Aktuárské vědy

Hans Koeppler

# Die Anwendung der Theorie der Elementarwahrscheinlichkeit zweier Abweichungen auf die Darstellung der Differentialgleichung der Frequenzfunktion zweier Variablen

*Aktuárské vědy*, Vol. 7 (1938), No. 2, 72–85

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144691

In practice, however, the rate of interest does not range to infinity, and not even to 100%, corresponding to $v = \frac{1}{2}$ (used by Mr. Misra „for simplicity").

The example given by Mr. Misra (II, p. 23)

$$200 - 106v - 3v^2 + 297v^3 - 412v^4 = 0$$

is a construction which would hardly occur in real finance. And yet, although in such an invented transaction one must be prepared for the worst, it is clear that the balance will be constantly in $A$'s favour provided only that $297v^3 < 412v^4$, or $i < 38{,}72\%$; and this is sufficient for concluding that there can be at most one rate of interest, worth the name, involved in the transaction. As a matter of fact, there is only one positive root.

But this discussion is really obsolete, since Mr. Lidstone's proof, given in his additional remarks to my Note in the J. I. A., shows that, if the transaction is in equilibrium at rate $i$, and if, at that particular rate, one of the parties is always the creditor of the other party, then no other rate can be a solution. Another proof has in the meantime been given by G. S. Diwan and V. V. Narlikar in their paper „A practical financial transaction"[4]) which seems to have escaped Mr. Misra's atten-tion.

Finally, I cannot follow Mr. Misra's objections (II, p. 24) to my differentiating the infinite power series $f(v) = \Sigma v^n S_n$. It belongs to the elements of analysis that the derived series $\Sigma n v^{n-1} S_n$ has the same circle of convergence as the original series and represents $f'(v)$. What happens, if $v$ is a point on the circle of convergence itself, is another and more delicate question; but then, financial operations do not occur on the circle of convergence.

---

# Die Anwendung der Theorie der Elementarwahrscheinlichkeit zweier Abweichungen auf die Darstellung der Differentialgleichung der Frequenzfunktion zweier Variablen.

Von *Hans Koeppler*, Berlin.

In Anlehnung an Bachelier[1]) stellen wir zunächst folgende Betrachtungen an:

Es sei $f(s, x, y)\, dx\, dy$ die Wahrscheinlichkeit, daß bei $s$ Beobachtungen die Abweichung der einen Art zwischen $x$ und $x + dx$ und die Abweichung der anderern Art zwischen $y$ und $y + dy$ falle.

[4]) Proc. of the Indian Ac. of Sc., Vol. II (1935), No 2, Sec. A, with Addendum in Vol. VI (1937), No 2, Sec. A.

Bricht man die Beobachtungen ab, nachdem man erst $\sigma < s$ Fälle untersucht hat, so möge man aus diesem Beobachtungsmaterial die Wahrscheinlichkeit $f(\sigma, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ finden, daß die Abweichung der einen Art zwischen $\xi$ und $\xi + d\xi$ und die Abweichung der anderen Art zwischen $\eta$ und $\eta + d\eta$ liege. Schließlich sei $f(s - \sigma, x - \xi, y - \eta)\,.\,.\,dx\, dy$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach Ausführung der übrigen $s - \sigma$ Beobachtungen die Abweichung der einen Art zwischen $x - \xi$ und $x - \xi + d(x - \xi)$ und die Abweichung der anderen Art zwischen $y - \eta$ und $y - \eta + d(y - \eta)$ eingeschlossen ist.

Nimmt man zunächst an, daß $\xi$ und $\eta$ konstant, $x$ und $y$ aber variabel sind, so kann man $dx$ für $d(x - \xi)$ und $dy$ für $d(y - \eta)$ setzen.

Durch diese Voraussetzungen kommt man zu dem Ansatz

$$f(s, x, y)\, dx\, dy = f(\sigma, \xi, \eta)\, f(s - \sigma, x - \xi, y - \eta)\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy.$$

