Úlohy domácího kola 60. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 1, 31–34

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146346

Úlohy domácího kola 60. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

Kategorie A

1. Kořeny rovnice
$$ax^4 + bx^2 + a = 1$$
v oboru reálných čísel jsou čtyři po sobě jdoucí členy rostoucí aritmetické posloupnosti. Přitom jeden z těchto členů je zároveň řešením rovnice
$$bx^2 + ax + a = 1.$$
Určete všechny možné hodnoty reálných parametrů a, b.

(*Peter Novotný*)

2. Nechť k, n jsou přirozená čísla. Z platnosti tvrzení „číslo $(n-1)(n+1)$ je dělitelné číslem k“ Adam usoudil, že buď číslo $n-1$, nebo číslo $n+1$ je dělitelné k. Určete všechna přirozená čísla k, pro něž je Adamova úvaha správná pro každé přirozené n. (*Ján Mazák*)

3. Jsou dány kružnice k, l, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL.

(*Jaroslav Švrček*)

4. Mějme $6n$ žetonů až na barvu shodných, po třech od každé z $2n$ barev. Pro každé přirozené číslo $n > 1$ určete počet p_n všech rozdělení takových $6n$ žetonů na dvě hromádky po $3n$ žetonech, kdy žádné tři žetony téže barvy nejsou ve stejné hromádce. Dokažte, že p_n je liché číslo, právě když $n = 2^k$ pro vhodné přirozené k. (*Jaromír Šimša*)

5. Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na počátku, aby po konečném počtu vhodných kroků byla na všech stěnách krychle stejná čísla. (*Peter Novotný*)

6. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC s ostrým úhlem při vrcholu C (při obvyklém označení délek stran a velikostí vnitřních úhlů) platí nerovnost

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \leq 2ab.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. (*Jaromír Šimša*)

Kategorie B

1. V oboru reálných čísel vyřešte soustavu

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} &= z+1,\\ \sqrt{y^2+z^2} &= x+1,\\ \sqrt{z^2+x^2} &= y+1.\end{aligned}$$

(*Tomáš Jurík*)

2. Uvažujme vnitřní bod P daného obdélníku $ABCD$ a označme po řadě Q, R obrazy bodu P v souměrnostech podle středů A, C. Předpokládejme, že přímka QR protne strany AB a BC ve vnitřních bodech M a N. Sestrojte množinu všech bodů P, pro něž platí $|MN| = |AB|$. (*Jaroslav Švrček*)

3. Nechť a, b, c jsou reálná čísla, jejichž součet je 6. Dokažte, že aspoň jedno z čísel

$$ab + bc, \quad bc + ca, \quad ca + ab$$

není větší než 8. (*Ján Mazák*)

4. Najděte všechna celá čísla n, pro něž je zlomek

$$\frac{n^3 + 2\,010}{n^2 + 2\,010}$$

roven celému číslu. (*Pavel Novotný*)

5. Zabývejme se otázkou, které trojúhelníky ABC s ostrými úhly při vrcholech A a B mají následující vlastnost: Vedeme-li středem výšky z vrcholu C tři přímky rovnoběžné se stranami trojúhelníku ABC, protnou je tyto přímky v šesti bodech ležících na jedné kružnici.
a) Ukažte, že vyhovuje každý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C.
b) Vysvětlete, proč žádný jiný trojúhelník ABC nevyhovuje.
(*Jaromír Šimša*)

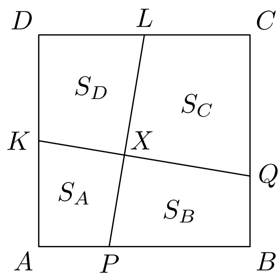
6. Určete počet desetimístných čísel, v nichž lze škrtnout dvě sousední číslice, a dostat tak číslo 99krát menší. (*Ján Mazák*)

Kategorie C

1. Lucie napsala na tabuli dvě nenulová čísla. Potom mezi ně postupně vkládala znaménka plus, mínus, krát a děleno a všechny čtyři příklady správně vypočítala. Mezi výsledky byly pouze dvě různé hodnoty. Jaká dvě čísla mohla Lucie na tabuli napsat? (*Peter Novotný*)

2. Dokažte, že výrazy $23x+y$, $19x+3y$ jsou dělitelné číslem 50 pro stejné dvojice přirozených čísel x, y. (*Jaroslav Zhouf*)

3. Máme čtverec $ABCD$ se stranou délky 1 cm. Body K a L jsou středy stran DA a DC. Bod P leží na straně AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na straně BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL se protínají v bodě X. Obsahy čtyřúhelníků $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupně S_A, S_B, S_C, S_D (obr. 1).



Obr. 1

a) Dokažte, že $S_B = S_D$.
b) Vypočtěte rozdíl $S_C - S_A$.
c) Vysvětlete, proč neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$. (*Peter Novotný*)

4. Ve skupině n žáků spolu někteří kamarádí. Víme, že každý má mezi ostatními aspoň čtyři kamarády. Učitelka chce žáky rozdělit do dvou nejvýše čtyřčlenných skupin tak, že každý bude mít ve své skupině alespoň jednoho kamaráda.
a) Ukažte, že v případě $n = 7$ lze žáky požadovaným způsobem rozdělit.
b) Zjistěte, zda lze žáky takto rozdělit i v případě $n = 8$.
(*Tomáš Jurík*)

5. Dokažte, že nejmenší společný násobek $[a, b]$ a největší společný dělitel (a, b) libovolných dvou kladných celých čísel a, b splňují nerovnost

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab.$$

Zjistěte, kdy v této nerovnosti nastane rovnost. (*Jaromír Šimša*)

6. Je dán lichoběžník $ABCD$. Střed základny AB označme P. Uvažujme rovnoběžku se základnou AB, která protíná úsečky AD, PD, PC, BC postupně v bodech K, L, M, N.
a) Dokažte, že $|KL| = |MN|$.
b) Určete polohu přímky KL tak, aby platilo i $|KL| = |LM|$.
(*Jaroslav Zhouf*)

* * * * *

PLATÓN (427–347 př. n. l.)

Na škole měl kdysi nápis Plato:
Nevstupuj, kdo neznáš geometrii!
- V dnešní době, přesně vzato,
žádní žáci by tam nebyli!

*Emil Calda**)

*) *Úvod do obecné teorie prostoru,* Karolinum, Praha, 2003