Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 1, 56–60

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146659`

NAŠE SOUTĚŽ

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

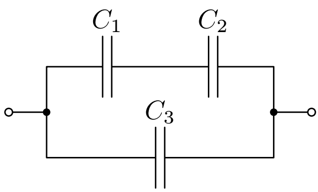
Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *30. června 2016* na adresu redakce.

Úloha 53. Vně nad stranami BC a AC trojúhelníku ABC jsou sestrojeny čtverce $CBDE$ a $ACFG$. Dokažte, že délka úsečky EF je rovna dvojnásobku velikosti těžnice příslušné vrcholu C trojúhelníku ABC.

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 54. *Kondenzátory*

Na obrázku je znázorněno schéma zapojení kondenzátorů. Celková kapacita soustavy je $C = 2{,}6\ \mu$F, kapacita prvního kondenzátoru je $C_1 = 1\ \mu$F. Dojde-li k probití kondenzátoru C_2, vzroste celková kapacita soustavy na $C' = 3\ \mu$F. Určete kapacity kondenzátorů C_2, C_3. Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.



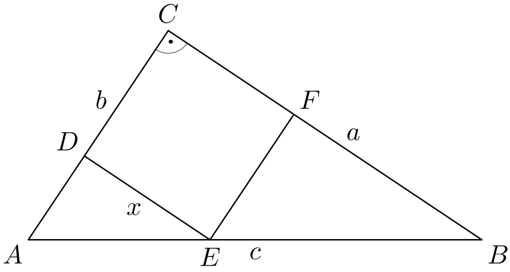
(*Miroslava Jarešová*)

Řešení úloh z čísla 1-2/2015

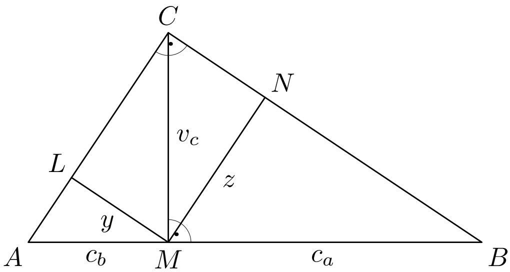
Úloha 47. Pravoúhlému trojúhelníku ABC je vepsán čtverec $CDEF$ tak, že bod E leží na přeponě AB. Dále je mu vepsán pravoúhelník $CLMN$ tak, že M je pata výšky z bodu C, L je pata výšky na stranu AC z bodu M a N je pata výšky na stranu BC z bodu M. Dokažte, že obsah pravoúhelníku $CLMN$ není větší než obsah čtverce $CDEF$. V jakém pravoúhlém trojúhelníku nastane rovnost obou obsahů?

(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Označme $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, $x = |DE|$, $c_b = |AM|$, $c_a = |BM|$, $v_c = |CM|$, $y = |LM|$, $z = |NM|$.



Obr. 1



Obr. 2

Trojúhelníky ABC a EBF (obr. 1) jsou podobné, takže platí

$$\frac{x}{a-x} = \frac{b}{a},$$

odkud

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Trojúhelníky AML a ACM (obr. 2) jsou podobné a rovněž trojúhelníky MBN a CBM (obr. 2) jsou podobné, takže platí

$$\frac{y}{c_b} = \frac{v_c}{b}, \qquad \frac{z}{c_a} = \frac{v_c}{a},$$

odkud

$$y = \frac{c_b v_c}{b}, \qquad z = \frac{c_a v_c}{a}.$$

Dokážeme, že $x^2 \geq yz$. Použijeme následující posloupnost ekvivalentních úprav:

$$\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 \geq \frac{c_a c_b v_c^2}{ab}$$

$$\left(\frac{cv_c}{a+b}\right)^2 \geq \frac{v_c^2 v_c^2}{cv_c}$$

$$c^3 \geq v_c(a+b)^2$$

$$c^4 \geq cv_c(a+b)^2$$

$$\left(a^2+b^2\right)^2 \geq ab(a+b)^2$$

$$a^4 + b^4 \geq a^3 b + ab^3$$

$$a^3(a-b) - b^3(a-b) \geq 0$$

$$\left(a^3 - b^3\right)(a-b) \geq 0$$

$$(a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right) \geq 0$$

Z poslední nerovnosti je vidět, že rovnost nastane, právě když je $a = b$, tj. právě když pravoúhlý trojúhelník ABC je rovnoramenný.

Úloha 48. *Zjišťování polohy družice*

Umělá družice Země prolétá nad Novosibirskem, když je tam přesně 19:00 hodin. Když prolétá nad Moskvou, je tam přesně 18:00 hodin. Určete polohu místa na povrchu Země, nad nímž družice proletí, když bude v Praze 19:00 hodin, popř. 20 hod 30 min.