Mit der weiteren Annahme, daß die zuvor als konstant angesehenen Variablen $\xi$ und $\eta$, die uns unbekannt sind, alle nur möglichen Werte haben können, gelangen wir zu der für wahre Abweichungen geltenden Integraldarstellung

$$f(s, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, x, y)\, f(s - \sigma, x - \xi, y - \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

auf der alle weiteren Untersuchungen beruhen. Zwecks Anstrebung einer Lösung entwickeln wir $f(s - \sigma, x - \xi, y - \eta)$ in die Taylor'sche, nach Potenzen von $\xi$ und $\eta$ fortschreitende Reihe bis zu Größen zweiter Ordnung und erhalten

$$f(s - \sigma, x - \xi, y - \sigma) = f(s - \sigma, x, y) - \xi \frac{\partial f(s - \sigma, x, y)}{\partial x} -$$
$$- \eta \frac{\partial f(s - \sigma, x, y)}{\partial y} + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 f(s - \sigma, x, y)}{\partial x^2} + \xi\eta \frac{\partial^2 f(s - \sigma, x, y)}{\partial x \partial y} +$$
$$+ \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 f(s - \sigma, x, y)}{\partial y^2}$$

Mit Anwendung der weiteren Voraussetzungen

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{-\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\, \xi\, d\xi\, d\eta &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\, \eta\, d\xi\, d\eta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

kommen wir auf die Gleichung

$$f(s, x, y) - f(s - \sigma, x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(s - \sigma, x, y)}{\partial x^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\, \xi^2\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \frac{\partial^2 f(s - \sigma, x, y)}{\partial x\, \partial y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\, \xi\eta\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(s - \sigma, x, y)}{\partial y^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \partial, \eta)\, \eta^2\, d\partial\, d\eta.$$

Machen wir die weitere Annahme, daß wir auch näherungsweise

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\, \xi^2\, d\xi\, d\eta &= 2a_{11}\sigma \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\, \eta^2\, d\xi\, d\eta &= 2a_{22}\sigma \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\, \xi\eta\, d\xi\, d\eta &= 2a_{12}\sigma \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

setzen können, so ergibt sich nach einfacher Umformung die Näherungsgleichung

$$\frac{f(s, x, y) - f(s - \sigma, x, y)}{\sigma} = a_{11} \frac{\partial^2 f(s - \sigma, x, y)}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 f(s - \sigma, x, y)}{\partial x\, \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 f(s - \sigma, x, y)}{\partial y^2},$$

aus welcher durch Übergang zur Grenze $\sigma = 0$ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f(s, x, y)}{\partial s} = a_{11} \frac{\partial^2 f(s, x, y)}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 f(s, x, y)}{\partial x\, \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 f(s, x, y)}{\partial y^2} \tag{III}$$

hervorgeht, nachdem man noch auf $\dfrac{f(s - \sigma, x, y)}{\sigma}$ die partielle Taylor'sche Entwicklung

$$\frac{f(s - \sigma, x, y)}{\sigma} = \frac{f(s, x, y)}{\sigma} - \frac{\partial f(s, x, y)}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial^2 f(s, x, y)}{\partial s^2} - \ldots$$

angewendet hat.

Wie der Verfasser[2]) mehrfach gezeigt hat, hat die Gleichung (III) die Lösung

$$f(s, x, y) = \frac{1}{4\pi s \sqrt{A}} e^{-\frac{a_{22} x^2 - 2a_{12} xy + a_{11} y^2}{4sA}}. \tag{IV}$$

$$(A = a_{11} a_{22} - a_{12}^2).$$

Diese befriedigt aber auch, wie der Verfasser ebenfalls schon einmal nachgewiesen hat 2 f) die Ausgangsgleichung

$$f(s, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta) f(s - \sigma, x - \xi, y - \eta) \, d\xi \, d\eta;$$

denn man kann die nicht ganz einfache Umformung vornehmen:

$$\frac{a_{22}\xi^2 - 2a_{12}\xi\eta + a_{11}\eta^2}{4A\sigma} + \frac{a_{22}(x-\xi)^2 - 2a_{12}(x-\xi)(y-\eta) + a_{11}(y-\eta)^2}{4A(s-\sigma)} =$$

$$= \frac{a_{22}x^2 - 2a_{12}xy + a_{11}y^2}{4As} + \frac{a_{22}u^2 - 2a_{12}uv + a_{11}v^2}{4As},$$

in der zur Abkürzung

$$\frac{s\xi - \sigma x}{\sqrt{\sigma(s-\sigma)}} = u \quad \text{und} \quad \frac{s\eta - \sigma y}{\sqrt{\sigma(s-\sigma)}} = v$$

gesetzt wurde. Außerdem ist aber auch die Konstante

$$\frac{1}{4\pi\sigma\sqrt{A} \, . \, 4\pi(s-\sigma)\sqrt{A}} = \frac{1}{(4\pi)^2 \sigma(s-\sigma) A}$$

zu berücksichtigen. Durch Anwendung der bekannten die Jacobi'sche Transformationsdeterminante enthaltenden Formel

