Nikolaj Podtjagin

Sur le calul par groupes des réserves mathématiques dans l'assurance invalidité

Aktuárské vědy, Vol. 8 (1948), No. 1, 7–21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144710

SUR LE CALCUL PAR GROUPES DES RÉSERVES MATHÉMATIQUES DANS L'ASSURANCE INVALIDITÉ

DR N. PODTIAGUINE
Bratislava

Dans mon travail „Quelques remarques sur la méthode de Lidston dans l'assurance sur la vie"[1]) j'ai donné un procédé nouveau pour la détermination de l'âge auxiliaire dans l'évaluation de la valeur actuelle totale d'un groupe d'annuités viagéres continues et discontinues.

Je vais montrer dans ce qui suit que ce procédé peut être utilisé également avec succès dans l'assurance invalidité. Nous nous servirons pour cela des idées indiquées par M. E. Dasen dans son travail intéressant „Extension des méthodes de Lidston, Altenburger et Fouret au calcul par groupes des réserves mathématiques dans l'assurance vie, invalidité et survivants."[2]) Nous verrons que notre procédé nous permettra d'obtenir des résultats beaucoup plus précis.

En supposant que la table de mortalité est ajustée par la formule de Makeham et en utilisant la loi de Behm-Urech pour la probabilité d'invalidité ν_x

$$\nu_x = FG^x,$$

on peut exprimer le nombre l_x^{aa} de vivants et actifs par la formule

$$l_x^{aa} = k s^x g^{c^x + TG^x}, \tag{1}$$

où k, s, g, c sont les constantes de Makeham et

$$T = \frac{-F}{\log G \log g}.$$

Suivant les calculs de M. Haldy, la constante F est comprise entre 0,000007 et 0,00036 et la constante G entre 1,114 et 1,161.

Il suit de la formule (1) que la probabilité ${}_tp_x^{aa}$ pour qu'un individu actif d'âge x soit vivant et toujours actif après t années peut être exprimée par la formule

$${}_tp_x^{aa} = s^t g^{c^x(c^t-1) + TG^x(G^t-1)}$$

ou

$${}_tp_x^{aa} = e^{-\varkappa t} e^{\lambda(x)(1-c^t)} e^{\lambda'(x)(1-G^t)}$$

si nous posons

$$\varkappa = -\log s;\ \lambda(x) = -c^x \log g;\ \lambda'(x) = -TG^x \log g.$$

[1]) Aktuárské vědy, Praha 1937—1938, p. 114.

[2]) Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1936, p. 37.

Pour la rente temporaire d'activité de durée n on aura donc

$$a^{aa}_{x\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} e^{-\delta t} \cdot {}_t p^{aa}_x = e^{\lambda(x)+\lambda'(x)} \sum_{t=0}^{n-1} e^{-(\alpha+\delta)t}\, e^{-c^t\lambda(x)-G^t\lambda'(x)}$$

δ étant un taux instantané d'intérêt.

En posant

$$k = \frac{\alpha + \delta}{\log c},$$

nous pouvons encore écrire

$$a^{aa}_{x\overline{n}|} = e^{\lambda(x)+\lambda'(x)} \sum_{t=0}^{n-1} e^{-kt\log c}\, e^{-c^t\lambda(x)-G^t\lambda'(x)} \tag{2}$$

En posant, pour simplifier la notation,

$$\lambda(x) = \lambda;\ \ \lambda'(x) = \lambda',$$

et en développant l'expression (2) suivant la formule de Taylor, on aura

$$\begin{aligned} a^{aa}_{x\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} e^{-kt\log c} + \left[\sum_{t=0}^{n-1} e^{-kt\log c} - \sum_{t=0}^{n-1} e^{(1-k)t\log c}\right]\lambda + \\ &+ \left[\sum_{t=0}^{n-1} e^{-kt\log c} - \sum_{t=0}^{n-1} e^{(\log G - k\log c)t}\right]\lambda' + \tfrac{1}{2}\left[\sum_{t=0}^{n-1} e^{-kt\log c} - \right. \\ &\left. - 2\sum_{t=0}^{n-1} e^{(1-k)t\log c} + \sum_{t=0}^{n-1} e^{(2-k)t\log c}\right]\lambda^2 + \left[\sum_{t=0}^{n-1} e^{-kt\log c} - \right. \\ &\left. - \sum_{t=0}^{n-1} e^{(\log G - k\log c)t} - \sum_{t=0}^{n-1} e^{(1-k)t\log c} + \sum_{t=0}^{n-1} e^{[(1-k)\log c + \log G]t}\right]\lambda\lambda' + \\ &+ \tfrac{1}{2}\left[\sum_{t=0}^{n-1} e^{-kt\log c} - 2\sum_{t=0}^{n-1} e^{(\log G - k\log c)t} + \sum_{t=0}^{n-1} e^{(2\log G - k\log c)t}\right]\lambda'^2 + \ldots \end{aligned}$$

