Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Zdeněk Halas

Poznámky k axiomatizaci planimetrie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 63 (2018), No. 1, 51–67

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147209`

Poznámky k axiomatizaci planimetrie

Zdeněk Halas

Abstrakt. Axiomatická metoda je považována za hlavní metodu, kterou je dnes matematika formalizována. Není však jedinou, navíc prošla v průběhu tisíciletí poměrně pestrým vývojem. V tomto příspěvku se pokusíme na základě charakterizace různých typů formalizace matematiky zařadit nejznámější pokusy o axiomatizaci eukleidovské geometrie, zejména Eukleidův, Hilbertův a Birkhoffův.

1. Různé typy axiomatizace

Axiomatická metoda prošla od prvních pokusů o axiomatizaci jednotlivých matematických disciplín ve starověkém Řecku po současnost třemi vývojovými stadii. Bez jejich charakterizace nelze dobře porozumět prvnímu dochovanému pokusu Eukleidovu ani pozdějšímu vývoji ani axiomatickým systémům či souborům předpokladů, z nichž vycházelo vyučování školské geometrie ve 20. století a vychází i dnes. Těmito stadii vývoje axiomatické metody jsou (viz např. [5], [6], [14]):

1. obsahová axiomatizace,
2. poloformální axiomatizace,
3. formální axiomatizace.

V každé z těchto fází vývoje bylo také jiné pojetí pravdy v matematice, tj. měnila se kritéria toho, co považujeme v matematice za pravdivé. Uveďme tedy stručné charakterizace těchto vývojových fází.

1.1. Obsahová axiomatizace

V prehistorickém období se postupně začaly hromadit různorodé poznatky a utvářet základní aritmetické a geometrické pojmy. Vycházelo se zejména z potřeb praxe. Z doby historické (Egypt, Mezopotámie, Čína, Indie) pak máme dochovány texty, v nichž lze tento vývoj dále pozorovat. Jedná se zejména o sbírky řešených úloh užívané v písařských školách. V těchto úlohách se vyskytují objekty, které vznikly abstrakcí přímo z praxe (obdélník, lichoběžník, kruh, zlomky, ...). Tyto objekty se samy staly předmětem zkoumání, které bylo stále více založeno na deduktivních úvahách na úkor empirických procedur (např. pozorování, analogie, neúplná indukce).

Jak dochází k axiomatizaci tohoto rodícího se teoretického systému? Po *empirickém stádiu* nastupují opakující se a prolínající se *fáze analytická* (hledání počátků vznikající teorie) a *fáze syntetická* (odvozování výsledků z počátků). Postupně tak vznikají abstraktnější a základnější pojmy *bod, přímka, rovina* a základní tvrzení,

Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: halas@karlin.mff.cuni.cz

z nichž vyplývají složitější výsledky získané dříve empiricky, i výsledky zcela nové. Postupně jsou odvozeny i výsledky, které jsou za hranicemi empirické ověřitelnosti (např. existence nesouměřitelných úseček), a objevují se pojmy, jež vznikly abstrakcí z abstrakcí, takže v nich už není možno oddělit ty aspekty, které jsou odrazem vlastností a vztahů reálného světa, od aspektů, které vznikly vícenásobnou abstrakcí.

Naznačeným způsobem může vznikat tzv. *obsahový axiomatický systém.* Charakteristické pro něj je, že bezprostředně vychází z konkrétního obsahu, který formalizuje a je s ním úzce svázán.

Velmi pěkně to shrnul Moritz Pasch ve svých *Přednáškách o novější geometrii*[1], viz [18]: *Když vyloučíme věty a poučky opřené o důkazy, zůstane skupina vět, z nichž můžeme odvodit všechny ostatní. Jsou to základní věty založené bezprostředně na pozorování... Základní věty mají úplně shrnout empirický materiál určený ke zpracování v matematice tak, abychom se již nemuseli po jejich stanovení vracet zpět ke smyslovým vjemům.* Primitivní pojmy Pasch považoval za odpozorované z přírody: *Základní pojmy nejsou definovány, žádná definice není schopna nahradit ten prostředek, který jediný otevírá cestu k poznání a pochopení jednoduchých pojmů nepřeveditelných na jiné; tento prostředek je odkázání se na vhodné objekty z přírody...*

Jaké by měl mít obsahový axiomatický systém vlastnosti? Měl by být dostatečně:

- „obsahový“, tj. dostatečně přesně popisující skutečnost, aby bylo možno deduktivně odvodit všechny podstatné výsledky objevené empiricky,
- abstraktní, aby bylo možno deduktivně odvodit všechny podstatné matematické výsledky,
- obecný, aby bylo možno deduktivně odvodit i další výsledky, které nejsou známy z empirické fáze.

Moritz Pasch považoval ve svých *Přednáškách o novější geometrii* axiomy za evidentní: *Charakter nejvyšší spolehlivosti matematiky je dán nepopiratelností důkazů, jimiž se převádějí věty na axiomy, ve spojení s evidentností těchto axiomů, které jsou zaručeny nejjednodušší zkušeností.*

Evidentnost axiomů však není tak zřejmá, jak by se mohlo na první pohled zdát. Snadno můžeme nalézt příklady axiomů, které jsou méně evidentní, než některá tvrzení z nich odvozená. Známý je příklad z eukleidovské geometrie: věta, která tvrdí, že za jistých předpokladů se dvě kružnice protínají ve dvou různých bodech, je evidentnější než axiom spojitosti použitý při jejím důkazu. Podobně komutativita sčítání v $\mathbb{N}$ je evidentnější než princip matematické indukce, na němž je tento důkaz založen. Také samotný pátý Eukleidův postulát může posloužit jako příklad neevidentního axiomu, po více než 2 000 let se jej matematikové pokoušeli dokázat.