$$\int\int f(\xi, \eta) \, d\xi, d\eta = \int\int f(u, v) \left( \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) du \, dv$$

verändert sich die soeben angegebene Konstante. Da die Transformationsdeterminante mit den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \xi}{du} = \frac{\sqrt{\sigma(s-\sigma)}}{s}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\sqrt{\sigma(s-\sigma)}}{s}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0$$

den besonderen Wert

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \eta}{du} = \frac{\sigma(s-\sigma)}{s}$$

annimmt, so erhält die Konstante den Wert

$$\frac{1}{(4\pi)^2 \sigma(s-\sigma) A} \frac{\sigma(s-\sigma)}{s^2} = \frac{1}{(4\pi)^2 s^2 A}.$$

Es liegt nun die Gleichung

$$f(s, x, y) = \frac{1}{(4\pi)^2 s^2 A} e^{-\frac{a_{22} x^2 - 2a_{12} xy + a_{11} y^2}{4As}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a_{22}u^2 - 2a_{12}uv + a_{11}v^2}{4As}} du\, dv$$

vor, aus welcher, da die Beziehung gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a_{22}u^2 - 2a_{12}uv + a_{11}v^2}{4As}} du\, dv = 4\pi s \sqrt{A},$$

sich wiederum die Lösung

$$f(s, x, y) = \frac{1}{4\pi s \sqrt{A}} e^{-\frac{a_{22}x^2 - 2a_{12}xy + a_{11}y^2}{4As}} \tag{IV}$$

ergibt.

Diese gibt nun auch das Mittel, die Annahmen (II) nachzuprüfen. Setzt man

$$\frac{a_{22}}{4A\sigma} = \alpha_{11}, \quad \frac{a_{12}}{4A\sigma} = \alpha_{12}, \quad \frac{a_{11}}{4A\sigma} = \alpha_{22}$$

und berücksichtigt, daß

$$D = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{(4A\sigma)^2} = \frac{1}{(4\sigma)^2 A},$$

so findet man vermöge der bekannten Formeln

$$\frac{\sqrt{D}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha_{11}u^2 - 2\alpha_{12}uv + \alpha_{22}v^2)}\, u^2\, du\, dv = \frac{\alpha_{22}}{2D}$$

$$\frac{\sqrt{D}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha_{11}u^2 - 2\alpha_{12}uv + \alpha_{22}v^2)}\, v^2\, du\, dv = \frac{\alpha_{11}}{2D}$$

$$\frac{\sqrt{D}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha_{11}u^2 - 2\alpha_{12}uv + \alpha_{22}v_2)}\, uv\, du\, dv = \frac{\alpha_{12}}{2D}$$

die Werte

$$\frac{1}{4\pi\sigma\sqrt{A}} \cdot 4\sigma\sqrt{A} \cdot \frac{a_{11}}{4A\sigma} \cdot 8\sigma^2 A = 2\sigma a_{11},$$

$$\frac{1}{4\pi\sigma\sqrt{A}} \cdot 4\sigma\sqrt{A} \cdot \frac{a_{22}}{4A\sigma} \cdot 8\sigma^2 A = 2\sigma a_{22},$$

$$\frac{1}{4\pi\sigma\sqrt{A}} \cdot 4\sigma\sqrt{A} \cdot \frac{a_{12}}{4A\sigma} \cdot 8\sigma^2 A = 2\sigma a_{12}.$$

Bei Einführung der in der Korrelationstheorie gebräuchlichen Bezeichnungen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s,\, x,\, y) = x^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 2sa_{11} = \frac{S(x^2)}{s} = \sigma_x^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s,\, x,\, y)\, y^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 2sa_{22} = \frac{S(y^2)}{s} = \sigma_y^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s,\, x,\, y)\, xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 2sa_{12} = \frac{S(xy)}{s}\, [= \sigma_{(xy)}]$$

und des sogenannten Korrelationsfaktors

$$r = \frac{S_{(xy)}}{\sqrt{S(x^2)\, S(y^2)}} = \frac{S_{(xy)}}{s\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_{(xy)}}{\sigma_x\, \sigma_y},$$

sowie der aus diesem folgenden Beziehung

$$S(xy) = sr\, \sigma_x\, \sigma_y \tag{V}$$

nimmt die Lösung (IV), da $A = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2\, \sigma_{(xy)}^2}{4s^2}$, die Form an

$$f(s,\, x,\, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_x^2\, \sigma_y^2 - \sigma_{(xy)}^2}}\, e^{-\frac{\sigma_y^2 x^2 - 2\sigma_{(xy)}\, xy + \sigma_x^2 y^2}{2(\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)}},$$

die sich mittels der Beziehung (V) noch weiter umformen läßt in

$$f(s,\, x,\, y) = \frac{1}{2\pi\, \sigma_x\, \sigma_y \sqrt{1 - r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\alpha_x^2} - 2r\frac{xy}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]}. \tag{VI}$$