En substituant

$$a_{00}(n) = \sum_{t=0}^{n-1} e^{-kt\log c} = \frac{e^{-nk\log c} - 1}{e^{-k\log c} - 1},$$

$$a_{10}(n) = \sum_{t=0}^{n-1} e^{(1-k)t\log c} = \frac{e^{n(1-k)\log c} - 1}{e^{(1-k)\log c} - 1},$$

$$a_{01}(n) = \sum_{t=0}^{n-1} e^{(\log G - k\log c)t} = \frac{e^{n(\log G - k\log c)} - 1}{e^{\log G - k\log c} - 1},$$

$$a_{20}(n) = \sum_{t=0}^{n-1} e^{(2-k)t\log c} = \frac{e^{n(2-k)\log c} - 1}{e^{(2-k)\log c} - 1},$$

$$a_{11}(n) = \sum_{t=0}^{n-1} e^{[\log G + (1-k)\log c]t} = \frac{e^{n[\log G + (1-k)\log c]} - 1}{e^{\log G + (1-k)\log c} - 1},$$

$$a_{02}(n) = \sum_{t=0}^{n-1} e^{(2\log G - k\log c)t} = \frac{e^{n(2\log G - k\log c)} - 1}{e^{2\log G - k\log c} - 1},$$

nous aurons finalement

$$\begin{aligned} a^{aa}_{x\overline{n}|} = a_{00}(n) - [a_{10}(n) - a_{00}(n)]\,\lambda - [a_{01}(n) - a_{00}(n)]\,\lambda' + \tfrac{1}{2}\,[a_{20}(n) - \\ - 2a_{10}(n) + a_{00}(n)]\,\lambda^2 + [a_{11}(n) - a_{10}(n) - a_{01}(n) + a_{00}(n)]\,\lambda\lambda' + \\ + \tfrac{1}{2}\,[a_{02}(n) - 2a_{01}(n) + a_{00}(n)]\,\lambda'^2 + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

La série du second terme, étant le produit de deux séries absolument convergentes, est, d'après le théorème de Cauchy, aussi convergente.

En ne conservant dans le développement (3) que ses trois premiers termes, nous obtenons l'expression

$$a^{aa}_{x\overline{n}|} = a_{00}(n) - [a_{10}(n) - a_{00}(n)]\,\lambda - [a_{01}(n) - a_{00}(n)]\,\lambda' \tag{4}$$

que M. E. Dasen a nommé *le développement lidstonien* et qui lui a servi comme un point de départ pour ses recherches ultérieures. Pour préciser les résultats auxquels il est arrivé, nous allons transformer le développement (3) afin de le faire plus convergent. Pour cela nous posons

$$\begin{aligned} b_{00}(n) &= a_{00}(n), \\ b_{10}(n) &= a_{10}(n) - a_{00}(n), \\ b_{01}(n) &= a_{01}(n) - a_{00}(n), \\ b_{20}(n) &= a_{20}(n) - 2a_{10}(n) + a_{00}(n), \\ b_{11}(n) &= a_{11}(n) - a_{10}(n) - a_{01}(n) + a_{00}(n), \\ b_{02}(n) &= a_{02}(n) - 2a_{01}(n) + a_{00}(n). \end{aligned}$$

La série (3) prend alors la forme

$$\begin{aligned} a^{aa}_{x\overline{n}|} = b_{00}(n) - b_{10}(n)\,\lambda - b_{01}(n)\,\lambda' + \tfrac{1}{2}b_{20}(n)\,\lambda^2 + b_{11}(n)\,\lambda\lambda' + \\ + \tfrac{1}{2}b_{02}(n)\,\lambda'^2 + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Maintenant nous posons

$$z = \frac{\lambda}{m(n) + \lambda}; \quad z' = \frac{\lambda'}{m'(n) + \lambda'}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda &= (z + z^2 + z^3 + \ldots)\, m(n), \\ \lambda' &= (z' + z'^2 + z'^3 + \ldots)\, m'(n), \end{aligned}$$

$m(n)$ et $m'(n)$ étant des fonctions de la durée n que nous définirons un peu plus tard.