Obsahová axiomatizace je stále živá ve školním vyučování. Žáci se tak mohou opírat o své zkušenosti s reálným světem, čímž matematika nabývá na názornosti. Na vhodnost tohoto přístupu ve školské matematice opakovaně upozorňuje např. F. Kuřina,

[1] Moritz Pasch (1843–1930) se zde jako první pokusil sestavit soubor axiomů, který by neobsahoval mezery pozorovatelné v Eukleidových postulátech. Viz též [20, s. 134–135]. Jeho soubor axiomů planimetrie a stereometrie je ukázkou obsahové axiomatizace.

viz např. kniha [15]; v této souvislosti hovoří o tzv. přirozeném přístupu a za dobrý příklad uvádí knihu Hadamardovu [10].

S postupujícím matematickým vzděláním pak ubývá prvků obsahovosti a přibývá formalizace. Nejedná se pouze o zpřesňování jednotlivých definic, vět a důkazů, ale o podstatně jiný přístup k matematice, jak uvidíme v následující kapitole.

1.2. Poloformální axiomatizace

Zatímco obsahová axiomatizace je vázána na reálný svět (či jiný obsah), který se snaží s jistou mírou abstrakce formalizovat, poloformální axiomatizace jde o krok dále: vychází z více modelů, které postihuje. Primitivní pojmy implicitně vymezené pomocí axiomů jsou vyjádřeny pomocí proměnných. Axiomy se tak stávají formou s proměnným obsahem, čímž je vzniklá teorie otevřena různým interpretacím. Konkrétní interpretace pak vzniká volbou konkrétních objektů, relací a operací, které vyhovují všem axiomům dané teorie.[2] Interpretací je také zajištěna bezespornost poloformálního axiomatického systému, neboť existuje-li jeho interpretace, model, lze podmínky dané axiomy naplnit, uskutečnit. A co je uskutečnitelné, to považujeme za bezesporné. Srozumitelně to shrnul H. Poincaré ve své knize [19, s. 195]:

Abychom dokázali bezespornost matematického objektu, je třeba efektivně sestrojit předmět splňující definici. Uvažujme implicitní definici[3] *pojmu A. Ukážeme-li, že všechny axiomy jsou pravdivé pro konkrétní předmět B, pak je pojem A zdůvodněn a B je příkladem pojmu A. My pak budeme přesvědčeni, že axiomy jsou bezesporné, neboť existuje oblast, v jejímž rámci jsou pravdivými výroky.*

Klasickým příkladem poloformálního axiomatického systému je Hilbertova axiomatizace eukleidovské geometrie, jak ji předložil v [13]. Důkaz bezespornosti David Hilbert provedl převedením primitivních pojmů a relací do řeči analytické geometrie (např. relaci bod (x, y) náleží přímce vyjádřil rovnicí $ux + vy + w = 0$, kde u, v nejsou zároveň nulové), čímž bezespornost geometrie převedl na problém bezespornosti aritmetiky. Tato relativnost je pro poloformální axiomatické systémy charakteristická, zastavíme se u ní také při rozboru pravdivosti matematických teorií.

Logika se u poloformální axiomatizace užívá intuitivně, pravidla odvozování nejsou explicitně vymezena. Podobně je implicitně užívána teorie množin. Axiomy se totiž vztahují k množině primitivních pojmů (například v Hilbertově axiomatice geometrie se jedná o množinu všech bodů, přímek, rovin), mezi nimiž jsou zavedeny primitivní relace, což jsou také jisté množiny. Poloformální axiomatika mohla proto vzniknout až poté, co byly jednotlivé matematické disciplíny založeny na teorii množin.

1.3. Formální axiomatizace

Formální axiomatizací nějaké matematické teorie rozumíme teorii, jejíž jazyk je přesně vymezen abecedou – souborem znaků a symbolů používaných v této teorii. Znaky jsou základními stavebními kameny *termů* a *formulí*, z nichž jsou sestaveny výroky, jež prohlásíme za pravdivé – *axiomy*.

---

[2] Připomeňme v této souvislosti zavedení pojmů grupa či vektorový prostor. Poloformální axiomatizace našla v algebře široké uplatnění. V celých rozsáhlých odvětvích matematiky je možno vypozorovat různé struktury, podle nichž lze tato odvětví uspořádat. Poloformální axiomatizace se stala mimo jiné základním nástrojem strukturalismu.

[3] Implicitní definicí se rozumí, že daný pojem je vymezen soustavou axiomů.

Termy jsou tvořeny pomocí funktorů (n-árních operací) a formule pomocí primitivních predikátů. Definice termů i formulí jsou konstruktivní (viz dále o genetické metodě). Například formální aritmetika přirozených čísel obsahuje znaky pro individuální proměnné $(m, n, \dots)$, znaky pro binární funktory $(+, \cdot)$ a unární funktor $(')$ a znak pro primitivní predikát $(=)$.

Kleene ve své knize [14] shrnuje: *Znaky jsou konečné objekty a nesmí sloužit k označování něčeho, co je od nich odlišné. Matematik hledí na ně, ale ne přes ně, ne na to, co je za nimi; jsou to objekty bez interpretace, bez významu.*

K formalizovanému systému je třeba kromě abecedy a axiomů ještě zvolit systém *odvozovacích pravidel*. Obvykle se volí klasický predikátový kalkul. Formální matematický důkaz je pak konečnou posloupností formulí, z nichž každá je buď axiomem, nebo je vyvozena z předchozích formulí pomocí odvozovacích pravidel.

