Stanislav Trávníček

Rozdělení na části

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 1, 13–18

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146650`

Rozdělení na části

Stanislav Trávníček, PřF UP, Olomouc

Abstract. In the article, we engage in this problem: We have a lot of expensive things and we need to divide them into three (or several) parts so that all the parts have the same value or the nearest value. The problem is solved by a computer program in two ways.

V článku [1] řešil pan Koumal problém, jak odnést nákup ve dvou taškách tak, aby byly stejně těžké (tedy aby rozdíl jejich hmotností byl co nejmenší), a vyřešil ho úspěšně užitím programu v článku uvedeném. Může nás samozřejmě napadnout, že by se nějak podobně měla řešit úloha pro rozdělení celku na $k > 2$ stejných dílů; uvážíme případ $k = 3$, protože pro $k > 3$ se již pak nic nového nedostane.

Pan Koumal nemá ovšem tři ruce, takže si musíme zvolit jinou praktickou interpretaci. Třeba takto: Tři sestry zdědily košík drahých kamenů (třeba v pohádce) a chtějí si je spravedlivě rozdělit. Každý kámen má stanovenou cenu, takže za spravedlivé budou považovat takové rozdělení na tři hromádky, kdy všechny budou mít stejnou hodnotu, nebo kde rozdíly budou nejmenší možné, a sestry se pak vyrovnají. Proto se rozhodly, že pověří nestranného člověka, který takové hromádky vytvoří, a ony si pak každá tu svou vylosují. Tímto úkolem pověřily právě pana Koumala, protože slyšely, že už něco podobného prováděl.

Obr. 1: Tři sestry (autorkou ilustrace je Jaroslava Palzerová)

Ten si nejprve formuloval kritérium, kdy bude považovat rozdělení za optimální: když rozdíl hodnoty nejdražší a nejlevnější hromádky bude co nejmenší (v optimálním případě to může být 0, pak by všechny tři měly stejnou hodnotu). Tento rozdíl (označený *Rozdil*) závisí na zadaných cenách $M[K]$ jednotlivých $K = 1$ až N prvků. (Samozřejmě to, že jde o ceny, není vůbec důležité; pro pohodlné srovnání s [1] je v programu ponechán pojem hmotnost a označení M.)

Pro vyřešení daného problému použijeme kromě způsobu pana Koumala (a už jej dále opusťme) ještě jiný postup, něco jako je metoda Monte Carlo, a v programu, který je zde prezentován, jsou vždy pro srovnání uvedeny výsledky obou zpracování; ne vždy se však rovnají a řekneme si proč.

Některá nastavení v programu nejsou podstatná, například omezení počtu předmětů číslem $MaxN = 15$; pro větší N se totiž doba zpracování viditelně prodlužuje.

Z praktických důvodů je v programu definováno několik procedur. Procedura *Rozloz* je základem 1. způsobu zpracování; užitím rekurze jsou postupně vytvářeny (a uloženy v indexované proměnné A) všechny N-tice nul, jedniček a dvojek (variace tří prvků s libovolným opakováním). Údaj v K-tém prvku N-tice odpovídá K-tému předmětu – číslům 0, 1, 2 odpovídá zařazení předmětu do 1., 2. nebo 3. skupiny. Tímto způsobem jsou vyčerpány všechny možnosti rozdělení souboru předmětů na tři části a výsledek takto získaný je naprosto přesný. Pokud se během práce programu vyhodnotí $Rozdil = 0$, tak se již v dalším vyšetřování nepokračuje.

Po vytvoření každé N-tice se provede procedura *Vyhodnot*. Ta nejprve zjistí úhrnnou cenu jednotlivých skupin a pak tvoří absolutní hodnoty rozdílu těchto cen pro zjištění rozdílu mezi nejdražší a nejlevnější skupinou. Poté se testuje, jestli tento největší rozdíl je menší než předchozí rozdíl (na počátku je zde nastaveno $Rozdil := 1\,000$), a v kladném případě se uloží k zapamatování nové rozdělení do skupin (*TakJeTo*), ceny skupin (S) a nastaví se nová hodnota rozdílu.

Druhý způsob řešení daného problému je založen na náhodných číslech. Je provedena posloupnost, tj. cyklus pokusů (v programu je zvoleno konstantních 10 000), v každém pokusu se užitím náhodných čísel nastaví (do A) N-tice nul, jedniček a dvojek a provede se vyhodnocení procedurou *Vyhodnot*. Opět se práce ukončí v případě získání nulového rozdílu.

V obou případech pak následuje procedura *Zaver*, která vypíše na obrazovku výsledky uvedených dvou zpracování. Výstup je řešen názorně a úsporně, aby po konečném zastavení chodu programu byl přehled po celé práci.

Na obr. 2 je znázorněn výsledek jednoho zpracování; vidíme, že výsledky obou metod jsou věcně stejné, i když rozdělení do skupin je jiné. Na obr. 3 je zachycena jiná situace.

```
Rozdělení skupiny předmětů na tři části se stejnou celkovou hmotností.

Počet předmětů (max 15): 12
Jejich hmotnosti (desetinná čísla s tečkou):

1: 2.3        2: 4.1        3: 2.0        4: 1.8        5: 3.9
6: 1.2        7: 3.5        8: 2.8        9: 0.7        10: 1.5
11: 4.3       12: 3.2

Uvažují se všechny možnosti:              Výpočet užitím náhodných čísel:

Hmotnost 1. skupiny je 10.500             Hmotnost 1. skupiny je 10.400
1 9 11 12                                 1 5 7 9
Hmotnost 2. skupiny je 10.400             Hmotnost 2. skupiny je 10.500
2 3 8 10                                  4 6 8 10 12
Hmotnost 3. skupiny je 10.400             Hmotnost 3. skupiny je 10.400
4 5 6 7                                   2 3 11
Rozdíl je 0.100                           Rozdíl je 0.100


Konec.
```