La série (5) prend alors la forme

$$a^{aa}_{x\overline{n}|} = b_{00}(n) - b_{10}(n)\, m(n)\, z - b_{01}(n)\, m(n)\, z' - [b_{10}(n)\, m(n) - \\ - \tfrac{1}{2} b_{20}(n)\, m^2(n)]\, z^2 + b_{11}(n)\, m(n)\, m'(n)\, zz' - [b_{01}(n)\, m'(n) - \\ - \tfrac{1}{2} b_{02}(n)\, m'^2(n)]\, z'^2 + \dots$$

Nous définirons maintenant les fonctions $m(n)$ et $m'(n)$ de telle manière que les quatrième et sixième termes de cette série soient égaux à zéro. Nous poserons donc

$$m(n) = \frac{2b_{10}(n)}{b_{20}(n)} = \frac{2\,[a_{10}(n) - a_{00}(n)]}{a_{20}(n) - 2a_{10}(n) + a_{00}(n)},$$

$$m'(n) = \frac{2b_{01}(n)}{b_{02}(n)} = \frac{2\,[a_{01}(n) - a_{00}(n)]}{a_{02}(n) - 2a_{01}(n) + a_{00}(n)}.$$

En outre, nous négligeons le terme

$$b_{11}(n)\, m(n)\, m'(n)\, zz'$$

et tous les termes suivants. Nous aurons finalement la formule approchée

$$a^{aa}_{x\overline{n}|} = a_{00}(n) - m(n)\,[a_{10}(n) - a_{00}(n)] \cdot \frac{\lambda(x)}{m(n) + \lambda(x)} - \\ - m'(n)\,[a_{01}(n) - a_{00}(n)]\,\frac{\lambda'(n)}{m'(n) + \lambda'(n)}. \qquad (6)$$

Cette formule donne des résultats beaucoup plus précis que le développement lidstonien (4). Pour justifier cette affirmation nous donnons ci-après quelques exemples numériques. Pour cela nous nous servirons toujours de la table MM et IM $3\frac{1}{2}\%$ établie par le Bureau Fédéral des Assurances, table fournissant les bases techniques minima pour l'assurance de groupes en Suisse (Bern 1931). On a pour cette table

$$c = 1{,}0792; \ \log c = 0{,}07622003$$[1])

$$g = 0{,}9960; \ \log g = \bar{1}{,}99599198$$

$$s = 0{,}9967; \ \log s' = \bar{1}{,}99669455$$

$$F = \frac{0{,}000125}{8}; \ G = \sqrt[5]{2}; \ T \log g = -0{,}000112710,$$

$$\delta = 0{,}0344014.$$

Le tableau I donne les valeurs numériques des fonctions $\lambda(x)$ et $\lambda'(x)$ pour $x = 20, 30, 40, \dots, 100$.

[1]) Le symbole log signifie dans la suite le logarithme népérien.

Tableau I.

x	$\lambda(x)$	$\lambda'(x)$
20	0,01841	0,00180
30	0,03944	0,00721
40	0,08453	0,02885
50	0,18115	0,11542
60	0,38819	0,46166
70	0,83189	1,84664
80	1,78273	7,38656
90	3,82036	29,54625
100	8,18698	118,18500

Le tableau II donne les valeurs des fonctions $a_{00}(n)$, $a_{10}(n)$, $a_{01}(n)$, $a_{20}(n)$ $a_{11}(n)$, $a_{02}(n)$ pour $n = 10, 20, 30, \ldots, 80$.

Tableau II.

n	$a_{00}(n)$	$a_{10}(n)$	$a_{01}(n)$
10	8,48893	11,96524	16,41829
20	14,31121	29,55184	61,46149
30	18,30454	55,40077	185,03644
40	21,04344	93,39377	524,06140
50	22,92197	149,23616	1454,16848
60	24,21039	231,31373	4005,89513
70	25,09409	351,95200	11006,4977
80	25,70018	529,26710	30212,4849

n	$a_{20}(n)$	$a_{11}(n)$	$a_{02}(n)$
10	17,68285	25,17647	36,84762
20	73,37992	173,19477	441,20995
30	248,81333	1043,42886	4878,64407
40	801,38956	6159,73629	53574,6332
50	2541,88273	36239,6950	587759,870
60	8024,05033	213086,790	6452252,44
70	25291,6614	1252811,82	70806451,0
80	79680,8130	7365597,65	777023365

Ces tableaux nous montrent que ces fonctions croissent très rapidement avec la durée n. Il en résulte que la série (3) ne converge rapidement que pour les âges x qui ne sont pas trop élevés et pour les courtes durées n. Pour les âges plus élevés et pour les durées plus longues elle converge, au contraire, très lentement. Le développement lidstonien (4) ne peut donc donner de bons résultats pour ces âges et ces durées.

