

Rozhledy matematicko-fyzikální

Milan Krbálek

Matematický siloměr na detekci sociálních interakcí

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 90 (2015), No. 1-2, 30–38

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/146615>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2015

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

- dera, A.: Quantum walk in position space with single optically trapped atoms. *Science* **325**, 174 (2009).
- [3] Schmitz, H., Matjeschk, R., Schneider, C., Glueckert, J., Enderlein, M., Huber, T., Schaetz, T.: Quantum walk of a trapped ion in phase space. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 090504 (2009).
- [4] Schreiber, A., Cassemiro, K. N., Potoček, V., Gábris, A., Mosley, P. J., Andersson, E., Jex, I., Silberhorn, C.: Photons walking the line: a quantum walk with adjustable coin operations. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 050502 (2010).
- [5] Schreiber, A., Gábris, A., Rohde, P. P., Laiho, K., Štefaňák, M., Potoček, V., Hamilton, C., Jex, I., Silberhorn, C.: A 2D quantum walk simulation of two-particle dynamics. *Science* **336**, 55 (2012).
- [6] Childs, A. M., Gosset, D., Webb, Z.: Universal Computation by Multiparticle Quantum Walk. *Science* **339**, 791 (2013).

Matematický siloměr na detekci sociálních interakcí

Milan Krbálek, FJFI ČVUT, Praha

Abstract. Maybe you never thought of it, but during an ordinary walk in the streets, during moving on the escalator or travelator at the airport there exist between you and nearby pedestrians certain force interactions, which influence the movement of the entire group of people. Moreover, the denser traffic causes stronger interactions. In the most of the cases, however, such an interaction is not like typical physical forces. The reason is that there are no physical contacts among persons. In fact these contacts are represented by the so-called socio-physical interactions when a certain social impulse (eg. an effort to prevent the meeting with unpopular person) leads to a change of physical parameters of your route. Are such forces measurable in principal? Is it possible to describe the attraction among distant humans qualitatively? Although it seems that not, the opposite is true. Let's show you some instruments how to measure social forces.

Seznámení s problematikou

Je-li našim cílem detekce socio-fyzikálních sil uvnitř pohybující se skupiny osob, je třeba nejprve rozhodnout, které sociální systémy budou

předmětem našeho zájmu. Protože jistě nelze zkoumat všechny takové systémy jediným přístupem, vybereme v tuto chvíli pouze ty, které reprezentují nejfrekventovanější a nejzajímavější případy. Soustředíme se přitom na soubory s menším stupněm volnosti pohybu osob, kde bude detekce interakcí jistě snazší. Ideální variantou budou tedy logicky soubory jednorozměrné, nebo kvazi-jednorozměrné, které jsou reprezentovány několika paralelními jednorozměrnými systémy.

Do naší specifikace tudíž spadá následující problematika: pohyb chodců v koridoru, pohyb vozidel na jednoproudé nebo víceproudé komunikaci, pohyb osob po letištním pásovém travelátoru, či rozmístění vozidel v blízkosti řízených křižovatek. To jsou systémy, které čas od času vykazují specifické znaky saturace, kdy nadměrné množství osob (vozidel) způsobí razantní pokles toku. Tyto jevy jsou pro studium sociofyzikálních zákonitostí nejzajímavější, neboť právě při nich dochází k zesilování vlivu vzájemných interakcí. V saturovaných stavech je možné snáze rozklíčovat míru vzájemných přitažlivých či odpudivých sil mezi jednotlivými osobami (vozidly).

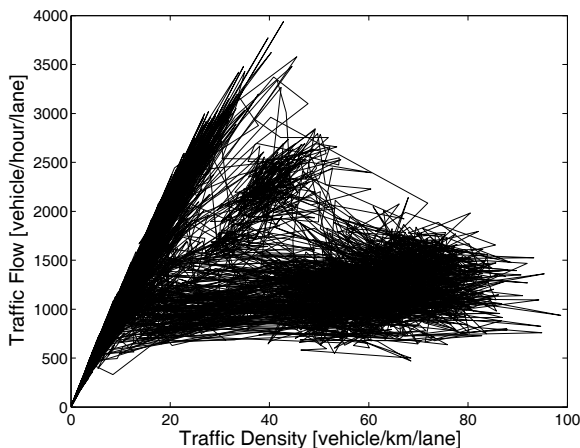
Režimy dopravního proudění

Uvažujme obecný jednorozměrný systém interagujících agentů (chodců, řidičů). Takový systém se může principiálně nacházet ve dvou stavech.