1.4. Vlastnosti souboru axiomů

Ne každý soubor tvrzení tvoří axiomatický systém. Klíčovou vlastností axiomatického systému je *konzistence*, tj. ze souboru axiomů nesmí být možné odvodit tvrzení, které by bylo v rozporu s kterýmkoli z axiomů. Konzistenci však obecně neumíme prokázat. Můžeme však předložit nějaký model dané soustavy axiomů, tj. primitivním pojmům přiřadíme význam tak, že pro ně axiomy dané soustavy platí. Tím se ukáže, že soustava axiomů je konzistentní, je-li konzistentní model. Dokážeme tak alespoň *relativní konzistenci.*

Tímto způsobem například dokázal Beltrami roku 1868, že hyperbolická geometrie je konzistentní, je-li konzistentní geometrie eukleidovská, neboť vytvořil model hyperbolické geometrie na tzv. pseudosféře, ploše se zápornou konstantní křivostí.

Od axiomů dané soustavy často očekáváme, že jsou *nezávislé*, tj. že žádný axiom není možno odvodit z axiomů ostatních. Požadavek nezávislosti sice není nutný, často však jeho naplnění očekáváme. Výjimkou mohou být například axiomatické systémy sestavené pro účely vyučování, kdy přidání některých závislých tvrzení do axiomatického systému může značně usnadnit vybudování dané disciplíny. Příkladem je axiomatizace geometrie sestavená skupinou SMSG, o níž se zmiňujeme v úvodu kapitoly o Birkhoffově axiomatizaci planimetrie.

Nezávislost lze dokázat tak, že vytvoříme model vycházející ze všech axiomů, z nichž jeden je nahrazen svou negací. Dostaneme-li teorii odlišnou od původní, je zřejmé, že je tento axiom na ostatních nezávislý. Pokud by byl závislý, byla by soustava obsahující jeho negaci nekonzistentní. Tento postup je nutno provést pro každý jednotlivý axiom z dané soustavy. Takto byla dokázána nezávislost pátého Eukleidova postulátu: nahrazením jeho negací[4] vznikla neeukleidovská geometrie.

[4] Existenci rovnoběžek lze dokázat bez použití pátého Eukleidova postulátu: *Každým bodem B, který neleží na dané přímce p, lze vést alespoň jednu přímku q, která s přímkou p nemá společný bod, leží však v téže rovině jako přímka p.* Otázku jednoznačnosti však nelze pouze v rámci absolutní geometrie (tj. geometrie, která se od eukleidovské liší vynecháním pátého Eukleidova postulátu) rozřešit. Přijmeme-li tedy, že taková přímka existuje právě jedna (pátý Eukleidův postulát), dostaneme eukleidovskou geometrii. Druhou možností je postulovat negaci pátého Eukleidova postulátu, tj. že takových přímek existuje více, čímž vznikne geometrie Lobačevského (hyperbolická). Vzhledem k tomu, že více možností není, domníval se Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856), že prostudováním obou případů uzavře celou teorii, kterou považoval za definitivní *pangeometrii*. Podrobněji o neeukleidovských geometriích viz např. [8].

Úplnost soustavy axiomů je protipólem nezávislosti. Říkáme, že konzistentní soubor axiomů je úplný, pokud k němu není možné připojit žádný další nezávislý axiom, který je navíc s tímto souborem konzistentní. Je-li tedy soubor axiomů úplný, tak lze každé tvrzení v této teorii buď dokázat, nebo vyvrátit.

K důkazu úplnosti lze s výhodou použít *kategoričnosti* dané soustavy axiomů. Říkáme, že axiomatický systém je kategorický, jsou-li každé dva jeho modely izomorfní. Kategoričnost nežádáme zdaleka od každého axiomatického systému. Například axiomy oboru integrity kategorické nejsou, neboť jim vyhovuje nejen množina celých čísel, ale i čísel racionálních, reálných a komplexních (se standardním sčítáním a násobením) nebo množiny polynomů $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ či $\mathbb{C}[x]$ a další. Zde je výhodou *víceznačnost* systému.

Jiná situace nastává, pokud k zadanému systému axiomů neexistují žádné objekty, které by mu vyhovovaly. Takový soubor axiomů není konzistentní a hovoříme o *prázdném* axiomatickém systému.

2. Pravdivost matematických teorií

Uvažujme nyní, v jakém smyslu jsou výsledky matematických teorií pravdivé, jaká jsou kritéria jejich pravdivosti. Korespondují výsledky s tím, co pozorujeme v reálném světě? Pak hovoříme o tzv. *korespondenční pravdivosti.* Existuje-li model, v němž jsou výsledky pravdivé, tak se jedná o tzv. *sémantickou pravdivost.* Pokud za pravdivé považujeme výsledky deduktivně odvozené na základě zvolených pravidel z daného souboru axiomů, tak hovoříme o tzv. *syntaktické pravdivosti.*

Tato pojetí pravdivosti v matematice jsou spojena s přístupy k axiomatizaci matematických disciplín, jak je naznačeno v tabulce. Podrobněji je o těchto souvislostech pojednáno v [6].

obsahová axiomatizace	$\longrightarrow$	korespondenční pravdivost
poloformální axiomatizace	$\longrightarrow$	sémantická pravdivost
formální axiomatizace	$\longrightarrow$	syntaktická pravdivost

Zastavme se ještě u sémantické pravdivosti, jež je spojena s poloformální axiomatizací. Na příkladě Hilbertovy axiomatizace geometrie jsme viděli, že důkaz její bezespornosti je založen na převedení na problém bezespornosti aritmetiky. Sémantická pravdivost je tedy relativní, neboť je garantována jinou poloformální teorií – méně obecnou a méně abstraktní, v níž se axiomy původní poloformální teorie stávají odvoditelnými větami.

3. Genetická metoda

Jak jsme již uvedli, ve formálním axiomatickém systému jsou primitivní pojmy specifikovány pouze pomocí vztahů (axiomů), čímž dostaneme soustavu *abstraktních* objektů. Při tomto postupu však nemusí být zřejmé, že je soustava axiomů konzistentní.[5] Je tedy třeba ověřit, zda soustava výchozích objektů není prázdná. To je možno provést konstruktivně.[6]

[5] Příkladem může být axiomatické zavedení množiny reálných čísel jako spojitě uspořádaného pole.