Führt man weiterhin die Bezeichnungen ein:

$$\sigma_{x,y}^2 = \sigma_x^2(1 - r^2) \quad \text{und} \quad \sigma_{y,x}^2 = \sigma_y^2(1 - r^2),$$

so entsteht die zweite Form für die Frequenzfunktion

$$f(s,\, x,\, y) = \frac{\sqrt{1 - r^2}}{2\pi\, \sigma_{x,y} \,.\, \sigma_{y,x}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\partial_{x,y}^2} - 2\frac{r}{\sigma_{x,y}\,.\,\sigma_{y,x}}\, xy + \frac{y^2}{\sigma_{y,x}^2}\right)}. \tag{VII}$$

Aus den Formeln für $\sigma_{x,y}^2$ und $\sigma_{y,x}^2$ lassen sich auch noch die Formeln

$$\frac{\sigma_{x,y} \,.\, \sigma_{y,x}}{\sqrt{1 - r^2}} = \sigma_x \,.\, \sigma_{y,x} = \sigma_y \,.\, \sigma_{x,y}$$

ableiten. Auf der Beziehung

$$\frac{S_{(x+y)}^2 - S_{(x-y)}^2}{4} = S_{(xy)}$$

beruht ferner die Formel

$$r = \frac{S_{(x+y)^2} - S_{(x-y)^2}}{4\sqrt{S_{(x^2)}\,S_{(y^2)}}} = \frac{\sigma_{(x+y)^2} - \sigma_{(x-y)^2}}{4\sigma_x\,\sigma_y}.$$

Ähnlich findet man die Formeln

$$r = \frac{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - \sigma_{(x-y)^2}}{2\sigma_x\,\sigma_y} = \frac{\sigma_{(x+y)^2} - \sigma_x{}^2 - \sigma_y{}^2}{2\sigma_x\,\sigma_y}\;{}^{3})$$

Führt man die neuen Variablen $x' = \frac{x}{\sigma_x}$ und $y' = \frac{y}{\sigma_y}$ ein, so ergibt sich $\sigma^2(x') = \frac{\sigma_x{}^2}{\sigma_x{}^2} = 1$ und $\sigma^2(y') = \frac{\sigma_y{}^2}{\sigma_y{}^2} = 1$.

Leicht lassen sich darauf die Beziehungen

$$\sigma_{(x'+y')^2} = \frac{\sigma_x{}^2}{\sigma_x{}^2} + 2\,\frac{\sigma_{(xy)}}{\sigma_x\,\sigma_y} + \frac{\sigma_y{}^2}{\sigma_y{}^2} = 2\,(1 + r)$$

$$\sigma_{(x'-y')^2} = \frac{\sigma_x{}^2}{\sigma_x{}^2} - 2\,\frac{\sigma_{(xy)}}{\sigma_x\,\sigma_y} + \frac{\sigma_y{}^2}{\sigma_y{}^2} = 2\,(1 - r)$$

berechnen, nach welchen einerseits

$$r = -1 + \tfrac{1}{2}\sigma_{(x'+y')^2}$$

und andererseits

$$r = 1 - \tfrac{1}{2}\sigma^2{}_{(x'-y')}.{}^{3})$$

Unsere Darstellungen lassen erkennen, daß wir, obwohl wir bisher mit den wahren unbekannten Abweichungen gerechnet haben, der äußeren Form nach die in der Korrelationtheorie üblichen Formeln aufgefunden haben. Zumeist setzt man in der Korrelationstheorie für die wahren Abweichungen einfach die wahrscheinlichen Abweichungen. Seit einiger Zeit verwendet man in Analogie zur Methode der kleinsten Quadrate bisweilen das $\frac{s}{s-1} =$ Fache der mittleren Quadrate und der mittleren Produkte der wahrscheinlichen Abweichungen als Näherungswerte der mittleren Quadrate und der mittleren Produkte der wahren Abweichungen.[4]) Da wir in diesem Aufsatz die wahren Abweichungen mit $x$ und $y$ bezeichnet haben, wollen wir die wahrscheinlichen Abweichungen durch $u$ und $v$ ausdrücken. Wie in einem früheren Aufsatz des Verfassers[5]) soll zur Bestimmung der wahrscheinlichen Werte von $a_{11}, a_{22}, a_{12}$ die erweiterte Helmert'sche Hypothese angewendet werden. Im Hinblick auf die andere Form der Konstanten, welche dieses Mal das Gesetz der wahren Abweichungen hat, haben wir aber noch besondere Untersuchungen anzustellen. Zufolge des soeben erwähnten Aufsatzes (pag. 43 und pag. 44) gelten, wenn das Gesetz der wahren Fehler