Prvním z nich je tzv. *volný režim*, kdy je zúčastněných agentů v systému menší množství, a tudíž si velmi málo brání v pohybu. Při takové konstelaci narůstá tok v systému (tj. počet agentů, kteří projdou daným místem za jednotku času) lineárně s hustotou (tj. s počtem agentů na jednotce délky). Tato fáze je pro studium agentních interakcí méně zajímavá, neboť meziagentní síly jsou v tomto případě zanedbatelné.

Naproti tomu v tzv. *synchronizovaném režimu*, kdy hustota v systému překročí jistou kritickou mez, jsou vzájemné interakce natolik převažující, že navzdory narůstající hustotě hodnota toku výrazně klesá. Objevují se jevy tzv. kongesce, lidově řečeno dopravní zácpy.

Velmi hezky jsou obě fáze zachyceny na obr. 1. Zatímco v levé části je zřetelně vyobrazena lineární závislost toku na hustotě, pro vyšší hustoty lze snadno odhalit pokles toku, ale také výraznou stochasticitu systému. Tento graf, nazývaný nejčastěji fundamentálním diagramem, je nejcharakterističtějším náhledem do dynamiky všech agentních systémů.



Obr. 1: Fundamentální diagram automobilové dopravy. Jedná se o závislost dopravního toku (Traffic Flow) na dopravní hustotě (Traffic Density).

Komplikace na úvod

Před vlastní detekcí interakčních sil je zapotřebí rozvážit, zda je náš obecný agentní soubor systémem deterministickým či statistickým. Zatímco v deterministických systémech je možno na základě znalosti interakčních schémat a počátečního rozložení částic odvodit přesný časový vývoj systému (včetně přesných lokací všech částic), ve statistických systémech tomu tak není. Ačkoliv i zde lze predikovat časový vývoj systému, tak předpovídat polohy či rychlosti jednotlivých elementů lze pouze stochasticky, tedy užitím pravděpodobnostního popisu. Pro ilustraci: deterministickým systémem je např. kámen vržený vodorovně v gravitačním poli, stochastickým systémem je systém molekul v místnosti o fixní teplotě. Zatímco v případě vodorovného vrhu jsme s to určit přesnou trajektorii kamene, pro molekuly v místnosti budeme schopni vypočítat pouze průměrné hodnoty jejich rychlostí, popř. rozptyly rychlosti.

Je tedy náš agentní soubor systémem deterministickým nebo stochastickým? Odpověď není těžké nalézt. Představme si dvacet různých řidičů (pro jednoduchost ve voze stejného typu), kteří dojíždějí k prahu křižovatky po naskočení červeného signálu. Pokud by systém vozidel byl systémem deterministickým, museli by všichni řidiči za stejných podmínek zastavit v naprosto stejné vzdálenosti od prahu křižovatky. To ale jistě nenastane. Každý řidič totiž vyhodnocuje aktuální stav individu-

álně a o dalším dění rozhoduje podle svých návyků, reakčních schopností a řídičských dovedností. Máme tedy zjevně co do činění se systémem stochastickým. To nám bohužel poněkud komplikuje cestu k vyřešení našeho úkolu.

Mikroskopický popis agentního systému

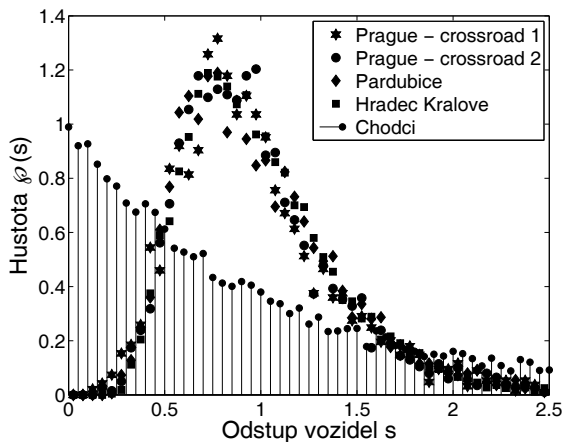
Chceme-li analyzovat socio-fyzikální síly, které jsou z podstaty zkoumané problematiky přímo neměřitelné, je třeba pro daný agentní systém nalézt určité znaky, do kterých se hledané interakční síly promítají. Otázkou tedy je, na jakých veličinách lze pozorovat změny v interakčních silách mezi agenty. V čem se například projeví, že se dva agenti vzájemně odpuzují?