[6] Například lze postupně vybudovat z množiny přirozených čísel množinu čísel celých a následně racionálních. Pak je možno reálná čísla zavést pomocí Dedekindových řezů, desetinných rozvojů, nebo cauchyovských posloupností racionálních čísel.

Dostáváme se tak k další metodě, která je hojně využívána k výstavbě matematických teorií. Upozornil na ni David Hilbert ve svém článku [12]. Jedná se o *genetickou metodu*, která vychází z prvotních přítomných objektů, z nichž se danými procedurami vytvářejí všechny další objekty. Odpadá tak problém jejich existence, neboť za existující objekty se považují právě ty, které lze zkonstruovat. O genetické metodě je pojednáno např. v [14, od s. 26], a [5, s. 31–33].

Na genetickou metodu se můžeme dívat jako na protipól metody axiomatické. Na počátku každé teorie totiž stojí prvotní objekty a jejich vlastnosti. Zatímco v axiomatické metodě vycházíme z vlastností (axiomů), které popisují blíže neurčené objekty, v genetické metodě nejprve vytvoříme objekty pomocí zvolených procedur.

Ilustrujme použití genetické metody na známém postupu zavedení přirozených čísel. Mějme jeden prvotní objekt, označme jej například 0, a proceduru $'$, která z každého objektu n vytvoří (jeden) další objekt n' (jeho následníka). Dostáváme tak objekty:

$$0,\quad 0',\quad 0'',\quad 0''',\quad 0'''',\quad 0''''',\quad \dots$$

Tento postup můžeme shrnout do tří kroků:

1. 0 je přirozené číslo.

2. Je-li n přirozené číslo, pak také n' je přirozené číslo.

3. Přirozenými čísly jsou pouze objekty vytvořené v krocích 1 a 2.

V této induktivní definici ještě chybí explicitní vyjádření předpokladu různosti objektů, které byly vytvořeny různými způsoby. V každém kroku totiž chceme vygenerovat nový prvek. Induktivně tak zavedeme nový predikát $=$ pomocí následujících podmínek.

4. Pro každé přirozené číslo n platí, že $n' \neq 0$.

5. Pro každá přirozená čísla m, n platí $m' = n'$ právě tehdy, když $m = n$.

Vidíme, jak se opakováním základní procedury $'$ vytvářejí z prvotního objektu všechny další objekty. Tyto objekty bychom však vytvářeli zbytečně, kdybychom neměli možnost o nich získávat pravdivá tvrzení. K tomu nám poslouží zavedení dalších predikátů a zejména operací. Predikát $<$ lze zavést snadno: procedurou $'$ je přirozeně dáno uspořádání přirozených čísel. Operaci $+$ zavedeme pomocí rekurze:

a) $n + 0 = n$ pro každé přirozené číslo n,

b) $(n + m)' = n + m'$ pro každá dvě přirozená čísla m, n.

Nyní již lze dokázat komutativitu a asociativitu sčítání, zavést pomocí rekurze násobení (existuje jediná operace na $\mathbb{N}$ taková, že pro každá dvě $m, n \in \mathbb{N}$ platí: $n \cdot 0 = 0$, $n \cdot m' = n \cdot m + n$), dokázat asociativitu, komutativitu a distributivitu násobení, a následně odvozovat všechny podstatné věty aritmetiky přirozených čísel.

V konstrukci je také možno pokračovat, čímž vzniknou postupně čísla celá, racionální, reálná, komplexní. Významným a všeobecně uznávaným konstitutivním prvkem je zde *princip permanentnosti*[7], kdy při rozšiřování nějakého pojmu a při zobecňování požadujeme zachování co nejvíce vlastností původních objektů. Například při rozšiřování pojmu čísla vycházíme z požadavku zachování vlastností sčítání a násobení (komutativní, asociativní a distributivní zákon). Tyto vlastnosti jsou pak fixovány v axiomech komutativního tělesa (pole).

Pro některé směry (intuicionizmus, konstruktivizmus) se genetická metoda stala základní metodou. Při budování matematické teorie pak nemusíme na začátku předpokládat existenci jisté dané množiny objektů, které vyhovují daným podmínkám (axiomům).

Myslím, že budování některých matematických teorií genetickou metodou může být inspirací i pro vyučování matematice. Považuji za příjemnější si objekty svého zkoumání sestrojit, než je mít určeny zdánlivě arbitrární soustavou podmínek. Navíc je také lépe patrné, jakými objekty byly tyto podmínky inspirovány; zajímavé je také sledovat samotný postup formalizace objektů. Po získání zkušeností v dané teorii je pak snazší přejít k její formalizaci axiomatickou metodou.

V následujících kapitolách se podíváme na tři axiomatizace planimetrie. První je čerpána z Eukleidových *Základů* (I. kniha), druhá je známá Hilbertova axiomatizace geometrie, která je klasickým příkladem poloformální axiomatizace. Poslední je ukázkou axiomatizace planimetrie, v níž se předpokládá znalost reálných čísel, čímž dochází k redukci soustavy axiomů na pouhé čtyři axiomy.

4. Formalizace planimetrie v I. knize Eukleidových *Základů*

V této kapitole nejprve uvedeme komentáře k Eukleidově formalizaci planimetrie, k definicím, postulátům a axiomům. Pokusíme se také ukázat, že Eukleidovu formalizaci geometrie není možno považovat za axiomatický systém (obsahová axiomatizace), ale jeho postup je kombinován s genetickou metodou, neboť obsahuje elementy konstruktivního přístupu. Následně shrneme definice (úzký výběr), obecné principy a postuláty, abychom čtenáři usnadnili orientaci v Eukleidově soustavě.

