E. Franckx

Sur les fonctions de fréquence de n variables. Relation générale entre les moments et les semi-invariants

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 4, 163–167

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144671

qui les définissent, soit en certain sens uniforme. En d'autres termes, elle demande que les valeurs de chaque variable partielle se concentrent autour de la valeur moyenne respective de sorte qu'on commettra une erreur au plus égal à ε, ε étant un nombre arbitrairement petit, sur chacun des l'intégrales (15) si l'on néglige des valeurs x de la variable pour lesquelles

$$| x - \overline{x}_k | > M,$$

où M ne dépend que de ε.

2. La deuxième condition suffisante (14) du théorème sera sûrement réalisée, si les nombres σ_k font une suite supérieurement bornée avec une limite supérieure uniforme (c'est-à-dire indépendante de l'indice k) et si la somme de leurs carrés

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \ldots + \sigma_n^2 + \ldots$$

diverge, cette divergence étant d'ordre de n. Cela aura lieu lorsque les nombres σ_k^2 sont tous du même ordre de grandeur, à savoir s'ils ont une limite supérieure finie S^2

$$\sigma_k^2 \leqq S^2.$$

Dans ce cas le nombre σ est égal à S et le rapport

$$\frac{s_n^2}{\sigma^2}$$

augmente comme n.

Sur les fonctions de fréquence de *n* variables. Relation générale entre les moments et les semi-invariants.

par *E. Franckx* (Bruxelles).

I. Moments et fonctions caractéristiques.

Dans le cas d'une fonction de fréquence discontinue de n variables

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Le moment d'ordre $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$ est défini par:

$$m_{k_1|k_2|\ldots|k_n} = \sum_{x_1}\sum_{x_2} \ldots \sum_{x_n} f(x_1 x_2 \ldots x_n)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \tag{1}$$

les sommations s'étendant pour chaque variable:

$$\begin{aligned} x_1&: \text{ de } 0 \text{ à } n_1; \\ x_2&: \text{ de } 0 \text{ à } n_2; \\ &\vdots \\ x_n&: \text{ de } 0 \text{ à } n_n. \end{aligned}$$

On obtient systématiquement les moments par le développement des fonctions caractéristiques. En particulier, celle de Cauchy

$$\varphi(u_1 u_2 \dots u_n) = \sum_{x_1}\sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} \varphi(x_1 x_2 \dots x_n)\, e^{u_1x_1+u_2x_2+\dots+u_nx_n} \tag{2}$$

$$= 1 + \sum_{g_1}\sum_{g_2} \dots \sum_{g_n} m_{g_1|g_2|\dots|g_n} \frac{u_1^{g_1}u_2^{g_2}\dots u_n^{g_n}}{g_1!\, g_2! \dots g_n!} \tag{3}$$

montre que l'on a en général:

$$\frac{\partial^{g_1+g_2+\dots+g_n}}{\partial u_1^{g_1}\,\partial u_2^{g_2}\dots\partial u_n^{g_n}}[\varphi(u_1u_2\dots u_n)]_{u_1=u_2=\dots=u_n=0} = m_{g_1|g_2|\dots|g_n}. \tag{4}$$

La fonction de Cauchy, qui est l'espérance mathématique de $e^{u_1x_1+u_2x_2+\dots+u_nx_n}$ donne donc, par dérivation, tous les moments. On les obtient de même, en considérant la fonction caractéristique de M. Paul Lévy:

$$\Phi(u_1u_2\dots u_n) = E\, e^{i(u_1x_1+\dots+u_nx_n)} \text{ avec } i = \sqrt{-1.} \tag{5}$$

II. Introduction d'une variable supplementaire dans la fonction caractéristique.

Au lieu de considérer simultanément les n variables statistiques nous envisageons la fonction intermédiaire d'une seule variable:

$$\psi(t) = E\, e^{at(u_1x_1+\dots+u_nx_n)} \tag{6}$$

fonction qui se réduit à l'unité pour $t = 0$ et nous donne la fonction caractéristique de Cauchy pour $t = 1$, $a = 1$, celle de M. Lévy pour

$$t = 1,\ a = \sqrt{-1.}$$

Développée en série de Mac-Laurin elle donne:

$$\psi(t) = 1 + \sigma_1\frac{at}{1!} + \sigma_2\frac{a^2t^2}{2!} + \dots + \sigma_k\frac{a^kt^k}{k!} + \dots \tag{7}$$

relation dans laquelle:

$$a^k\sigma_k = E\,(u_1x_1 + \dots + u_nx_n)^k =$$

$$= \sum \frac{k!}{g_1!\, g_2! \dots !\, g_n!} u_1^{g_1}u_2^{g_2}\dots u_n^{g_n} \times m_{g_1,|g_2|\dots|g_n} \tag{8}$$

$$\text{avec } g_1 + g_2 + \dots + g_n = k$$

polynome homogène de degré „k", d'où on déduit:

$$\frac{\partial^k(a^k\sigma_k)}{\partial u^{g_1},\, \partial u_2^{g_2}\dots\partial u_n^{g_n}} = m_{g_1,|g_2|\dots|g_n}. \tag{9}$$

L'introduction d'une variable supplémentaire transforme les conditions générales classiques (3) et (4) en trois relations équivalentes (7), (8) et (9).