Obr. 2

```
Rozdělení skupiny předmětů na tři části se stejnou celkovou hmotností.

Počet předmětů (max 15): 12
Jejich hmotnosti (desetinná čísla s tečkou):

1: 5.22       2: 3.78       3: 1.45       4: 0.65       5: 2.44
6: 5.25       7: 4.10       8: 2.74       9: 3.14       10: 1.50
11: 3.25      12: 1.95

Uvažují se všechny možnosti:              Výpočet užitím náhodných čísel:

Hmotnost 1. skupiny je 11.820             Hmotnost 1. skupiny je 11.790
2 3 9 10 12                               5 6 7
Hmotnost 2. skupiny je 11.860             Hmotnost 2. skupiny je 11.810
1 4 8 11                                  2 4 8 9 10
Hmotnost 3. skupiny je 11.790             Hmotnost 3. skupiny je 11.870
5 6 7                                     1 3 11 12
Rozdíl je 0.070                           Rozdíl je 0.080


Konec.
```

Obr. 3

Vidíme, že výsledek použití druhého způsobu výpočtu je horší. Důvod je zcela prostý. Zatímco prvním způsobem, jak jsme si řekli, jsou probrány všechny možnosti, tak druhým způsobem je probráno sice hodně možností, ale při generování obsahu A mnoho dalších případů chybělo, a mezi nimi zřejmě i ty, které by vedly k lepšímu výsledku. Obecně lze říci, že výsledky jsou tím horší, čím je N větší a čím rozdílnější jsou zadávané hodnoty, a jsou tím lepší, čím relativně (vzhledem k N) více pokusů se vykoná. Navíc při každém novém zpracování téhož souboru můžeme dostávat různé výsledky, o čemž se lze jednoduše prakticky přesvědčit opakovaným prováděním výpočtů.

Výpis programu:

```
program NaTriX;
uses Crt;
const
  MaxN = 15;
  BNad = yellow+16*red;
  BInf = lightgreen;
  BVst = white;
  BVys = yellow;
var
  N, K, X, Y: Integer;
  Rozdil: Real;
  R,S,T: array [0..2] of Real;
  A, TakJeTo: array [1..MaxN] of Integer;
  M: array [1..MaxN] of Real;

procedure Vyhodnot;
var IV,JV: Integer;
begin
  for IV := 0 to 2 do T[IV] := 0;
  for IV := 1 to N do
    T[A[IV]] := T[A[IV]] + M[IV];
  for IV := 0 to 2 do
    R[IV] := Abs(T[IV]-T[(IV+1) mod 3]);
  for IV := 0 to 2 do
  begin
    if (R[IV]>=R[(IV+1) mod 3]) and (R[IV]>=R[(IV+2) mod 3])
      and (R[IV] < Rozdil) then
    begin
      Rozdil := R[IV];
      TakJeTo := A;
      S := T
    end
  end
end; {Vyhodnoť}
```

```
procedure Zkusme(J: Integer);
var I, II, L: Integer;
begin
  Randomize;
  L := 1;
  repeat
    I := 1;
    repeat
      A[I] := Random(3);
      Inc(I)
    until I > J;
    Vyhodnot;
    Inc(L);
  until (L>10000) or (Rozdil = 0)
end; {Zkusme}

procedure Rozloz(J: Integer);
var I, II: Integer;
begin
  if J>0 then
  begin
    A[J] := 0;
    Rozloz(J-1);
    A[J] := 1;
    Rozloz(J-1);
    A[J] := 2;
    Rozloz(J-1)
  end
  else
  begin
    Vyhodnot;
    if (Rozdil = 0) then Exit
  end
end; {Rozlož}

procedure Zaver(Z: Integer);
var M, L: Integer;
begin
  GotoXY(2+35*Z,11);
  TextAttr := BInf;
  if Z = 0 then Write('Uvažují se všechny možnosti:')
  else Write('Výpočet užitím náhodných čísel:');
  TextAttr := BVys;
```

```
  for M := 0 to 2 do
  begin
    GotoXY(1+35*Z,13+2*M);
    Write(' Hmotnost ',M+1,'. skupiny je ',S[M]:0:3);
    GotoXY(1+35*Z,13+2*M+1);
    for L := 1 to N do
      if TakJeTo[L] = M then Write(' ',L);
  end;
  GotoXY(1+35*Z,13+2*M+2);
  Write(' Rozdíl je ',Rozdil:0:3)
end; {Zaver}

begin {program}
  ClrScr;
  WriteLn; TextAttr := BNad;
  Write('Rozdělení skupiny předmětů ');
  WriteLn('na tři části se stejnou celkovou hmotností.');
  WriteLn;
  TextAttr := BVst;
  Write('Počet předmětů (max ',MaxN,'): ');
  ReadLn(N);
  WriteLn('Jejich hmotnosti (desetinná čísla s tečkou): ');
  for K := 1 to N do
  begin
    X := 12*((K-1) mod 5)+2; Y := 7+((K-1) div 5);
    GotoXY(X,Y);
    Write(K,': '); ReadLn(M[K]);
  end;
  TextAttr := BVys;
  Rozdil := 1000;
  Rozloz(N);
  Zaver(0);
  Rozdil := 1000;
  Zkusme(N);
  Zaver(1);
  TextAttr := BInf; GotoXY(2,22);
  WriteLn('Konec.');
  ReadLn
end. {program}
```

Literatura

[1] Trávníček, S.: Rozdělení napůl. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, **87** (2012), č. 3, str. 18–22.