František Katrnoška; Michal Křížek

Kleinova čtyřgrupa

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 4, 4–9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146323

Kleinova čtyřgrupa

František Katrnoška, Ústav matematiky, VŠCHT Praha
Michal Křížek, Matematický ústav AV ČR, Praha

Abstract. The article deals with properties of the Klein Four-Group and its occurrences not only in mathematics.

V letošním roce si připomínáme 160. výročí narození Felixe Christiana Kleina (1849–1925). Po tomto význačném německém matematikovi je pojmenována např. známá neorientovatelná plocha – Kleinova láhev, dále Kleinova kvadrika, Kleinův prostor, Beltramiho–Kleinův model Lobačevského geometrie a také Kleinova čtyřgrupa (viz [4]).

Felix Klein se narodil v Düsseldorfu. Po absolvování univerzity v Bonnu začal spolupracovat s norským geometrem S. Liem (1842–1899). Společně studovali nové směry v geometrii a teorii invariantů. V roce 1872 nastoupil Klein na univerzitu v Erlangen. Zde se již ve svých 23 letech proslavil svou profesorskou přednáškou: *Srovnávací úvahy o novějších geometrických bádáních,* která vstoupila do dějin matematiky pod názvem *Erlangenský program.* V ní poukázal na vztah mezi geometrií a teorií grup a navrhl studovat vlastnosti geometrických objektů pomocí invariantů grup transformací definovaných na těchto objektech. Klein dále působil v Mnichově, Lipsku a na slavné univerzitě v Göttingen.

V tomto článku mimo jiné ukážeme, jak spolu souvisí molekula vody a množina $\{1, 3, 5, 7\}$ s operací násobení modulo 8. Tyto objekty nemají zdánlivě nic společného. Pomocí teorie grup ale ukážeme, že společné vlastnosti mají. Připomeňme si nejprve definici grupy.

Nechť G je neprázdná množina s binární operací $\circ$. Řekneme, že dvojice $(G, \circ)$ je *grupa,* jestliže platí:

1) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ pro všechna $f, g, h \in G$,

2) existuje prvek $e \in G$ takový, že $e \circ g = g = g \circ e$ pro všechna $g \in G$,

3) ke každému prvku $g \in G$ existuje prvek $g^{-1} \in G$ tak, že

$$g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g.$$

Prvek e se nazývá *neutrální* a g^{-1} *inverzní prvek* k g v G. Vlastnosti 1) se říká *asociativita*. Pod binární operací $\circ \colon G \times G \to G$ si můžeme představit např. operaci sčítání $+$, násobení $\times$, skládání zobrazení $\circ$ apod.

Například množina všech celých čísel $\mathbb{Z}$ s operací $+$ je grupou, množina kladných reálných čísel $\mathbb{R}_+$ s operací $\times$ je grupou a množina všech otočení v rovině kolem pevného bodu s operací skládání $\circ$ je také grupou. To jsou příklady nekonečných grup.

Řekneme, že $(G, \circ)$ je *konečná grupa,* jestliže množina G má jen konečný počet prvků. *Řád* konečné grupy je počet prvků G. Například množina

$$G = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\} \tag{1}$$

s operací násobení komplexních čísel je konečná grupa řádu čtyři.

Konečnou grupu lze definovat pomocí tzv. Cayleyho tabulky pojmenované na počest vynikajícího anglického matematika Arthura Cayleyho (1821–1895). Nechť $(G, \circ)$ je grupa řádu n, kde $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. *Cayleyho tabulka* grupy $(G, \circ)$ je čtvercové schéma takové, že prvek nalézající se v průsečíku řádku označeného g_i a sloupce označeného g_j je roven $g_i \circ g_j$ pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a jsou splněny axiomy grupy. Uveďme si např. Cayleyho tabulku pro grupu (1) s operací násobení $\times$ (tab. 1):

$\times$	1	i	-1	$-$i
1	1	i	-1	$-$i
i	i	-1	$-$i	1
-1	-1	$-$i	1	i
$-$i	$-$i	1	i	-1

Tab. 1

Klíčovým pojmem v dalším výkladu je izomorfie grup. Řekneme, že grupy $(G_1, \circ)$ a $(G_2, *)$ jsou *izomorfní,* jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $F\colon G_1 \to G_2$ takové, že

1) $F(f \circ g) = F(f) * F(g)$ pro všechna $f, g \in G_1$ a

2) $F(e_1) = e_2$, kde e_1, resp. e_2 je neutrální prvek v $(G_1, \circ)$, resp. $(G_2, *)$.