$$P_{(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{D}}{\pi}\,e^{-(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$(D = b_{11}b_{22} - b_{12}{}^2)$$

lautet, die Formeln:

$$b_{11} = \frac{(s-1)\,S_{(v^2)}}{2\,[S_{(u^2)}\,S_{(v^2)} - (S_{(uv)})^2]}$$

$$b_{22} = \frac{(s-1)\,S_{(u^2)}}{2\,[S_{(u^2)}\,S_{(v^2)} - (S_{(uv)})^2]}$$

$$b_{12} = -\frac{(s-1)\,S_{(uv)}}{2\,[S_{(u^2)}\,S_{(v^2)} - (S_{(uv)})^2]}$$

die übrigens auch Coolidge[6]) anführt. In diesen haben wir für den vorliegenden Fall

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{4sA}, \qquad b_{22} = \frac{a_{11}}{4sA}, \qquad b_{12} = -\frac{a_{12}}{4sA}$$

zu setzen. Zunächst berechnen wir

$$D = \frac{A}{(4sA)^2} = \frac{1}{(4s)^2\,A} = \frac{(s-1)^2\,[S_{(u^2)}\,S_{(v^2)} - (S_{(uv)})^2]}{4\,[S_{(u^2)}\,S_{(v^2)} - (S_{(uv)})^2]^2},$$

wonach

$$A = \frac{S_{(u^2)}\,S_{(v^2)} - (S_{(uv)})^2}{4s^2\,(s-1)^2}.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt aber

$$a_{22} = 4sAb_{11} = 4s\,\frac{S_{(u^2)}\,S_{(v^2)} - (S_{(uv)})^2}{4s^2\,(s-1)^2}\;\frac{(s-1)\,S_{(v^2)}}{2\,[S_{(u^2)}\,S_{(v^2)} - (S_{(uv)})^2]} = \frac{S_{(v^2)}}{2s\,(s-1)}$$

$$a_{11} = 4sAb_{22} = 4s\,\frac{S_{(u^2)}\,S_{(v^2)} - (S_{(uv)})^2}{4s^2\,(s-1)^2}\;\frac{(s-1)\,S_{(u^2)}}{2\,[S_{(u^2)}\,S_{(v^2)} - (S_{(uv)})^2]} = \frac{S_{(u^2)}}{2s\,(s-1)}$$

$$a_{12} = -4sAb_{12} = 4s\,\frac{S_{(u^2)}\,S_{(v^2)} - (S_{(uv)})^2}{4s^2\,(s-1)^2}\;\frac{(s-1)\,S_{(uv)}}{2\,[S_{(u^2)}\,S_{(v^2)} - (S_{(uv)})^2]} = \frac{S_{(uv)}}{2s\,(s-1)}.$$

Da nun nach unserer Annahme

$$\frac{S_{(x^2)}}{s} = 2sa_{11}, \qquad \frac{S_{(y^2)}}{s} = 2sa_{22}, \qquad \frac{S_{(xy)}}{s} = 2sa_{12}$$

gesetzt wurde, so erhält man in der Tat die üblichen Beziehungen

$$\frac{S_{(x^2)}}{s} = \frac{S_{(u^2)}}{s-1}, \qquad \frac{S_{(y^2)}}{s} = \frac{S_{(v^2)}}{s-1}, \qquad \frac{S_{(xy)}}{s} = \frac{S_{(uv)}}{s-1}.$$

