell ist der Fall interessant, bei dem zwischen Konsum und Produktion der Gütergattung D die Gütergattungen $D_1, D_2, \ldots, D_n$ einschalten werden, welche zwar nicht direkt für den Konsum bestimmt sind, die man aber notwendig bei der Produktion der Gütergattung D braucht. Analytische Beschreibung dieses Problems erfordert die Lösung eines Systems der simultanen Volterra'schen Integralgleichungen.

§ 2. — Es bleibt noch die Frage offen, was für Bedeutung die angeführten theoretischen Erwägungen für die wirtschaftliche Praxis haben. Dieses wollen wir auf folgender Art erläutern: In jeder Wirtschaft ist die Industrie gezwungen dem Konsum voranzueilen und Produktionsreserven zu bilden und deswegen ist es notwendig verschiedene Voraussetzungen über den künftigen Verbrauch (und zwar manchmal auf lange Zeit voraus) zu machen. Unser Ziel war diese Voraussetzungen klar zu formulieren und eine theoretische Grundlage für sie zu geben.

Le risque moyen d'une assurance générale.

Par *J. Wertheimer* à Paris.

La présente étude a pour but de généraliser les formules employées pour déterminer le risque moyen d'une assurance. Les développements qui vont suivre aboutissent à l'établissement de formules qui permettent, outre l'évaluation du risque moyen dans les cas déjà connus, celles des autres cas qui sortent du cadre des formules déjà existantes.

Nous utilisons pour ce travail la combinaison d'assurance générale élaborée par Monsieur A. Loewy,[1] qui est basée sur un schéma comportant n causes de sortie s'excluant les unes des autres. Nous nous servons dans nos calculs des intégrales de Stieltjes, que Monsieur A. Loewy[2] a introduites le premier dans les mathématiques d'assurances.

Une personne agée de y années s'assure pour une durée de p années moyennant le paiement de la prime continuelle $P_{[y]+t}$, de manière que la compagnie d'assurances ait à lui payer une certaine somme, si une des n causes — mettons la $i^{\text{ème}}$ — survient; à ce moment l'assuré reçoit la somme $U^{(i)}_{[y]+t}$. Si aucune des conditions faisant l'objet du contrat ne s'est réalisée pendant cette période de p années, la compagnie d'assurances paie à l'assuré au moment $y + p$ la somme T. En outre, et dans les deux cas, la compagnie sert à l'assuré une rente de l'intensité $S_{[y]+t}$,

---

[1]) A. Loewy, Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmathematik, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-nat. Klasse, Jahrgang 1917, 6. Abhandlung.

[2]) A. Loewy, Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik, Blätter für Versicherungsmathematik und verwandte Gebiete, vol. 2, p. 3, 1931.