Uveďme si jednoduchý příklad. Symbolem $(\mathbb{R}, +)$ označme grupu všech reálných čísel s binární operací sčítání. Pak jsou grupy $(\mathbb{R}_+, \times)$ a $(\mathbb{R}, +)$ izomorfní pro zobrazení $F(x) = \log x$, $x \in \mathbb{R}_+$. V příkladech 1–5 uvedeme 5 vzájemně izomorfních grup konečného řádu.

Neizomorfní grupy nemají stejnou algebraickou strukturu, a proto jsou různé. Izomorfní grupy naopak za různé pokládat nebudeme. Protože mají stejnou algebraickou strukturu, budeme je považovat za vzájemně ekvivalentní.

Pojem grupy je v matematice velice důležitý. Svědčí o tom např. skutečnost, že funkce udávající počet vzájemně neizomorfních grup o n prvcích je ve Sloanově encyklopedii celočíselných posloupností [8] uvedena jako první pod číslem A000001. Tato funkce nabývá pro přirozená čísla 1, 2, 3,... postupně následující hodnoty:

$$1, 1, 1, \mathbf{2}, 1, 2, 1, 5, 2, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 14, \ldots, \tag{2}$$

přitom hodnotu 1 dostáváme pouze v případě, že všechny grupy daného řádu n jsou vzájemně izomorfní.

Z (2) je tedy patrno, že existují právě dvě různé neizomorfní grupy o čtyřech prvcích. Jejich Cayleyho tabulky jsou tyto (tab. 2, tab. 3):

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Tab. 2

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Tab. 3

Vidíme, že grupa definovaná tab. 1 je izomorfní s grupou definovanou tab. 2. Zaměníme-li v tab. 1 symboly $\times$, 1, i, -1, $-$i postupně za symboly $*$, e, a, b, c, dostaneme tab. 2. Grupa daná tab. 1 či 2 se nazývá *cyklická*.

Tab. 3 však definuje jinou (neizomorfní) grupu, protože třetí a pátý řádek tab. 3 se liší od tab. 2. Grupa definovaná tab. 3 se nazývá *Kleinova čtyřgrupa*.

V dalším pro jednoduchost pišme $a^2 = a \circ a$. Z tab. 3 je patrno, že

$$a^2 = b^2 = c^2 = e,\ a \circ b = b \circ a = c,\ a \circ c = c \circ a = b,\ b \circ c = c \circ b = a. \tag{3}$$

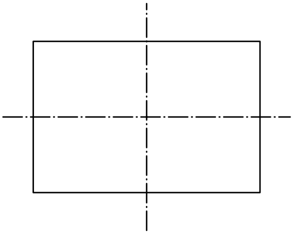
Tyto vztahy lze snadno prověřit v následujících pěti příkladech.

Příklad 1. Kleinova čtyřgrupa je izomorfní s grupou symetrií obdélníku (obr. 1), ale i kosočtverce. Proto se jí také někdy říká *rombická grupa* (viz [4] a [6]). Má následující čtyři prvky:

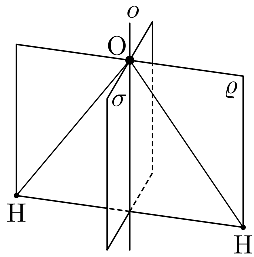
1) identitu e,

2) souměrnost a podle vodorovné osy,

3) souměrnost b podle svislé osy,
4) otočení c kolem středu o $180°$
a operaci skládání zobrazení $\circ$ (viz [9]).



Obr. 1



Obr. 2

Příklad 2. Grupa symetrií trojrozměrné molekuly vody H_2O je také izomorfní s Kleinovou čtyřgrupou (viz [1]). Má tyto prvky (obr. 2):
1) identické zobrazení,
2) otočení molekuly o $180°$ kolem svislé osy o,
3) souměrnost podle roviny ϱ procházející středy atomů vodíku a kyslíku,
4) souměrnost podle roviny σ kolmé na ϱ a procházející osou o.
Grupovou operací je opět skládání zobrazení $\circ$. Některé další molekuly mají stejnou grupu symetrií (viz [2]).

Příklad 3. Kleinovu grupu lze sestrojit též jako grupu čísel 1, 3, 5, 7 modulo 8 s operací násobení $\times$. Můžete si snadno prověřit, že odpovídající Cayleyho tabulka je tab. 4 (srov. tab. 3):

$\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Tab. 4

Příklad 4. Označme $A = (-1, 1)$, $B = (-1, -1)$, $C = (1, -1)$ a $E = (1, 1)$ body v rovině. Definujme mezi nimi násobení po jednotlivých souřadnicích takto: $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$ pro všechna $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{-1, 1\}$.