Mit diesen findet man aber die seit einigen Jahren zuweilen in der

Korrelationstheorie angewendeten, schon vorhin angedeuteten Formeln

$$\sigma_x^2 = \frac{S_{(u^2)}}{s-1}, \quad \sigma_y^2 = \frac{S_{(v^2)}}{s-1}, \quad \sigma_{(xy)} = \frac{S_{(uv)}}{s-1},$$

die auf den Korrelationsfaktor ohne Einfluß sind, da auch gemäß der üblichen Rechnungsweise

$$r = \frac{S_{(uv)}}{\sqrt{S_{(u^2)}\, S_{(v^2)}}}.$$

Nach diesen Untersuchungen, welche für die praktische Anwendung der Mittelwerte der Quadrat- und Produktsummen wesentlich sind, wollen wir uns wieder einer rein theoretischen Untersuchung widmen. In mathematischen und physikalischen Lehrbüchern bemerkt man bisweilen die Transformation der einfachen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial s} = a_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{A}$$

$$\left(\text{Lösung:} \quad f = \frac{1}{4\pi s \sqrt{a_{11}\, a_{22}}}\, e^{-\frac{a_{22}x^2 + a_{11}y^2}{4 s a_{11} a_{22}}}\right)$$

— allerdings nicht mittels des Radiusvektors $\varrho = \sqrt{a_{22}x^2 + a_{11}y^2}$ — in die in der Wärmetheorie eine Rolle spielende partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial s} = a_{11} \cdot a_{22} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varrho}\right), \tag{B}$$

bei der naturgemäß die Konstante dort eine andere Form hat.

Diese Tatsache veranlaßte den Verfasser zu der Untersuchung, ob man nicht die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial s} = a_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

ohne sie vorher auf eine der einfachen Form (A) entsprechende gebracht zu haben, unmittelbar in eine der Form (B) entsprechende umformen könnte. Wie diese Aufgabe durch Anwendung des Radiusvektors

$$\varrho = \sqrt{a_{22}x^2 - 2a_{12}xy + a_{11}y^2}$$

gelöst werden kann, hat der Verfasser in einem seiner Aufsätze 2 d) (pag. 124 und pag. 125) gezeigt. Später kam er auf den Gedanken, die Ausgangsgleichung

$$f(s, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\, f(s-\sigma, x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta$$

selbst schon nach Einführung des Radiusvektors $\varrho$ zu vereinfachen.

Hierzu $f(s, x, y) = f(s, \varrho)$ setzend, wobei $\varrho$ eine Funktion von $x$ und $y$ ist, nehme man die etwas verwickelte, mit den zweiten Differentialquotienten abgebrochene Taylor'sche Entwicklung

$$f(s-\sigma, x-\xi, y-\eta) = f(s-\sigma, x, y) - \xi \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x} - \eta \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{2}\xi^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}\right] + \frac{1}{2}\eta^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2}\right] +$$

$$+ \xi\eta\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x\,\partial y}\right] - \cdots$$

vor und setze diese abgebrochene Reihe in die Ausgangsformel ein. Es ergibt sich dann zunächst

$$f(s, x, y) = f(s-\sigma, x, y)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\,\xi\, d\xi\, d\eta - \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\,\eta\, d\xi,\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\,\xi^2\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\,\eta^2\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varrho}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x\,\partial y}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi, \eta)\,\xi\,\eta\, d\xi\, d\eta.$$

Bedient man sich darauf des schon eingangs beschriebenen Rechnungsvorganges, so erhält man schließlich

$$\frac{\partial f(s, x, y)}{\partial s} = \frac{\partial f(s, \varrho)}{\partial s} = \left[a_{11}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} +$$

$$+ \left[a_{11}\frac{\partial \varrho^2}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2}\right]\frac{\partial f}{\partial \varrho}.$$

Durch Einführung des bereits erwähnten Ausdrucks für den Radiusvektor

$$\varrho = \sqrt{a_{22}x^2 - 2a_{12}xy + a_{11}y^2}$$

findet man nach einigen Berechnungen

$$a_{11}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{\partial\varrho}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}\right)^2 =$$

$$= \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{\varrho^2}(a_{22}x^2 - 2a_{12}xy + a_{11}y^2) = A.$$

$$a_{11}\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2\varrho}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\varrho^3}(a_{22}x^2 - 2a_{12}xy + a_{11}y^2) = \frac{A}{\varrho},$$

sodaß man zu der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial s} = A\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial\varrho}\right)$$

kommt. Um eine Lösung zu finden, wählen wir die Integralfunktion

$$f = C\int_0^\infty e^{-As\omega^2} f_1(\omega)\, f_2(\varrho\omega)\, d\omega$$

und bilden die Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -CA\int_0^\infty e^{-As\omega^2}\omega^2 f_1(\omega)\, f_2(\varrho\omega)\, d\omega$$

$$\frac{\partial f}{\partial\varrho} = C\int_0^\infty e^{-As\omega^2} f_1(\omega)\,\omega\, f'_2(\varrho\omega)\, d\omega$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\varrho^2} = C\int_0^\infty e^{-As\omega^2} f_1(\omega)\,\omega^2 f''_2(\varrho\omega)\, d\omega.$$