Le fait que la relation (7) a la forme du développement de la fonction caractéristique dans le cas d'une seule variable statistique, présente un avantage important.

III. Les semi-invariants dans le cas général.

Par analogie avec la méthode de Thiele nous posons:

$$\psi(t) = e^{\mu_1 at + \mu_2 \frac{a^2t^2}{2!} + \ldots + \mu_k \frac{a^kt^k}{k!} + \ldots}. \tag{10}$$

Les relations (7) et (10) étant indentiques, quelque soit at, il faut que les dérivées successives par rapport à at soient identiques. En particulier, en posant $at = 0$ on obtient la relation connue:

$$\sigma_{r+1} = \mu_1\sigma_r + \binom{r}{1}\mu_2\sigma_{r-1} + \binom{r}{2}\mu_3\sigma_{r-2} + \ldots + \mu_{r+1}. \tag{11}$$

Pour que cette relation soit homogène de degré $(r+1)$ en $u_1, u_2, \ldots, u_n$ il faut que μ_k soit aussi homogène en $u_1, \ldots, u_n$ mais de degré (k).

On est amené à poser:

$$a^k\mu_k = \sum \frac{k!}{g_1!\, g_2! \ldots !\, g_n!} n_{g_1|g_2|\ldots|g_n}\, u_1^{g_1}u_2^{g_2} \ldots u_n^{g_n} \tag{12}$$

$n_{g_1|g_2|\ldots|g_n}$, étant le semi-invariant, correspondant à $m_{g_1|g_2|\ldots|g_n}$, que l'on obtient, en remarquant que:

$$\frac{\partial^k (a_k\mu_k)}{\partial u_1^{g_1}\, \partial u_2^{g_2} \ldots \partial u_n^{g_n}} = n_{g_1|g_2|\ldots|g_n} \tag{13}$$

IV. Le calcul des semi-invariants en fonction des moments.

On peut par le calcul symbolique faciliter les opérations. La relation (8) peut s'écrire:

$$a^k\sigma^k = [m_1u_1 + m_2u_2 + \ldots + m_n\mu_n]^k$$

d'où

$$a\sigma = m_1u_1 + m_2u_2 + \ldots + m_nu_n \tag{14}$$

à condition de faire le développement suivant la loi du binôme et de remplacer le produit $m_1^{g_1}m_2^{g_2} \ldots m_n^{g_n}$ par le moment $m_{g_1|g_2|\ldots|g_n}$.

En faisant une convention analogue, on peut écrire de même:

$$a\mu = n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_nu_n. \tag{15}$$

Enfin, la relation (12) s'écrit symboliquement:

$$\sigma^{r+1} = \mu[\mu + \sigma]^r \tag{16}$$

et en tenant compte de (14) et (15)

$$[\Sigma m_i u_i]^{r+1} = \Sigma n_i u_i \, [\Sigma (m_i + n_i) \, u_i]^r. \tag{17}$$

Les deux membres de (17) étant indentiques il faut que les coefficients de $u_1^{g_1} \ldots u_n^{g_n}$ $(g_1 + g_2 + \ldots + g_n = r + 1)$ soient les mêmes. Il s'en suit que:

$$\frac{(r+1)!}{g_1!\,g_2! \ldots g_n!} m_1^{g_1} m_2^{g_2} \ldots m_n^{g_n} = \Sigma n_i (m_1 + n_1)^{g_1} \ldots \times (m_i + n_i)^{(g_i - 1)} \ldots$$

$$\ldots \times (m_n + n_n)^{g_n} \times \frac{r!}{g_1!\, g_2! \ldots ! \, (g_i - 1)! \ldots ! \, g_n!} \tag{18}$$

$$(r + 1) \, m_1^{g_1} m_2^{g_2} \ldots m_n^{g_n} = \Sigma \, g_i \, n_i \, (m_1 + n_1)^{g_1} \ldots (m_i + n_i)^{g_i - 1} \ldots$$

$$\ldots (m_n + g_n)^{g_n}$$

et en particulier:

$$m_i^{r+1} = n_i \, (m_i + n_i)^r. \tag{19}$$

En tenant compte des conventions on repasse aux moments et aux semi-invariants.