Pokyny pro řešení:

V uvedených místech platí pásmový čas. K řešení úlohy si zaveďte tzv. *světový čas* podle hvězdárny v Greenwichi. Úlohu řešte pomocí mapy nebo glóbusu a určete předem přesný místní čas. (*Ivo Volf*)

Autorské řešení:

Všechny časové údaje převedeme na údaje ve světovém času. Rozdíl pásmových časů Greenwich–Praha je 1 h, Praha–Moskva 2 h, Praha–Novosibirsk 6 h. Družice tedy prolétá nad Novosibirskem ve 12:00 h světového času, nad Moskvou v 15:00 h světového času.

Máme zjistit, nad kterým místem bude družice v 18:00 h a v 19:30 h světového času. Moskva a Novosibirsk leží přibližně na téže rovnoběžce (55° s. š.), Moskva na 38° v. d., Novosibirsk na 83° v. d., zeměpisné délky se liší o 45°. Za 3 hodiny vykoná Země $\frac{1}{8}$ otočky kolem své osy; ve vztažné soustavě spojené se Sluncem a hvězdami bude tedy Moskva v 15:00 h světového času tam, kde byl Novosibirsk ve 12:00 h světového času. To znamená, že za 3 h vykoná družice celistvý počet n otáček.

Pro $n = 1$ má družice dobu oběhu $T_1 = 180$ min, pro $n = 2$ dobu oběhu $T_2 = 90$ min. Nemůže být $n > 2$, protože minimální doba oběhu (kdyby se družice pohybovala těsně u povrchu Země) je

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\kappa M}} \doteq 83{,}5 \ \mathrm{min}\,,$$

kde $R = 6{,}378\cdot 10^6$ m, $\kappa = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$, $M = 5{,}975\cdot 10^{24}$ kg. V obou případech bude družice v 18:00 h světového času nad místem, jež je dáno souřadnicemi 55° s. š., $(38° - 45°)$ v. d. $= -7°$ v. d. $= 7°$ z. d.

V 19 h 30 min světového času se první družice nachází nad místem o souřadnicích 55° j. š., $(7° + 22{,}5° - 180°)$ z. d. $= 15{,}5°$ v. d., druhá nad místem o souřadnicích 55° s. š., $(7° + 22{,}5°)$ z. d. $= 29{,}5°$ z. d.

Stav soutěže po 48 soutěžních úlohách

Michal Zelina (GChD Zborovská, Praha 5) – 44 bodů
Zuzana Procházková (GChD Zborovská, Praha 5) – 34 bodů
Matyáš Grof (GChD Zborovská, Praha 5) – 33 bodů
Stanislav Boula (GChD Zborovská, Praha 5) – 32 bodů
Daniel Pišťák (GChD Zborovská, Praha 5) – 31 bodů
Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 bodů
Daniel Borák (GChD Zborovská, Praha 5) – 26 bodů
Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Vladimír Boček (GChD Zborovská, Praha 5) – 25 bodů
Martin Raszyk (G, Karviná) – 20 bodů
Jiří Braný (GChD Zborovská, Praha 5) – 18 bodů

Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 bodů
Marian Poljak (G, Přerov) – 15 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů
Jan Bien (GChD Zborovská, Praha 5) – 12 bodů
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Oskar Marelja (GChD Zborovská, Praha 5) – 11 bodů
Jan Kučera (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů
Tadeáš Kučera (G kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů
Ondřej Motlíček (G Šumperk) – 10 bodů
Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 bodů
Ester Sgallová (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů
David Bainak (G kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů
Libor Drozek (G, Holešov) – 9 bodů
Vilém Sklenář (GChD Zborovská, Praha 5) – 9 bodů
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Adam Láf (GChD Zborovská, Praha 5) – 7 bodů
Tomáš Pavlín (G Parléřova, Praha 6) – 7 bodů
Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů
Veronika Hladíková (G Radotín, Praha 5) – 5 bodů
Mark Karpilovský (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 bodů
Jakub Löwit (G Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 bodů
Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 bodů
Martin Sýkora (G Nad Alejí, Praha 6) – 5 bodů
Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 bodů
Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 bodů
Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 bodů
Jakub Vančura (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Jiří Guth (G Jírovcova, České Budějovice) – 3 body
Stanislav Taborovec (GChD Zborovská, Praha 5) – 3 body
Matěj Kukula (GChD Zborovská, Praha 5) – 2 body
Stanislav Gackowski (GChD Zborovská, Praha 5) – 1 bod
Václav Skála (G, Klatovy) – 1 bod
Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 bod
Tomáš Vajda (GChD Zborovská, Praha 5) – 1 bod