Pak se opět můžeme snadno přesvědčit, že prvky A, B, C, E tvoří Kleinovu čtyřgrupu s operací $*$.

Příklad 5. Podle Cayleyovy věty je každá grupa o n prvcích izomorfní nějaké podgrupě grupy permutací n prvků (podrobnosti viz [7, str. 126]). Snadno nahlédneme, že následující permutace čtyř prvků

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$
$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

zase tvoří Kleinovu čtyřgrupu s operací $\circ$ skládání permutací, přičemž např. permutace a označuje, že první dva prvky se prohodí, zatímco pořadí zbylých dvou prvků se nezmění. Dále vidíme, že

$$a \circ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = c.$$

Analogicky lze odvodit i další vztahy dané rovnostmi v (3).

Podobných příkladů je celá řada. I když spolu zdánlivě nesouvisí, jedno mají společné: Cayleyho tabulka je při vhodném označení prvků grupy vždy shodná s tab. 3. V tom právě spočívá kouzlo matematiky, která nám umožňuje odhlédnout od nepodstatných věcí.

Řekneme, že grupa $(G, \circ)$ je *komutativní,* jestliže $f \circ g = g \circ f$ pro všechna $f, g \in G$. Z tab. 3 vidíme, že Kleinova čtyřgrupa je komutativní.

Platí dokonce mnohem obecnější tvrzení (viz [7, str. 531]):

Věta (Burnsidova). *Každá konečná grupa, jejíž počet prvků je druhá mocnina prvočísla, je komutativní.*

Dokažme si ještě následující větu (srov. (3)):

Věta. *Jestliže pro každý prvek $g \in G$ je $g^2 = e$, pak G je komutativní.*

Důkaz: Nechť $f, g \in G$. Pak podle předpokladu $(f \circ g)(f \circ g) = e$. Odtud dostáváme složením s prvkem f zleva a s prvkem g zprava

$$f \circ (f \circ g) \circ (f \circ g) \circ g = f \circ g.$$

Z asociativity dále plyne, že $(f \circ f) \circ (g \circ f) \circ (g \circ g) = f \circ g$, a tedy $g \circ f = f \circ g$. $\square$

S grupami se setkáváme doslova na každém kroku, všude tam, kde se vyskytuje nějaká symetrie. Díky symetriím se řada komplikovaných výpočtů značně zjednodušuje. Cayleyho tabulka Kleinovy čtyřgrupy má podobnou strukturu jako některá čtvercová schémata charakterizující bodovou mutaci v genetice (podrobnosti viz [3, s. 185]). Teorie grup má ale celou řadu dalších aplikací ve fyzice a chemii (viz [1], [2], [6], [9]).

Zkuste si dokázat, že grupa všech permutací tří prvků řádu $3! = 6$ není komutativní. Na závěr ještě poznamenejme, že v roce 2008 byla udělena Abelova cena právě za teorii nekomutativních grup (viz [5]).

Poděkování. Autoři děkují doc. RNDr. A. Šolcové, Ph.D., za cenné připomínky. Práce byla podpořena grantem IAA 100190803 GA AV ČR.

Literatura

[1] Belger, M., Ehrenberg, L.: *Theorie und Anwendung der Symmetriegruppen.* Teubner, Leipzig, 1981.

[2] Bishop, M. D.: *Group Theory and Chemistry.* Clarendon Press, Oxford, 1973.

[3] Katrnoška, F.: Latinské čtverce a genetický kód. *Pokroky mat. fyz. astronom.* **52** (2007), s. 177–187.

[4] Klein, F. A.: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleinchungen vom fünften Grade.* Leipzig, 1884, s. 12–13.

[5] Křížek, M., Somer, L.: Abelova cena v roce 2008 udělena za objevy v teorii neabelovských grup. *Pokroky mat. fyz. astronom.* **53** (2008), s. 177–187.

[6] Ljubarskij, G. Ja.: *Teorija grupp i ee primenenie v fizike.* GITTL, Moskva, 1957.

[7] Mac Lane, S., Birkhoff, G.: *Algebra.* Alfa, Bratislava, 1973.

[8] Sloane, N. J. A.: *The on-line encyclopedia of integer sequences.* 2007, `http://www.research.att.com/~njas/sequences/`

[9] Wigner, E. P.: *Groups Theory and Its Applications to The Quantum Mechanics of Atomic Spectra.* Academic Press, New York, London, 1959.

Správne odpovede k článku „Číselné úlohy roku 2009“:
1. C – 2. B – 3. A – 4. C – 5. D – 6. B – 7. C – 8. A – 9. B – 10. E