V. Application à la corrélation ordinaire.

Dans ce cas particulier, on a $g_1 + g_2 = r + 1$, la relation (18) devient:

$$(r + 1) \, m_1^{g_1} . \, m_2^{g_2} = g_1 \, n_1 \, (m_1 + n_1)^{g_1 - 1} \, (m_2 + n_2)^{g_2} +$$
$$+ g_2 \, n_2 \, (m_1 + n_1)^{g_1} \, (m_2 + n_2)^{g_2 - 1}. \tag{20}$$

En donnant à r les valeurs 0, 1, 2, ... les formules (20) et (19) donneront de proche en proche, la valeur des semi-invariants:

1^er^ cas $r = 0$

pour $g_1 = 1$; $g_2 = 0$ (19) donne $m_1 = n_1$ d'où $m_{1|0} = n_{1|0}$
pour $g_1 = 0$; $g_2 = 1$ (19) donne $m_2 = n_2$ d'où $m_{0|1} = n_{0|1}$.

2^e^ cas $r = 1$

pour $g_1 = 2$; $g_2 = 0$ la relation (19) donne $m_i^2 = m_i n_i + n_i^2$
d'où $m_{2|0} = m_{1|0} n_{1|0} + n_{2|0}$ et $n_{2|0} = m_{2|0} - (m_{1|0})^2$
pour $g_1 = 0$; $g_2 = 2$ on a par analogie $n_{0|2} = m_{0|2} - (m_{0|1})^2$
pour $g_1 = 1$; $g_2 = 1$ la relation (20) donne:

$$2! m_1 m_2 = n_1 \, (m_2 + n_2) + n_2 \, (m_1 + n_1)$$

ou $2 m_{1|1} = 2 n_{1|1} + m_{1|0} \, . \, n_{0|1} + m_{0|1} \, . \, n_{1|0}$
et par suite $n_{1|1} = m_{1|1} - m_{1|0} m_{1|0}$.

3^e^ cas $r = 2$

pour $g_1 = 2$; $g_2 = 0$ (19) donne $m_i^3 = n_i m_i^2 + 2 m_i n_i^2 + n_i^3$
$m_{3|0} = n_{1|0} m_{2|0} + 2 m_{1|0} n_{2|0} + n_{3|0}$
on en déduit: $n_{3|0} = m_{3|0} - 3 m_{2|0} m_{1|0} + 2 \, (m_{1|0})^3$
pour $g_1 = 0$; $g_2 = 3$ on obtient la formule symétrique
pour $g_1 = 2$; $g_2 = 1$ la relation (20) donne:

$$3m_1^2m_2 = 2n_1(m_1+n_1)(m_2+n_2)+n_2(m_1+n_1)^2$$
$$= 3n_1^2n_2 + 2n_1n_2(m_1+m_2)+2n_1^2m_2+$$
$$+ 2n_1m_1m_2+n_2m_1^2$$

en repassant aux moments et semi-invariants

$$3m_{2|1} = 3n_{2|1} + 2n_{1|1}(m_{1|0}+m_{0|1}) + 2n_{2|0}\,.\,m_{0|1} + 2n_{1|0}m_{1|1} + n_{0|1}m_{2|0}$$

et une formule symétrique pour $n_{1|2}$.

Il est ainsi possible d'effectuer le calcul progressif des semi-invariants.

Une remarque aux inégalités.

George Seitz.

Dans les mathématiques d'assurance et dans la statistique, il est parfois très utile d'évaluer quelques fonctions de base, comme par ex. les fonctions biométriques, les valeurs actuarielles, etc. On doit donc trouver des inégalités qui sous certaines conditions répondent à ces fonctions. Pour y arriver, nous utilisons des inégalités qui nous sont bien connues de la théorie de mathémathique et que nous appliquons à ces fonctions. Très souvent, nous pouvons déduire déjà, sous des suppositions, parfois insignifiantes, des relations qui nous permettent de nous faire, au moins partiellement, une idée du développement de la fonction en question. Cependant, on doit remarquer que les résultats ainsi obtenus sont des évaluations assez grossières.

Dans notre étude nous avons l'intention de traiter, parmi le grand nombre des inégalités qui ont trouvé une application dans les mathématiques d'assurance et dans les statistiques, seulement ces de Tchebytchef et Schwarz.

Nous allons déduire une inégalité, qui contient ces de Schwarz et Tchebytchef comme cas spéciaux.

Nous avons donné une matrice en u lignes et n colonnes (a_{ik}):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{u1} & a_{u2} & \dots & a_{un} \end{pmatrix}$$

et en outre nous avons donné 4 séries comprennant n chiffres

$$x_1\, x_2 \dots x_n$$
$$y_1\, y_2 \dots y_n$$
$$z_1\, z_2 \dots z_n$$
$$u_1\, u_2 \dots u_n;$$