Soll nun die angenommene Funktion die vorgelegte Differentialgleichung befriedigen, so muß auch die Gleichung

$$-CA\int_0^\infty e^{-As\omega^2}\omega^2 f_1(\omega)\, f_2(\varrho\omega)\, d\omega = AC\int_0^\infty e^{-As\omega^2}\Big[f_1(\omega)\,\omega^2 f''_2(\varrho\omega) +$$

$$+ \frac{1}{\varrho} f_1(\omega)\,\omega\, f'_2(\varrho\omega)\Big]\, d\omega$$

bestehen, nach welcher stets die Gleichung

$$f''_2(\varrho\omega) + \frac{1}{\varrho\omega} f'_2(\varrho\omega) + f_2(\varrho\omega) = 0$$

zu erfüllen ist. Diese Gleichung ist aber eine einfache Bessel'sche Differentialgleichung, welche durch die Lösung

$$f_2(\omega) = I_0(\varrho\omega)$$

befriedigt wird. Da sich ferner zeigen läßt, daß die Beziehung

$$I''_0(\varrho\omega)\,\omega^3 + \frac{1}{\varrho}\,I'_0(\varrho\omega)\,\omega^2 = -\,I_0(\varrho\omega)\,\omega^2$$

besteht, so setzen wir $f_1(\omega) = \omega$ und erhalten damit die Lösung

$$f = C\int_0^\infty e^{-As\omega^2}\,\omega\,I_0(\varrho\omega)\,d\omega.$$

Das hier vorkommende Integral hat aber den Wert

$$\frac{1}{2As}\,e^{-\frac{\varrho^2}{4As}}$$

sodaß wir andrerseits die Lösung

$$f_{(s,\varrho)} = \frac{C}{2As}\,e^{-\frac{\varrho^2}{4As}}$$

erhalten. Setzen wir für $\varrho$ den angegebenen Wert und bestimmen die Konstante $C$ unter Zugrundelegung der Bedingung

$$\frac{C}{2As}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a_{22}x^2-2a_{12}xy+a_{11}y^2}{4As}}\,dx\,dy = 1,$$

so erhalten wir, da das Doppelintegral den Wert $4\sqrt{As\pi}$ hat, aus der Gleichung

$$\frac{C}{2As}\,4\sqrt{As\pi} = 1$$

für $C$ den Wert

$$C = \frac{\sqrt{A}}{2\pi},$$

wonach also die Lösung

$$f_{(s,\varrho)} = \frac{1}{4\pi s\sqrt{A}}\,e^{-\frac{\varrho^2}{4As}}$$

heißt. Diese gehört zu den selteneren. Ohne Herleitung bemerkte sie der Verfasser nur in einer einzigen, wenig bekannten Abhandlung.[7]) Es ist wohl angebracht, diese partielle Differentialgleichung und ihre Lösung auch einmal im Rahmen der Korrelationstheorie zu erwähnen, weil sie nur bei Vorhandensein von Korrelation gilt. Würde keine Korrelation bestehen, so würde, da der Korrelationsfaktor alsdann 0 oder nahezu 0 wäre, $a_{12} = 0$ sein; denn es ist auch $r = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}\cdot a_{22}}}$. Daher würde auch die einfachere partielle Differentialgleichung (A) vorliegen, und es würde dementsprechend $\varrho^2 = a_{22}x^2 + a_{11}y^2$ sein. Besteht aber

Korrelation, dann sind die Abweichnungen $x$ und $y$ eben durch die Gleichung des Radiusvektors

$$\varrho^2 = a_{22}x^2 - 2a_{12}xy + a_{11}y^2$$

mit einander verbunden. Bezeichnet man mit $\varrho(x, y)$ den Radiusvektor der Abweichungen $x$ und $y$ und summiert darauf, so erhält man

$$\begin{aligned} S(\varrho^2_{x,y}) &= a_{22}\, S_{(x^2)} - 2a_{12}\, S_{(xy)} + a_{11}(S_{(y^2)} \\ &= \frac{S_{(x^2)}\, S_{(y^2)}}{2s^2} - 2\,\frac{(S_{(xy)})^2}{2s^2} + \frac{S_{(x^2)}\, S_{(y^2)}}{2s^2} \\ &= \frac{1}{s^2}\,[S_{(x^2)}\, S_{(y^2)} - (S_{(xy)})^2], \end{aligned}$$

und daraus die Beziehung

$$S(\varrho^2_{x,y}) = \sigma_x^2\, \sigma_y^2\, (1 - r^2).$$

Ist $r = 0$, so geht dieselbe über in die einfachere Beziehung

$$S'(\varrho^2_{x,y}) = \sigma_x^2\, \sigma_y^2,$$

die aus dem einfacheren Radiusvektor

$$\varrho^2 = a_{22}x^2 + a_{11}y^2$$

unmittelbar hergeleitet werden kann.