4.1. Deduktivní budování teorií v antice

V antické matematice postupně sílily snahy o uspořádání nahromaděných výsledků jednotlivých disciplín. Dělo se tak soustavnou aplikací požadavku, aby byl každý výsledek řádně odvozen na základě jednodušších tvrzení. Vznikla tak soustava vycházející z nejjednodušších názorných tvrzení (axiomy) a z nich postupně odvozovaných vět, přičemž všechny používané pojmy musely být předem definovány.

Tento postup později popsal Aristotelés ve svém spisu *Druhé analytiky*, kde uvádí, že každá deduktivně budovaná disciplína má vycházet z *prvotních principů*, jimiž jsou:

- *definice* (horoi),
- *obecné principy* (koinai ennoiai, axiómata, koinai archai) – předpoklady společné všem matematickým disciplínám,

[7] Jako první jej zformuloval německý matematik Hermann Hankel (1839–1873) roku 1867 v práci *Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze*.

- *postuláty* (aitémata, idiai archai) – předpoklady jedné matematické disciplíny odpovídající dnešním axiomům.

Tomuto členění odpovídá postup na začátku první knihy Eukleidových *Základů*.

U Aristotela nacházíme ještě jednu klasifikaci počátků (archai), která je bližší našemu pojetí axiomatické metody:

- *počátky, z nichž* se dokazuje (odpovídají dnešním axiomům),

- *počátky, o nichž* se dokazuje (dnešní primitivní pojmy, prótoi horoi).

V antice deduktivně budovaná disciplína vypovídá o reálném (i když idealizovaném) světě. Axiomy a postuláty tedy musejí mít v tomto světě základ, axiomatizace je proto obsahová, nikoli poloformální, je totiž neodmyslitelně spojena se svým modelem.

Axiomaticky postupovali jen někteří antičtí matematikové. Mezi nimi vynikali zejména Eukleidés z Alexandrie, Archimédés ze Syrákús a Apollónios z Pergé. Jiné přístupy k matematice se odrážejí například ve spisech Héróna, Diofanta, Níkomacha či Pappa.

V následujících odstavcích se zastavíme u definic a axiomů. Obě tyto kapitoly budou mít stejnou strukturu: nejdříve okomentujeme antický přístup (založený na Aristotelovi a první knize Eukleidových *Základů*), dále se stručně zastavíme u Hilbertovy axiomatizace geometrie a nakonec se zmíníme o některých důsledcích pro školskou geometrii.

4.1.1. Definice

Definice dle Aristotela odpovídají na otázku: „Co je to?“ Existence takového objektu je pak předmětem důkazu: *Geometr přijímá, co je trojúhelník; to, že existuje, dokazuje.* Nikdo však neví, co je nejsoucí; aby měla definice smysl, musí tedy definovaná věc existovat. První propozice první knihy *Základů* je proto konstrukcí (rovnostranného trojúhelníku). Jako příklad uveďme čtverec: v definici I, 22 je definován, v propozici I, 46 zkonstruován (čímž je dokázána jeho existence) a poprvé se s ním pracuje v následující propozici I, 47 (Pýthagorova věta).

Aristotelés dále požaduje, aby termíny užité v definici označovaly věci dříve zavedené. Kritizuje platónské pojetí, kdy plocha je zavedena jako hranice tělesa, čára jako hranice plochy a bod jako hranice čáry. Složitější pojmy by totiž měly být zavedeny na základě pojmů jednodušších; nejdříve tedy bod, potom plocha, až poté těleso. Eukleidés tento nárok kladený na definice splňuje. U Hilberta problém odpadl: bod, přímka a rovina jsou primitivními pojmy, takže žádný z nich není „složitější“.

Ve školské matematice není tato zásada vždy dodržena. Příkladem může být bod, který je někdy zaváděn jako průsečík dvou různoběžných přímek (tj. přímek v rovině, které nejsou rovnoběžné), neboť přímka je na elementární úrovni poměrně názorným pojmem – jejím modelem je například natažená nit. Navíc je pak zřejmé, že přímka je tvořena body, které na ní leží, postulován je tak také požadavek spojitosti (průsečík vždy existuje).

Aristotelés poznamenává, že čára je „proudem bodů“ (tj. získána pohybem bodu), plochu získáme pohybem čáry a těleso pohybem plochy. Tím sice zachovává pořadí zavádění pojmů od jednodušších ke složitějším, vnáší však do geometrie cizorodý prvek – pohyb. Tyto charakterizace pomocí pohybu jsou však názorné.[8]

Je nutno připomenout, že Eukleidés používá značné množství nedefinovaných pojmů (např. část, délka, konec, šířka, sklon, stejný, neomezeně, souvisle, rozestup, celek, veličina, měřit, dělit), což jeho soustavě ubírá na přesnosti. Některé z těchto nedefinovaných pojmů se však vyskytují ve formulacích úvodních definic základních pojmů (bod, přímá čára, rovina, viz definice 1, 2, 4, 5, 7), které dnes považujeme za primitivní. Tyto definice však Eukleidés nikde nevyužívá. Jedná se tedy o tzv. *deskriptivní definice*, které slouží pouze k vysvětlení toho, co je možno si pod danými pojmy představit. Přestože Eukleidés uspořádává planimetrii do poměrně přísné soustavy, uvádí na začátku názorná vysvětlení, jak si představit základní pojmy, s nimiž se bude dále pracovat. Činí tak vědomě a nadřazuje tak didaktický aspekt pouhému rigoróznímu budování planimetrie. Považujeme za přínosné, když i novodobé učebnice matematiky uvážlivě projevují podobnou didaktickou odvahu a pojmy před jejich korektním zavedením přibližují názorně, i když ne zcela přesně.