Převažují-li mezi agenty silnější odpuzivé síly, pak je jisté méně pravděpodobné, že se takoví agenti vyskytnou poblíž sebe. Tedy pravděpodobnost, že jejich vzdálenost je malá, bude v porovnání se vzdálenými agenty nepatrná. Odsud už není těžké nahlédnout, že bude výhodné přejít k pravděpodobnostnímu popisu mikrostruktury agentního systému. Variant je více, ale my se zde přidržíme osvědčeného způsobu. V jedno-rozměrném systému o $N + 1$ agentech označíme vzdálenosti mezi sousedními agenty symboly s_1, s_2, \dots, s_N . Veličina $\varphi(s)$ pak bude označovat hustotu pravděpodobnosti pro vzdálenost agentů, což znamená, že integrál

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(s) ds$$

reprezentuje pravděpodobnost, že vzdálenost dvou sousedních agentů leží v intervalu (α, β) . Nutně tedy $\int_0^{\infty} \varphi(s) ds = 1$. Veličinu $\varphi(s)$ nazývá odborná literatura nejčastěji termínem *headway distribuce*. Z logiky věci je jasné, že její tvar reprezentovaný grafem funkce $y = \varphi(s)$ v sobě zrcadlí silové působení mezi agenty. Jak takový graf může vypadat? Pojďme se podívat na vybrané zástupce. Na obr. 2 je vyobrazena hustota pravděpodobnosti pro odstup vozidel čekajících na zelený signál na řízené křižovatce. Graf byl pořízen přímým měřením na křižovatkách v Praze, Pardubicích a Hradci Králové. To, že hodnoty funkce $\varphi(s)$ pro malé vzdálenosti prudce klesají, jasně potvrzuje přítomnost výrazných odpuzivých sil mezi za sebou jedoucími vozidly. Pro srovnání je na obrázku také vykresleno pravděpodobnostní rozložení odstupů mezi chodci pohybujícími se volně v úzkém koridoru. Malá hustota chodců zde způsobuje mizivé interakce, což se v grafu headway distribuce projevuje velkými

hodnotami funkce $\varphi(s)$ pro malé vzdálenosti s .



Obr. 2: Empirické hodnoty hustoty pravděpodobnosti pro vzdálenost dvou za sebou stojících vozidel čekajících na zelený signál. Měření byla prováděna na několika českých křižovatkách (viz legenda). Čarovým grafem je znázorněna hustota pravděpodobnosti pro volně se pohybující chodce.

Obecný charakter interakčních sil

Dříve než přistoupíme k samotné detekci socio-fyzikálních sil, pojďme se zamyslet nad obecnými znaky, které takové síly mají. Jedním z nich je jejich omezený dosah. To značí, že překročí-li vzdálenost mezi agenty jistou mez (označme ji s_{krit}), pak je interakční síla nulová (nebo naprosto zanedbatelná). V jednorozměrném systému musí také dosud neznámá síla garantovat neměnnost pořadí agentů. Toho lze matematicky docílit tak, že pro vzdálenosti blízké se nule poroste odpuzivá síla (tu označme symbolem $F(s)$) nade všechny meze. Další očekávanou vlastností interakčních sil je jejich spojitá závislost na vzdálenosti. U funkce $F(s)$ tedy neočekáváme na intervalu $(0, s_{\text{krit}})$ žádnou nespojitost. Poslední obecný poznatek, který síle $F(s)$ přiřkneme, je její jednoduchost. Ze zkušenosti s všeobecně uznávanými přírodními principy vyplývá, že všechny elementární síly (gravitační, elektromagnetická, tíhová atd.) jsou popsány jednoduchou matematickou závislostí na vhodné fyzikální veličině. Pro naše účely se tudíž nabízí následující jednoparametrická třída interakč-

ních sil:

$$F(s) = \begin{cases} -s^{-\alpha} & s \in (0, s_{\text{krit}}), \\ 0 & s \geq s_{\text{krit}}. \end{cases} \quad (1)$$

Pokud všechny předběžně stanovené vlastnosti skutečně korespondují s realitou agentních sil, pak mezi parametry $\alpha \in (0, +\infty)$ existuje nějaký, pro který reprezentuje předpis (1) kvantifikovanou socio-fyzikální sílu.