En comparant les valeurs de l'annuité $a^{aa}_{\overline{xn}|}$ calculées par son développement lidstonien (4) avec ses valeurs établies par le Bureau Fédéral des Assurances, nous obtenons le tableau III.

Tableau III.

x	n	$a^{aa}_{\overline{xn}\|}$	Développement lidstonien		
			valeur	erreur absolue	erreur relative en %
20	10	8,412	8,411	—0,001	— 0,01
	20	13,960	13,946	—0,014	— 0,10
	30	17,397	17,321	—0,076	— 0,44
	40	19,169	18,805	—0,364	— 1,90
	50	19,687	18,016	—1,671	— 8,49
30	10	8,302	8,295	—0,007	— 0,08
	20	13,445	13,370	—0,075	— 0,56
	30	16,097	15,639	—0,458	— 2,85
	40	16,873	14,561	—2,312	—13,70
40	10	8,005	7,966	—0,039	— 0,49
	20	12,132	11,662	—0,470	— 3,87
	30	13,340	10,358	—2,982	—22,35
50	10	7,188	6,944	—0,244	— 3,39
	20	9,291	6,109	—3,182	—34,25
60	10	5,243	3,479	—1,764	—33,64

On peut conclure de ce tableau que, si nous considérons l'erreur relative de 3% comme admissible, l'emploi de la formule (4) est légitime dans tous les cas où l'âge-terme $s = x + n$ ne dépasse pas 50 ans. Mais dans le cas où l'âge-terme s dépasse sensiblement cette valeur, l'erreur devient trop grande et le développement lidstonien (4) n'est plus applicable.

Le tableau IV contient les valeurs de l'annuité $a^{aa}_{x\overline{n}|}$ calculées par la formule (6).

En comparant le tableau IV avec le tableau III, on aperçoit que la formule (6) donne des résultats sensiblement meilleurs que le développement lidstonien (4). L'erreur relative est en général deux fois plus petite: elle reste inférieure à 2% pour tout l'âge-terme $s = x + n$ qui ne dépasse pas 60 ans.

Tableau IV.

x	n	$a^{aa}_{x\overline{n}|}$	Formule (6) valeur	erreur absolue	erreur relative en %
20	10	8,412	8,411	—0,001	— 0,01
	20	13,960	13,951	—0,009	— 0,06
	30	17,397	17,354	— 0,043	— 0,25
	40	19,169	18,982	—0,187	— 0,98
	50	19,687	19,041	—0,646	— 3,28
30	10	8,302	8,297	—0,005	— 0,06
	20	13,445	13,400	—0,045	— 0,33
	30	16,097	15,858	—0,239	— 1,48
	40	16,873	15,976	—0,897	— 5,32
40	10	8,005	7,979	— 0,026	— 0,32
	20	12,132	11,883	—0,249	— 2,05
	30	13,340	12,186	—1,154	— 8,65
50	10	7,188	7,055	—0,133	— 1,85
	20	9,291	8,084	—1,207	—12,99
60	10	5,243	4,606	—0,637	—12,15

Nous allons maintenant montrer qu'en partant de cette formule (6), nous pouvons calculer (comme l'a fait M. E. Dasen en partant du développement de Lidston) la valeur actuelle totale des primes à payer par un groupe d'assurés d'âges différents, mais tous devant payer le même nombre n de primes.

Pour y arriver nous écrivons la formule (6) sous la forme suivante

$$a^{aa}_{xn|} = a_{00}(n) - m(n)\,[a_{10}(n) - a_{00}(n)] \cdot \frac{\lambda(x)\,c^n}{m(n)\,c^n + \lambda(x)\,c^n} -$$
$$- m'(n)\,[a_{01}(n) - a_{00}(n)] \cdot \frac{\lambda'(x)\,G^n}{m'(n)\,G^n + \lambda(x)\,G^n}.$$