4.1.2. Postuláty

Postuláty (požadavky, z lat. *postulō* – požaduji) jsou specifické pro konkrétní disciplínu. V tomto tedy odpovídají dnešním axiomům. Aristotelés předpokládá existenci tzv. *rodu* disciplíny, například u geometrie je to velikost, u aritmetiky jednotka. Dále se implicitně předpokládá existence prvotních objektů. V planimetrii jsou to body, čáry (mj. také přímé čáry a kružnice), v aritmetice jednotka a číslo. Tato existence je podle Aristotela zpočátku hypotézou, kterou přijímáme v očekávání důkazu. V Eukleidových *Základech* však žádné takové důkazy nejsou obsaženy, existenci bodů a čar tedy Eukleidés implicitně předpokládá.

První tři Eukleidovy postuláty obsahují požadavek, aby *bylo možno* vést dvěma body přímku (a tu souvisle prodloužit) a narýsovat kružnici s daným středem a procházející daným bodem. Jedná se tedy o principy, které mají blízko ke genetické metodě, neboť požadují, aby bylo možno provést základní konstrukce. Na jejich základě jsou pak prováděny v rámci jednotlivých propozic konstrukce dalších objektů, které jsou následně předmětem zkoumání. Vidíme, že Eukleidova formalizace geometrie nestojí pouze na základě axiomatické metody (obsahová axiomatizace), ale obsahuje také prvky metody genetické, neboť postuláty jsou do jisté míry požadavky existence objektů vzniklých základními konstrukcemi. Z těchto objektů pak mohou vznikat další, které jsou předmětem zkoumání.

Ve školské matematice se většinou existencí základních pojmů nezabýváme, je považována za zřejmou. Je tomu tak proto, že podobně jako antická matematika, i školská geometrie je úzce spjata s jedním konkrétním modelem, který je blízký reálnému světu, s nímž mají žáci řadu zkušeností.

[8] Oba uvedené přístupy uvádí např. Jan Vojtěch ve své učebnici *Geometrie pro IV. třídu středních škol.* 6. přepracované vydání, JČMF, Praha, 1934. Při opakování zavedení základních geometrických pojmů postupuje od tělesa: těleso → plocha (hranice) → čára (hranice či průnik ploch) → bod (hranice či průsečík čar). Následně uvádí vlastnosti bodu (nemá rozměru) a jeho modely (částice prachu, inkoustu, křídy). Pohybem bodu pak vzniká čára, pohybem čáry pak plocha.

Podobný postup nacházíme i v dalších učebnicích, např. Chládek Z., Žďárek J.: *Měřictví pro vyšší školy průmyslové oddělení strojnického.* JČMF, Praha, 1932.

Eukleidova soustava axiomů byla užívána až do 19. století. Pátý Eukleidův postulát se vymyká svou komplikovanou formulací, a tak bylo v průběhu dějin podniknuto mnoho pokusů jej dokázat, což nakonec vedlo v první polovině 19. století ke vzniku neeukleidovských geometrií. Vynecháním 5. postulátu dostáváme *absolutní geometrii*, tj. geometrii nezávislou na 5. postulátu. Přijmeme-li jeho neplatnost[9], dostaneme *Lobačevského (hyperbolickou) geometrii*, viz [16].

4.1.3. Obecné principy

Za postuláty ještě Eukleidés připojuje tzv. *obecné principy* (někdy také nazývané axiomy nebo obecné úsudky), které se v důkazech používají. Od postulátů se odlišují tím, že se vztahují na všechny disciplíny (v nichž se vyskytuje velikost), jsou nezávislé na konkrétní matematické disciplíně, shrnují tedy obecné principy, které se při úvahách užívají. Například v geometrii se může jednat o úsečky, rovinné či prostorové útvary, v aritmetice pak o přirozená čísla a podobně.

Dnes bychom k obecným principům zařadili i principy logické. Ty však Aristotelés shrnuje v samostatném souboru spisů (*Organon*). Podobně i dnes k poloformálním a obsahovým axiomatickým soustavám nepřipojujeme systém odvozovacích pravidel, která jsou považována za součást logiky.

4.2. Eukleidovy definice, postuláty a obecné principy

Překlad následujících definic, postulátů a obecných principů byl pořízen z Heibergova kritického vydání [7, s. 2–10].

Definice (horoi)

Z celkem 23 definic uvedených na začátku I. knihy Eukleidových *Základů* uvádíme pouze prvních sedm. Prvních devět definic patří mezi tzv. *deskriptivní definice*, které nejsou matematickými definicemi, ale spíše naznačují, jak si uvedený objekt představit.

1. Bod je to, co nemá žádnou část.
2. Čára je délka bez šířky.
3. Hranicemi čáry jsou body.[10]
4. Přímá čára je ta, která je vůči bodům na ní ležícím umístěna stejně.
5. Plocha je to, co má pouze délku a šířku.
6. Hranicemi plochy jsou čáry.
7. Rovinná plocha je ta, která je vůči přímým čarám na ní ležícím umístěna stejně.

[9] V rovině, v níž pro přímky neplatí Eukleidův postulát, platí postulát Lobačevského: bodem A, který neleží na dané přímce a, v rovině určené přímkou a a bodem A, procházejí alespoň dvě různé přímky c, b, které nemají s přímkou a žádný společný bod.

[10] Nejedná se o definici, ale o větu, která dává oba pojmy do souvislosti. Může se jednat o snahu zahrnout i platónské pojetí, kdy se bod definuje jako hranice čáry. Podobným případem je definice 6.

Následují definice dalších planimetrických pojmů: úhel rovinný a přímkový, pravý, tupý, ostrý; útvar; kruh, střed, průměr, půlkruh; útvary přímkové; trojúhelníky: rovnostranný, rovnoramenný, různostranný; pravoúhlý, tupoúhlý, ostroúhlý; čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník, různoběžník (lichoběžník); rovnoběžky.