Jelikož je hodnota funkce $s^{-\alpha}$ pro $s \geq s_{\text{krit}}$ obtížně odlišitelná od nuly, lze s výhodou předpis (1) zjednodušit na tvar $F(s) = -s^{-\alpha}$ pro $s > 0$. Pro účely dalších výpočtů pak ještě zbývá představit interakční potenciál $\varphi(s)$, jenž funkce $F(s)$ generuje. Protože vazba mezi potenciálem a silou je popsána známým vzorcem $F(s) = -\varphi'(s)$, rozpadá se nám spektrum hodnot parametru α do následujících případů:

#	typ potenciálu	hodnota parametru	tvar potenciálu
1	mocninný	$\alpha \in (0, 1)$	$\varphi(s) = -\frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
2	logaritmický	$\alpha = 1$	$\varphi(s) = -\ln s$
3	slabý hyperbolický	$\alpha \in (1, 2)$	$\varphi(s) = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{s^{\alpha-1}}$
4	vyvážený hyperbolický	$\alpha = 2$	$\varphi(s) = \frac{1}{s}$
5	silný hyperbolický	$\alpha \in (2, +\infty)$	$\varphi(s) = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{s^{\alpha-1}}$

Fyzikální model jednorozměrného agentního plynu a jeho matematické řešení

Na základě předešlých úvah lze nyní poměrně snadno zformulovat zjednodušený fyzikální model simulující evoluci agentních systémů. Uvažujme pro jednoduchost kruhový nebo lineární systém agentů (ilustrační obr. 3), kteří se navzájem odpuzují prostřednictvím interakčního potenciálu $\varphi(s)$, který je zaveden jako tzv. krátkodosahový. To tedy znamená, že spolu přímo interagují pouze sousední agenti, tj. interakce vzdálenějších agentů je pouze zprostředkovaná. Nedeterminističnost zkoumaného systému zaručíme přítomností statistického šumu, jehož hladina bude popsána koeficientem $\beta \geq 0$, který bývá často nazýván *inverzní termodynamickou teplotou*. Nulová hodnota parametru β signalizuje maximální zašumění systému, zatímco vysoké hodnoty korespondují s výrazněji potlačeným šumem.



Obr. 3: Kruhová varianta agentního modelu. Částice reprezentují vozidla na jednorozměrné komunikaci, popř. chodce v úzkém koridoru, který neumožňuje vzájemné předcházení.

Takto definovaný agentní systém má tu velkou výhodu, že je řešitelný matematickými prostředky. S pomocí teorie integrálních transformací lze pak pro takový systém kromě jiného odvodit i analytickou predikci pro zmiňovanou headway distribuci. Ta je pro náš případ tvaru

$$\wp(s) = Ae^{-\beta\varphi(s)}e^{-Ds},$$

kde A a D jsou konstanty závislé na hodnotě parametru β . Srovnáním teoretických křivek $y = \wp(s)$ s histogramy získanými měřeními a následnou aplikací standardních statistických komparátorů lze určit, pro jaké hodnoty hledaného silového parametru α je soulad mezi teorií a realitou nejpřesvědčivější. Jak bylo prověřeno řadou dalších srovnávacích studií a jak je také ilustrováno na obr. 4, optimální hodnotou silového parametru je $\alpha = 2$. Odpuzování mezi blízkými chodci, popř. vozidly se tedy podle výše uvedených zjištění děje podle podobného principu, jako je tomu např. u dvou souhlasně nabitých těles. Zjištěná sociální repulze je totiž nepřímo úměrná kvadrátu vzdálenosti dotčených agentů v analogii s coulombovskými silami v elektromagnetických systémech či newtonovskými silami v systémech gravitačních.