Or, d'après la définition même des fonctions $\lambda(x)$ et $\lambda'(x)$, on obtient

$$\lambda(x)\,c^n = \lambda(x+n); \quad \lambda'(x)\,G^n = \lambda'(x+n).$$

Nous pouvons donc écrire

$$a^{aa}_{xn|} = a_{00}(n) - m(n)\,[a_{10}(n) - a_{00}(n)] \cdot \frac{\lambda(x+n)}{m(n)\,c^n + \lambda(x+n)} -$$
$$- m'(n)\,[a_{01}(n) - a_{00}(n)] \cdot \frac{\lambda'(x+n)}{m'(n)\,G^n + \lambda'(x+n)}. \qquad (7)$$

Les produits $m(n)\,c^n$ et $m'(n)\,G^n$, comme nous montre le tableau V, ont à peu près les mêmes valeurs et ne changent pas beaucoup avec n. Nous pouvons donc poser

$$m(n)\,c^n = m'(n)\,G^n = \gamma,$$

γ étant une constante.

Tableau V.

n	$m(n)\,c^n$	$m'(n)\,G^n$
10	6,64769	7,44652
20	4,89662	5,07481
30	4,67104	4,53643
40	4,80102	4,71444
50	5,03797	4,90117
60	5,28861	5,00992
70	5,51267	5,06143
80	5,69581	5,08396

La formule (7) prend alors la forme

$$a^{aa}_{xn|} = a_{00}(n) - \frac{\gamma[a_{10}(n) - a_{00}(n)]}{c^n} \cdot \frac{\lambda(x+n)}{\gamma + \lambda(x+n)} -$$
$$- \frac{\gamma[a_{01}(n) - a_{00}(n)]}{G^n} \cdot \frac{\lambda'(x+n)}{\gamma + \lambda(x+n)}. \qquad (8)$$

On voit du tableau V que la constante γ est à peu près égale à 5. Or, puisque la formule (6) donne les valeurs approchées de $a^{aa}_{xn|}$ toujours un peu trop petites, il est mieux de prendre pour cette constante une valeur inférieure. En comparant les valeurs de la rente $a^{aa}_{\overline{xn}|}$ données par la formule (8) avec ses valeurs exactes établies par le Bureau Fédéral des Assurances, on trouve pour la constante γ les valeurs indiquées dans le tableau VI.

Tableau VI.

x	n	γ
20	10	2,1
	20	1,7
	30	1,9
	40	2,1
	50	2,5
30	10	1,7
	20	1,8
	30	2,0
	40	2,4
40	10	1,9
	20	2,0
	30	2,3
50	10	2,3
	20	2,3
60	10	2,8

Tableau VII.

x	n	$a^{aa}_{\overline{xn}|}$	Formule (8)		
			valeur	déviation	erreur relative en %
20	10	8,412	8,412	0,000	0,00
	20	13,960	13,957	—0,003	—0,02
	30	17,397	17,385	—0,012	—0,07
	40	19,169	19,149	—0,020	—0,10
	50	19,687	19,783	0,096	0,49
30	10	8,302	8,300	—0,002	—0,02
	20	13,445	13,430	—0,015	—0,11
	30	16,097	16,051	—0,045	—0,29
	40	16,873	16,935	0,062	0,37
40	10	8,005	7,999	—0,006	—0,07
	20	12,132	12,076	—0,056	—0,46
	30	13,340	13,333	—0,007	—0,05
50	10	7,188	7,188	0,000	0,00
	20	9,291	9,265	—0,026	—0,28
60	10	5,243	5,467	0.224	4,27

Dans notre cas nous obtiendrons un très bon résultat si nous prenons $\gamma = 2{,}3$. Le tableau VII donne les valeurs de l'annuité $a^{aa}_{\overline{xn}|}$ calculées par la formule (8) avec cette valeur de la constante γ.

On voit que cette formule (8) donne en effet de très bons résultats: l'erreur relative pour tous les âges x ne dépassant pas 50 ans et pour tous les âges-termes $s = x + n$ ne dépassant pas 70 ans elle est inférieure à 0,5%. On peut donc espérer qu'elle puisse être appliquée avec succès au calcul de la valeur actuelle totale des primes à payer par un groupe d'assurés actifs d'âges différents, mais tous devant payer le même nombre de primes.

Considérons donc un groupe de contrats, pour lesquels le nombre n des primes restant à payer est le même, mais reposant sur les têtes actives ayant le date du bilan les âges arrondis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_q$. Soient L_{x_i} le nombre des têtes ayant l'âge x_i et P_{x_i} la prime que paie chacune d'elles.