23. Rovnoběžné jsou přímé čáry, které, když jsou v téže rovině a prodloužené na obě strany do nekonečna, se nikde nesbíhají[11].

Postuláty (požadavky, aitémata)

1. Nechť se požaduje*, aby bylo možno* z každého bodu do každého bodu vést přímou čáru,[12]
2. a ohraničenou přímou čáru souvisle prodloužit[13] v přímou čáru,
3. a ke každému středu a rozestupu[14] narýsovat kružnici.
4. A aby si všechny pravé úhly byly navzájem rovny.[15]
5. A pokud přímá čára protínající jiné dvě přímé čáry vytvoří na téže straně vnitřní úhly, které jsou dohromady menší než dva pravé, tak aby se při neomezeném prodlužování tyto dvě přímé čáry setkaly na té straně, na níž jsou úhly menší než dva pravé.[16]

Obecné principy (koinai ennoiai)

1. Témuž rovné jsou si rovny i navzájem.
2. A pokud jsou ke stejně velkým přidány stejně velké, jsou i celky stejně velké.
3. A pokud jsou od stejně velkých odebrány stejně velké, jsou i zbytky stejně velké.
4. [A pokud jsou k nestejně velkým přidány stejně velké, jsou i celky nestejně velké.]
5. [A dvojnásobky týchž jsou navzájem stejně velké.]
6. [A poloviny týchž jsou navzájem stejně velké.][17]

---

[11] *Nikde se nesbíhají*, tj. nemají společný bod.

[12] Vzdáleně připomíná podmínky z definice afinního prostoru.

[13] Souvisle prodloužit (jak je třeba), nikoli *prodloužit do nekonečna*, či *stále prodlužovat*.

[14] Nejedná se o poloměr ve smyslu vzdálenosti, ani o poloměr jako úsečku. Ze *Základů* I,1 a I,2 je zřejmé, že je dán střed a jeden bod kružnice. Tyto dva body jednoznačně určují „rozestup“ (řec. diastéma), který vezmeme do „idealizovaného“ kružítka.

[15] Pravý úhel je definován bez užití velikosti úhlu. Eukleidés vychází z toho, že vrcholové úhly různoběžek jsou si rovny. Jsou-li si navíc rovny i úhly vedlejší, jsou obě různoběžky na sebe kolmé. Požadavek rovnosti všech pravých úhlů (ať jsou umístěny kdekoli v rovině) je možno interpretovat jako požadavek „homogenity eukleidovské roviny“.

[16] Někdy je tento postulát nazýván *postulát „o rovnoběžkách“*, přestože v něm nejsou nikde rovnoběžky zmíněny. Často se totiž používá ekvivalentní vyjádření tohoto postulátu: *Daným bodem lze k dané přímce, která tímto bodem neprochází, vést právě jednu rovnoběžku.* I bez 5. postulátu lze dokázat, že k dané přímce lze daným bodem na ní neležícím vést *alespoň jednu* rovnoběžku; plyne to přímo z věty I, 27 v *Základech* (viz např. [16]). V 5. postulátu je však podstatná jednoznačnost.

[17] Obecné principy 4 až 6 nejspíše nejsou původní.

7. A vzájemně se překrývající jsou navzájem stejně velké.

8. A celek je větší než jeho část.

9. A dvě přímé čáry neohraničují rovinný útvar.

5. Hilbertova axiomatizace geometrie

Snad vůbec nejznámější axiomatizaci geometrie předložil roku 1899 David Hilbert (1862–1943) ve své knize *Grundlagen der Geometrie* (B. G. Teubner, Lipsko), kterou sestavil na základě svých přednášek o eukleidovské geometrii v zimním semestru 1898/99 na Univerzitě v Göttingen. Vytkl si za cíl předložit *jednoduchou a úplnou soustavu nezávislých axiomů a odvodit z nich nejdůležitější geometrické věty.* Tato kniha se dočkala mnoha vydání i překladů. Hilbert svůj systém axiomů upravoval prakticky celý svůj život. Připojoval také různé rozšiřující studie. Předložený systém axiomů odpovídá vydání z roku 1971. Dobře dostupný je anglický překlad [13].

Jak již bylo zmíněno v úvodní kapitole věnované různým typům axiomatizace, Hilbertův systém řadíme mezi poloformální axiomatizace, nikoli pouze obsahové. Není totiž vázán na jediný konkrétní model, ale sestává *pouze* z axiomů, primitivních pojmů a relací, takže v důkazech vět není nutné pracovat s názornými představami a opírat se o reálný svět. Naproti tomu Paschovu axiomatizaci geometrie považujeme za obsahovou, neboť se vyznačuje příliš těsnou vazbou na reálný svět. Paschovy axiomy sice shrnují empirický materiál, nejdou však dále. V Hilbertově soustavě jsou axiomy samostatnější; jakmile jsou jednou zformulovány, můžeme za primitivní pojmy považovat cokoli, co axiomy splňuje, například trojice čísel (body) a jisté rovnice (přímky, roviny). Bezespornost pak není ověřena na základě korespondence s reálným světem, ale převedením na bezespornost aritmetiky. Hilbert tak stojí u počátků formalismu, kdy matematika zkoumá systémy axiomů, které mohou být voleny libovolně, jediným omezením je požadavek jejich konzistence.[18]

Hilbertovy axiomy

Hilbert zvolil za primitivní pojmy *bod, přímku* a *rovinu*; za primitivní relace *ležet mezi* (tři body), *ležet na* (bod a přímka, bod a rovina, přímka a rovina), *být shodný* (dvě úsečky, dva úhly).[19]

I. Incidence

1. Ke každým dvěma bodům A, B existuje přímka jimi procházející,

2. tato přímka je nejvýše jedna,

3. na přímce leží alespoň 2 body.