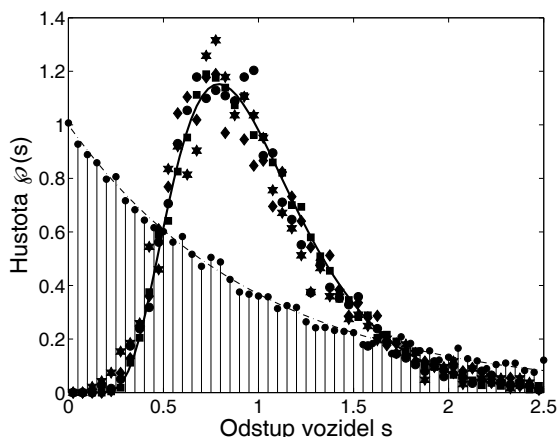
Záhada sociálních repulzí

Metody matematické detekce sociálních sil tak, jak jsme je představili v tomto článku, umožňují nahlédnout do nitra meziagentních interakcí a kvantifikovat hladinu vzájemného odpuzování mezi prostorově blízkými osobami. Poněkud překvapivým zjištěním tohoto výzkumu je fakt, že se

takové interakce dějí podle interakčního zákona

$$F(s) = -\frac{\text{konst.}}{s^2},$$

tedy že silové působení klesá právě se čtvercem vzdálenosti. Proč se sociální repulze řídí stejným pravidlem jako interakce gravitační či elektromagnetická? Je tato shoda náhodná nebo naopak představuje zákonitý důsledek jistých vazeb mezi sociálními a fyzikálními procesy? Odpověď není zcela jistě jednoduchá. Nicméně jednu úvahu si zde přece jen dovolit můžeme. Jestliže je mozek člověka z běžného fungování věcí uvyklý na jistou závislost interakčních sil, je pro něj zřejmě přirozené přenést podobné principy i do systémů sociálních. Z tohoto pohledu již není zjištění hodnoty silového parametru α natolik překvapující. Dost možná, že podobnou zákonitost jako u skupin pohybujících se osob vědci časem odhalí i u jiných přírodních systémů.



Obr. 4: Srovnání teoretických predikcí s empirickými daty vyobrazenými na obr. 2. Přerušovaná křivka představuje analytickou křivku vykreslenou pro hodnoty $\alpha = 2$ a $\beta = 0$. Naproti tomu plná křivka byla získána pro $\alpha = 2$ a $\beta = 2,32$.

Literatura

- [1] Krbálek, M., Helbing, D.: Determination of interaction potentials in freeway traffic from steady-state statistics. *Physica A* **333** (2004), s. 370–378.

- [2] Krbálek, M.: Equilibrium distributions in a thermodynamical traffic gas. *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007), s. 5813–5821.
- [3] Helbing, D., Farkas, I., Vicsek, T.: Simulating dynamical features of escape panic. *Nature* **407/6803** (2000), s. 487–490.
- [4] Krbálek, M.: Inter-vehicle gap statistics on signal-controlled crossroads. *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 205004.

Poučení nejen o Newtonových býcích

Jaromír Kukul, FJFI ČVUT, Praha

Abstract. The classical algebraic problem of three pasturelands and bulls is expressed as a simple mathematical model with unknown parameters. Then, the model is generalised for an arbitrary number of pasturelands and enriched with the rounding of the time data. This problem results in the solution of a system of linear inequations with the use of Fourier elimination method. However, the given problem can also be considered a model confronted with real data with measurement error. The article compares three ways of balancing the measurement error according to Gauss, Chebyshev and Laplace. The model of grazing down the grass is so simple that all the three ways are easy to perform algorithmically. This can be interesting for both the mathematical experts looking for the motives for their first attempts at computer programming and experienced computer programmers looking for new ways.

Slovní úlohy se zemědělskou problematikou nejsou vysloveně populární. Možná je to tím, že jejich autoři chápou uvedený obor lidské činnosti jako příliš triviální, což se odráží v zadání a posléze i v řešení. Jako nezemědělce mě nadchla stará Newtonova úloha o býcích, kteří spásali průběžně dorůstající travu. Klasik fyziky v ní ukazuje jednoduchý dynamický systém, který je možné studovat pouze algebraickými metodami. Na uvedené úloze mě nejvíce provokuje metodika určení doby vypasení veškeré trávy v ohradě a její případná chyba. Jejím rozborem se dá dospět i k pastvinám a la Fourier, Gauss, Čebyšev či Laplace.

Pastevecká slovní úloha

Traduje se, že Newton kdysi vymyslel následující slovní úlohu:

Tři býci spasou dva akry trávy za dva dny. Dva býci spasou dva akry trávy za čtyři dny. Za kolik dnů spase pět býků šest akrů trávy?