En appliquant la formule (8), on a pour la valeur actuelle totale des primes du groupe

$$\sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} \mathbf{a}^{aa}_{x_i \overline{n}|} = a_{00}(n) \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} - \frac{\gamma[a_{10}(n) - a_{00}(n)]}{c^n} \cdot \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} \frac{\lambda(x_i + n)}{\gamma + \lambda(x_i + n)} - \frac{\gamma[a_{01}(n) - a_{00}(n)]}{G^n} \cdot \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} \frac{\lambda'(x_i + n)}{\gamma + \lambda'(x_i + n)}.$$

Pour l'âge auxiliaire y, qui est défini par l'égalité

$$\mathbf{a}^{aa}_{y\overline{n}|} \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} = \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} \mathbf{a}^{aa}_{x_i \overline{n}|}$$

nous aurons donc la relation approchée

$$\left[\frac{a_{10}(n) - a_{00}(n)}{c^n} \cdot \frac{\lambda(y + n)}{\gamma + \lambda(y + n)} + \frac{a_{01}(n) - a_{00}(n)}{G^n} \cdot \frac{\lambda'(y + n)}{\gamma + \lambda(y + n)}\right] \cdot \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} = \frac{a_{10}(n) - a_{00}(n)}{c^n} \cdot \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} \frac{\lambda(x_i + n)}{\gamma + \lambda(x_i + n)} + \frac{a_{01}(n) - a_{00}(n)}{G^n} \cdot \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} \frac{\lambda'(x_i + n)}{\gamma + \lambda'(x_i + n)}.$$

Or, pour une valeur de y nous ne pouvons pas avoir simultanément

$$\frac{\lambda(y + n)}{\gamma + \lambda(y + n)} \cdot \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} = \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} \cdot \frac{\lambda(x_i + n)}{\gamma + \lambda(x_i + n)},$$

$$\frac{\lambda'(y + n)}{\gamma + \lambda(y + n)} \cdot \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} = \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} \cdot \frac{\lambda'(x_i + n)}{\gamma + \lambda'(x_i + n)}.$$

Considérons donc l'expression

$$\mathbf{a}^{aa}_{y_1, y_2 \overline{n}|} = a_{00}(n) - \frac{\gamma[a_{10}(n) - a_{00}(n)]}{c^n} \cdot \frac{\lambda(y_1 + n)}{\gamma + \lambda(y_1 + n)} - \frac{\gamma[a_{01}(n) - a_{00}(n)]}{G^n} \cdot \frac{\lambda'(y_2 + n)}{\gamma + \lambda'(y_2 + n)} \tag{9}$$

qui nous est fournie par la formule (8) et dans laquelle y_1 et y_2 sont obtenus par les équations

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(y_1+n)}{\gamma+\lambda(y_1+n)}\cdot\sum_{i=1}^{q} L_{x_i}P_{x_i} &= \sum_{i=1}^{q} L_{x_i}P_{x_i}\frac{\lambda(x_i+n)}{\gamma+\lambda(x_i+n)}, \\ \frac{\lambda'(y_2+n)}{\gamma+\lambda'(y_2+n)}\cdot\sum_{i=1}^{q} L_{x_i}P_{x_i} &= \sum_{i=1}^{q} L_{x_i}P_{x_i}\frac{\lambda'(x_i+n)}{\gamma+\lambda'(x_i+n)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Nous appelerons avec M. E. Dasen l'expression (9) *la pseudorente* temporaire discontinue d'activité relative au groupe considéré des têtes.

En posant

$$A_1 = \sum_{i=1}^{q} L_{x_i}P_{x_i}\cdot\frac{\lambda(x_i+n)}{\gamma+\lambda(x_i+n)},$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^{q} L_{x_i}P_{x_i}\cdot\frac{\lambda'(x_i+n)}{\gamma+\lambda'(x_i+n)},$$

$$B = \sum_{i=1}^{q} L_{x_i}P_{x_i},$$

on trouve des égalités (10)

$$\lambda(y_1+n) = \frac{\gamma A_1}{B-A_1},$$

$$\lambda'(y_2+n) = \frac{\gamma A_2}{B-A_2}$$

d'où

$$\begin{aligned} c^{y_1} &= \frac{\gamma A_1}{(B-A_1)\,\lambda(n)}, \\ G^{y_2} &= \frac{\gamma A_2}{(B-A_2)\,\lambda'(n)}, \end{aligned} \tag{11}$$

puisque on a, d'après la définition même des fonctions $\lambda(x)$ et $\lambda'(x)$,