Im Laufe unserer Betrachtungen sind wir ohne besonderen Hinweis wieder zu den wahren Abweichungen zurückgekehrt, doch erkennt man sofort, daß unsere Untersuchungen auch bei Anwendung der wahrscheinlichen Abweichungen im Sinne der Korrelationstheorie gelten.

## Erwähnte Literatur.

1. a) Calcul des probabilités, Paris 1912.

b) E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, Erster Band, Leipzig und Berlin 1914.

2. a) Het Verzekerings-Archief. 's-Gravenhage 1926. Die Elementarwahrscheinlichkeit für zwei Arten von Abweichungen.

b) Atti del Congresso internazionale dei Matematici, Bologna 1928, Tomo VI. Die Differentialgleichungen des normalen Verteilungsgesetzes der betrachteten Eigenschaften bei einer hinreichend großen Anzahl von Vertretern einer Gattung.

c) Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, Roma 1933. Equazioni alle derivate parziali della teoria delle probabilità che intervengono anche nella teoria del calore.

d) Giornale di Matematica Finanziaria, Serie II, Volume IV, N. 3. 1934. Das zweiändrige Wahrscheinlichkeitsgesetz bei Beständen von Versicherungen mit zwei verschiedenen Auflösungsmöglichkeiten.

e) Aktuárské vědy, ročník IV, číslo 3, Prag 1933—34. Das zweiändrige Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen der Prämienreserve eines Bestandes von Versicherungen mit verschiedenen Auflösungsmöglichkeiten.

f) Festschrift zum siebzigsten Geburstag Prof. Dr. G. Rosmaniths. Prag 1935. Die Anwendung der Theorie der Elementarwahrscheinlichkeit zweier Abweichungen auf Dauerspiele.

3. Rietz-Baur, Handbuch der mathematischen Statistik. Leipzig und Berlin 1930, VIII. Einfache Korrelation.

4. a) Felix Bernstein, Variations- und Erblichkeitsstatistik. Berlin 1929.

b) Oskar Anderson, Die Korrelationsrechnung in der Konjunkturforschung, Bonn 1929.

5. Metron, Vol. XII.-Nr. 4. Roma 1936. Das Wahrscheinlichkeitsgesetz zweier wahrer einander zugeordneten Fehler und einige mit diesem zusammenhängende Betrachtungen.

6. J. L. Coolidge, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig-Berlin 1927.

7. Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturw. Classe Bd. CII, Abth. II. a. E. Kobald in Leoben, Über einige particuläre Lösungen der Differentialgleichung für die Wärmeleitung in einem Kreiszylinder und deren Anwendung.

Im Übrigen verweist der Verfasser auch auf den Literaturnachweis in seinen früheren, in der Zeitschrift *Metron* erschienenen Aufsätzen, dem er noch.

R. W. M. Gibbs, The Adjustment of Errors in practical Science, London 1929 hinzufügen möchte.

---

# La distribution des inondations.

par *E. J. Gumbel*, Université de Lyon.

Dans un article précédent (8), nous avons développé la théorie de la plus grande valeur. Puis, nous l'avons appliquée au problème de l'âge limite (9) et aux distances entre les émissions radioactives (10). Mais cette théorie générale permet maintes autres applications pratiques, puisque la distribution finale a la même forme pour toutes les distributions initiales du type exponential. Dans ce qui suit nous allons étudier le problème des inondations.

Plusieurs auteurs, notamment Hazen (12), Gibrat (4) et Grassberger (5) ont montré dans leurs travaux systématiques que l'on peut traiter le débit d'un grand fleuve en première approximation comme une variable statistique soumise à une distribution de Galton, que l'on obtient à partir de la distribution de Gauss par une transformation logarithmique. Mais ce problème n'est pas encore tout à fait résolu. Car, même pour les grands fleuves, dont les débits montrent une certaine régularité, il existe au moins deux raisons distinctes des fluctuations des débits: au printemps la fusion de la neige et en automne la pluie. Il en résulte au moins deux valeurs dominantes des débits, ce qui complique