2. Středoevropská matematická olympiáda

Jaroslav Švrček, PřF UP Olomouc

Druhý ročník Středoevropské matematické olympiády (Middle European Mathematical Olympiad – MEMO) se uskutečnil ve dnech 4. – 10. září 2008 v Olomouci pod záštitou rektora Univerzity Palackého. Soutěže se zúčastnilo 52 soutěžících z devíti zemí střední Evropy (České republiky, Chorvatska, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska). Jedním z cílů této nové matematické soutěže je umožňit našim mladým talentovaným středoškolákům porovnat své matematické znalosti se svými vrstevníky ze středoevropských zemí a poznat přitom atmosféru mezinárodní matematické soutěže, která probíhá za podobných podmínek jako Mezinárodní matematická olympiáda (IMO). Do reprezentačních družstev účastnických zemí byli přitom vybráni soutěžící, kteří ve školním roce 2008/2009 byli ještě studenty středních škol a přitom v roce 2008 nebyli členy reprezentačních družstev svých zemí na 49. IMO ve Španělsku.

České reprezentační družstvo pro 2. ročník MEMO bylo sestaveno na základě výsledků dosažených soutěžícími v ústředním kole 57. ročníku naší MO. Jeho členy se tak stali nejlepší řešitelé z nematuritních ročníků středních škol, kteří se nekvalifikovali do českého reprezentačního družstva pro 49. IMO. Naše družstvo ve 2. ročníku MEMO tak tvořili: *David Klaška* (2/4 G v Brně, tř. Kpt. Jaroše), *Jiří Marek* (3/4 G v Brně, tř. Kpt. Jaroše), *Van Nhan Nguyen* (7/8 G v Praze 6, Nad Alejí), *Tomáš Pavlík* (7/8 GJK v Praze 6, Parléřova), *Hana Šormová* (3/4 G v Brně, tř. Kpt. Jaroše) a *Jan Vaňhara* (3/4 GLJ Holešov, Palackého). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *Mgr. Martin Panák, Ph.D.* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně. Jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *RNDr. Karel Horák, CSc.* z Matematického ústavu AV ČR v Praze.

Organizací 2. ročníku MEMO bylo Ústřední komisí naší MO pověřeno olomoucké centrum MO. Předsedou organizačního výboru byl *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci. Celý realizační tým odvedl pod jeho vedením kvalitní práci a představil tak Českou republiku ve velmi dobrém světle.

Soutěžícím byly (stejně jako v 1. ročníku soutěže) předloženy dvě čtveřice úloh; jedna v soutěži jednotlivců, druhá v soutěži družstev. Tyto úlohy vybrala mezinárodní jury na svém zasedání před zahájením soutěže pod vedením předsedy komise pro přípravu úloh *doc. RNDr. Jaromíra Šimši, CSc.* Jednání mezinárodní jury přitom řídil a moderoval *RNDr. Karel Horák, CSc.* Zvláštní poděkování patří týmu koordinátorů soutěžních úloh, který tvořili čeští a slovenští specialisté na problematiku řešení nadstandardních matematických úloh.

Účastníci soutěže byli ubytováni ve vysokoškolských kolejích Univerzity Palackého a samotná soutěž probíhala ve fyzikálním pavilonu Přírodovědecké fakulty UP. Organizátoři soutěže připravili pro všechny účastníky soutěže atraktivní doprovodný program. Během svého pobytu v místě konání soutěže se soutěžící seznámili s historií a pamětihodnostmi Olomouce a blízkého okolí. Kromě „arcibiskupského“ zámku v Kroměříži navštívili všichni účastníci soutěže Javoříčské jeskyně a měli také možnost obdivovat architektonickou krásu hradu Bouzova.

V rámci vlastní soutěže byly soutěžícím předloženy dvě čtveřice úloh; jedna pro soutěž jednotlivců, druhá pro soutěž družstev. Na vypracování řešení první čtveřice úloh měl každý soutěžící 5 hodin čistého času a za každou úlohu mohl získat nejvýše 8 bodů. Druhou čtveřici úloh řešily jednotlivé národní týmy společně, opět po dobu pěti hodin. Každá úloha byla i zde ohodnocena nejvýše 8 body (s celočíselným bodovým ziskem v rozpětí 0–8 bodů).

V soutěži jednotlivců byli ve 2. ročníku soutěže oceněni zlatými medailemi soutěžící, kteří získali plný počet, tj. 32 bodů. Mezi nimi byli tři maďarští soutěžící, a po jednom soutěžícím z Polska a Německa. Uveďme nyní pro představu počty (po řadě) zlatých, stříbrných, bronzových medailí a počty čestných uznání, které získala jednotlivá družstva v soutěži jednotlivců. (Každý tým s výjimkou Slovinska, které reprezentovala čtveřice studentů, tvořilo 6 soutěžících.): Česká republika (0–1–1–1), Chorvatsko (0–0–3–1), Maďarsko (3–3–0–0), Německo (1–3–1–1), Polsko (1–4–1–0), Rakousko (0–0–3–1), Slovensko (0–0–2–4), Slovinsko (0–0–0–1), Švýcarsko (0–0–3–2).