$$\lambda(y_1+n) = c^{y_1}\ \lambda(n),$$

$$\lambda'(y_2+n) = G^{y_2}\,\lambda'(n).$$

Les produits

$$P_{x_i}\cdot\frac{\lambda(x_i+n)}{\gamma+\lambda(x_i+n)} \quad \text{et} \quad P_{x_i}\cdot\frac{\lambda'(x_i+n)}{\gamma+\lambda'(x_i+n)},$$

qui conservent leurs valeurs pendant toute la durée du contrat, peuvent être calculés, lors du début de l'assurance, une fois pour toutes. En faisant la somme de tous ces produits, on obtient la valeur de A_1 et A_2. On calcule alors les âges auxiliaires y_1 et y_2 par les formules (11), où B représente la prime totale du groupe.

Pour calculer la valeur actuelle totale des primes à payer par les assurés actifs du groupe, nous pouvons appliquer une de trois méthodes indiquées par M. E. Dasen.

Méthode A:

$$\sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i}\, a^{aa}_{x_i \overline{n}|} = a^{aa}_{y_1, y_2 \overline{n}|} \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i},$$

où la pseudorente $a^{aa}_{y_1, y_2 \overline{n}|}$ est donnée par la relation approchée (9).

Méthode B:

$$\sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i} = a^{aa}_{x_i \overline{n}|} = a^{aa}_{y_0 \overline{n}|} \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i},$$

où

$$y_0 = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Méthode C:

$$\sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i}\, a^{aa}_{x_i \overline{n}|} = \tfrac{1}{2}\left(a^{aa}_{y_1 \overline{n}|} + a^{aa}_{y_2 \overline{n}|}\right) \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i}.$$

Pour nous rendre compte de l'exactitude que peut fournir notre méthode, considérons les trois exemples proposés par M. E. Dasen[1]) et indiqués dans le tableau VIII.

Tableau VIII.

x	Exemple I $n = 10$		Exemple II $n = 20$		Exemple III $n = 30$	
	L_x	P_x	L_x	P_x	L_x	P_x
20	18	327	30	197	62	160
25	20	239	34	173	65	150
30	27	197	41	160	60	144
35	33	173	48	150	75	141
40	36	160	52	144	58	140
45	40	150	46	141		
50	35	144	39	140		
55	29	141				
60	17	140				

Les âges auxiliaires calculés par les formules (11) et par la méthode de M. E. Dasen sont donnés par le tableau IX.

[1]) Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1936, p. 54.

Les résultats auxquels on arrive avec ces âges auxiliaires sont donnés par le tableau X.

Tableau IX.

	Age auxiliaire					
	Formule (11)			Méthode de E. Dasen		
	y_1	y_2	y_0	y_1	y_2	y_0
Exemple I	42,48	45,09	43,78	43,41	46,70	45,06
Exemple II	37,62	39,05	38,34	38,40	40,56	39,48
Exemple III....	30,98	31,63	31,30	31,53	32,83	32,18

Tableau X.

Exemple	Méthode	Valeur actuelle totale des primes						
		Formules (11)			Méthode de F. Dasen			Méthode exacte
		valeur	devi-ation	erreur relative en %	valeur	deviation	erreur relative en %	
I	A B C	348 193 350 082 349 812	649 2538 2268	0,19 0,73 0,65	338 531 345 810 345 361	— 9 013 — 1 734 — 2 183	—2,59 —0,50 —0,63	347 544
II	A B C	555 802 559 491 559 401	—1427 2262 2172	—0,26 0,41 0,39	526 422 550 314 549 909	—30 807 — 6 915 — 7 320	—5,53 —1,24 —1,31	557 229
III	A B C	741 081 744 136 744 089	—1408 1647 1600	—0,19 0,22 0,22	699 519 735 111 734 923	—42 970 — 7 378 — 7 566	—5,79 —0,99 —1,02	742 489
totale	A B C	1 645 076 1 653 709 1 653 302	—2186 6447 6040	—0,13 0,39 0,37	1 564 472 1 631 235 1 630 193	—82 790 —16 027 —17 069	—5,03 —0,97 —1,04	1 647 262

On voit de ce tableau que les formules (11) donnent des résultats beaucoup meilleurs que la méthode de M. E. Dasen.

L'erreur est, en général, beaucoup plus petite. Dans l'ensemble de tous ces exemples elle est inférieure à 0,4%. Elle est donc effectivement négligeable.

Il est curieux de constater que dans le procédé de M. E. Dasen la méthode A donne des résultats moins exactes que ceux obtenus par les méthodes B et C. Dans notre procédé, au contraire, c'est la méthode A qui donne des résultats plus satisfaisants. L'explication est facile: nous avons déjà vu plus haut que dans le cas, où l'âge-terme $s = x + n$ dépasse 50 ans, le développement lidstonien (4) n'est pas applicable. La pseudo-rente basée sur ce développement ne peut donc donner de bons résultats. Dans notre cas la pseudo-rente (9) est basée sur la formule (8) qui donne une très bonne approximation.

Dans notre procédé les méthodes B et C donnent des résultats moins satisfaisants que la méthode A. L'emploi de la moyenne arithmétique des âges auxiliaires y_1 et y_2 ou des rentes $a^{aa}_{y_1\overline{n}|}$ et $a^{aa}_{y_2\overline{n}|}$ ne peut donc être recommendé.

Nous obtenous de meilleurs résultats, si nous prenons la moyenne de ces valeurs, chargées par les poids c^n et G^n, c'est-à-dire si, au lieu des méthodes B et C, nous appliquons les méthodes B' et C' suivantes:

Tableau XI.

Exemple	Méthode	Valeur actuelle totale des primes			
		Formules (11)			Méthode exacte
		valeur	deviation	erreur relative en %	
I	B' C'	348 778 348 553	1234 1009	0,36 0,29	347 544
II	B' C'	556 432 556 342	—797 —887	—0,14 —0,16	557 229
III	B' C'	741 692 741 645	—797 —844	—0,11 —0,11	742 489
totale	B' C'	1 646 902 1 646 540	—360 —722	—0,02 —0,04	1 647 262

Méthode B′:

$$\sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i}\, a^{aa}_{x_i \overline{n|}} = a^{aa}_{y_0 \overline{n|}} \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i},$$

où

$$y_0 = \frac{y_1 c^n + y_2 G^n}{c^n + G^n}.$$

Méthode C″:

$$\sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i}\, a^{aa}_{x_i \overline{n|}} = \frac{c^n a^{aa}_{y_1 \overline{n|}} + G^n a^{aa}_{y_2 \overline{n|}}}{c^n + G^n} \sum_{i=1}^{q} L_{x_i} P_{x_i}.$$

Les résultats auxquels on arrive sont donnés par le tableau XI.

On voit de ce tableau que les méthodes B′ et C′ donnent, elles-aussi, de très bons résultats: dans tous les exemples considérés, l'erreur relative est inférieure à 0,4%. Dans l'ensemble de tous ces exemples elle diminue jusqu'à 0,04%, et devient donc absolument negligeable.

MATHEMATICAL THEORY OF GROWTH WITH SPECIAL REGARD TO POPULATION PROBLEMS

By RNDr Josef Talacko

BIBLIOGRAPHY.

1. *A. C. Aitken:* On the Graduation of Data by the Orthogonal Polynomials of Least Squares. Proc. Roy. Soc. Edin. 54—78, 53, 1933.
2. *A. C. Aitken:* On Factorial Nomenclature and Notation. J. of the Inst. of Act. 449—453, 64, 1933.
3. *P. Baltensperger:* Ueber die Vorausberechnung der Sterblichkeit der schweizerischen Bevölkerung. Mitt. d. Verein. schweiz. Versich.-math. 41. Band, 2. Heft, 1941.
4. *S. Bernstein:* Solution of a Mathematical Problem Connected with the Theory of Heredity. The Annals of Math. Stat. Vol. XIII, 1, 53, 1942.
5. *E. Borel:* Leçons sur la théorie de la croissance. Paris 1910.
6. *E. Borel:* Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions. Paris 1922.
7. *E. Borel:* Leçons sur les séries divergentes. Paris 1928.
8. *H. Cramér* and *H. Wold:* Mortality Variations in Sweden, a Study in Graduation and Forecasting. Skand. Aktuarietidskr. 161, 1935.
9. *H. T. Davis:* The Analysis of Economic Time Series. Principia Press 1941.
10. *H. T. Davis:* The Theory of Econometrics. Colorado 1941.
11. *K. Čupr:* Matematické základy nauky o logistické křivce. Stat. obzor, 35—44, 23, 1942.
12. *G. Doetsch:* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937.
13. *L. Féraud:* Le renouvellement, quelques problèmes connexes et les équations intégrales du cycle fermé. Mitteil. d. Verein. schweiz. Versich., 41. B., 1941.