Z českého týmu byl v soutěži jednotlivců nejlepší *David Klaška*, který se ziskem 24 b. obsadil 11. místo a získal stříbrnou medaili. Pěkného výsledku dosáhl rovněž *Tomáš Pavlík* (19 b.), který obsadil 24. místo a získal bronzovou medaili. Za zmínku stojí bezesporu i čestné uznání pro *Jiřího Marka* (13 b., 37. místo). V soutěži družstev získaly prvenství současně týmy Maďarska, Polska a Německa s plným bodovým ziskem. Český tým skončil se ziskem 22 b. na 7. místě, což představuje ve srovnání s mimulým ročníkem, kdy naše družstvo skončilo na 3. místě, výrazné zhoršení. Podrobnější výsledky můžete najít na českých internetových stránkách této soutěže na adrese `www.kag.upol.cz/memo`.

Na závěr ještě uvádíme zadání všech osmi soutěžních úloh. V závorce jsou uvedeny země, které úlohy navrhly.

Soutěž jednotlivců – 6. září 2008

Příklad 1
Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných celých čísel taková, že $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \geq 1$. Předpokládejme, že pro libovolnou čtveřici indexů (i, j, k, l), kde $1 \leq i < j \leq k < l$ a $i + l = j + k$, platí nerovnost $a_i + a_l > > a_j + a_k$ Určete nejmenší možnou hodnotu členu a_{2008}. (*Rakousko*)

Příklad 2
Uvažujme šachovnici $n \times n$, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Kolika způsoby na ni můžeme rozmístit $2n - 2$ identických kamenů (každý kámen leží na jiném poli) tak, že žádné dva kameny neleží na stejné diagonále? (Dva kameny leží na stejné diagonále, jestliže přímka spojující středy odpovídajících polí je rovnoběžná s některou z úhlopříček šachovnice.) (*Švýcarsko*)

Příklad 3
Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC s rameny BC a AC. Kružnice jemu vepsaná se dotýká stran AB a BC po řadě v bodech D a E. Přímka různá od AE a procházející bodem A protíná kružnici vepsanou v bodech F a G. Přímka AB pak protíná přímky EF a EG po řadě v bodech K a L. Dokažte, že $|DK| = |DL|$. (*Maďarsko*)

Příklad 4
Najděte všechna celá k taková, že čísla $4n + 1$ a $kn + 1$ jsou nesoudělná pro libovolné celé n. (*Maďarsko*)

Soutěž družstev – 7. září 2008

Příklad 1
Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že
$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$
pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. (*Švýcarsko*)

Příklad 2
Buď $n \geq 2$ přirozené číslo. Na tabuli je napsáno n čísel. V každém kroku vybereme na tabuli dvě čísla a každé z nich nahradíme jejich součtem. Určete všechna n, pro která můžeme vždy po konečném počtu kroků dostat n stejných čísel. (*Slovensko*)

Příklad 3
Buď ABC ostroúhlý trojúhelník a nechť body E, D jsou takové, že body B a E leží v opačných polorovinách určených přímkou AC a bod D leží uvnitř úsečky AE. Dále nechť $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CDE|$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ECD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EBA|$. Dokažte, že body B, C a E leží na jedné přímce. (*Slovinsko*)

Příklad 4
Jestliže je součet kladných dělitelů kladného celého čísla n mocninou čísla 2 s celočíselným exponentem, pak je i jejich počet mocninou čísla 2 s celočíselným exponentem. Dokažte. (*Česká republika*)

* * * * *

Nikdy nebude prvočíslom
Koľko bolo žien úspešných vo „veľkej“ matematike? Prvou ženou, ktorá získala cenu Parížskej akadémie za vypracovanie matematickej teórie pružnosti dosiek bola *Sophie Germainová* (1776–1831). Pracovala aj v teórii čísel. Tam jednoducho ukázala: Pre každé prirodzené číslo $n > 1$ platí, že číslo $n^4 + 4$ je zložené (to znamená, že ak je $n > 1$ nie je $n^4 + 4$ nikdy prvočíslo). Pozrite sa na vtipný dôkaz: $n^4+4 = n^4+4n^2+4-4n^2 = (n+2)^2-(2n)^2 = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n)$. Ani jeden zo súčiniteľov sa pre $n > 1$ nerovná jednej, to znamená, že $n^4 + 4$ má dvoch rôznych deliteľov, ktoré sa nerovnajú jednotke ani číslu samému. Teda je to číslo zložené.

Vybral D. Jedinák