[18] S různými modifikacemi Hilbertovy soustavy axiomů se lze seznámit např. v monografii [11] a přehledově v článku [9].

[19] Soubor primitivních pojmů a relací lze zredukovat, jak upozorňuje ve svém článku [22] Oswald Veblen. V axiomech incidence a uspořádání se vyskytují pojmy *bod, přímka, rovina*, a relace *ležet na* a *ležet mezi*; tyto dvě skupiny axiomů však lze zformulovat pouze pomocí pojmu *bod* a relace *ležet mezi*, zbylé pojmy a relace je totiž možno pomocí těchto dvou elementů definovat. Hilbert však ani v pozdějších vydáních k této redukci nepřikročil, neboť by takový systém byl složitější.

4. Ke každým třem bodům A, B, C neležícím na jedné přímce existuje rovina jimi procházející,
5. tato rovina je nejvýše jedna,
6. leží-li v rovině dva body přímky p, leží v ní všechny body přímky p,
7. mají-li dvě roviny společný bod, pak mají společný ještě jiný bod,
8. existují alespoň 4 body neležící v rovině.

II. Uspořádání

1. Pokud bod B leží mezi A a C, pak také leží mezi C a A, a navíc existuje přímka p obsahující A, B, C.
2. Leží-li dva body A, C na přímce p, pak existuje bod B ležící na p mezi nimi.
3. Ze tří bodů na přímce není více než jeden, který leží mezi zbylými dvěma body.
4. Paschův axiom: Jsou-li dány tři body A, B, C a přímka p žádným z nich neprocházející, pak platí: protíná-li p úsečku AB, pak také protíná buď AC, nebo BC.

III. Shodnost

1. Pokud $A, B \in p$, $A' \in p'$ (p' ne nutně různá od p), pak existuje bod $B' \in p'$ takový, že $A'B' \cong AB$.
2. Tranzitivita shodnosti úseček: Pokud $AB \cong A'B'$ a $AB \cong A''B''$, pak také $A'B' \cong A''B''$.
3. Pokud mají úsečky AB a BC ležící na jedné přímce společný pouze bod B, a také $A'B'$ a $B'C'$ ležící na jedné (ne nutně jiné) přímce mají společný pouze bod B', potom platí: jsou-li $AB \cong A'B'$ a $BC \cong B'C'$, pak také $AC \cong A'C'$.
4. Je-li dána polopřímka a úhel[20] α, pak existuje právě jedna polopřímka utvářející úhel shodný s α ležící na předepsané „straně“ polopřímky.
5. Tranzitivita shodnosti úhlů: Pokud $\alpha \cong \alpha'$ a $\alpha \cong \alpha''$, pak také $\alpha' \cong \alpha''$.
6. „Důsledek sus“: Mají-li dva trojúhelníky shodné dvě strany a úhel jimi sevřený, pak mají také shodné zbylé dva vnitřní úhly.

IV. Rovnoběžky

1. Eukleidův axiom: Buď dána přímka a bod na ní neležící. Pak v rovině existuje nejvýše jedna přímka procházející tímto bodem a neprotínající zadanou přímku.

[20] Zde se poprvé vyskytuje pojem *úhel*, který Hilbert definuje jako dvojici polopřímek s týmž počátkem neležících v jedné přímce. Následně definuje také *vnitřek úhlu* (množina všech takových bodů v rovině, jejichž spojnice neprotínají ramena úhlu).

V. Spojitost

1. Archimédův axiom: Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \cdot AB$ přesahuje úsečku AC.

2. Axiom úplnosti: množinu všech bodů na přímce už nelze dále konzistentně rozšířit.

6. Birkhoffova axiomatizace planimetrie

George D. Birkhoff se ve druhé polovině dvacátých let 20. století pokusil předložit základní geometrické poznatky v populární podobě[21]. Přitom zjistil, že při budování rovinné geometrie lze vycházet z vlastností měřítka a úhloměru, musel však předpokládat, že jsou již zavedena reálná čísla a jsou známy jejich základní vlastnosti. Díky tomu se mu však počet axiomů podařilo zredukovat na pouhé čtyři. Příslušný soubor axiomů předložil v článku [4]. V roce 1940 se dokonce objevily učebnice pro střední školu založené na Birkhoffově axiomatice rovinné geometrie. Jednalo se však o velký odklon od tradiční eukleidovsky budované geometrie, a proto tyto učebnice nebyly příliš úspěšné.

Birkhoffova axiomatizace rovinné geometrie je však velmi zajímavá svým originálním pojetím a malým počtem axiomů. Zároveň ukazuje, jak velkého zjednodušení lze dosáhnout, když předpokládáme znalost reálných čísel, což odpovídá situaci ve školské matematice. Birkhoffovou axiomatikou se později inspirovali někteří tvůrci učebnic geometrie, v 60. letech ji také využili členové SMSG (School Mathematics Study Group) při tvorbě vlastního souboru 22 axiomů[22], z nichž pak vycházeli v pečlivě připravené řadě učebnic.

Birkhoffovy axiomy

G. D. Birkhoff ve svém článku [4] zvolil za primitivní pojmy *bod* a *přímku* (jako speciální případ množiny bodů), za primitivní relace *vzdálenost dvou bodů* $d(\cdot,\cdot)$, která každým dvěma bodům A, B přiřazuje nezáporné reálné číslo takové, že $d(A,B) = d(B,A)$, a *úhel tvořený uspořádanou trojicí bodů* A, O, B (označovaný $\angle AOB$), kde $A \neq O$ a $B \neq O$; úhel $\angle AOB$ je reálným číslem (mod 2π).

1. **(Míra na přímce)** Ke každé přímce p existuje bijekce mezi jejími body $A, B, \dots$ a reálnými čísly x taková, že

   $$|x_B - x_A| = d(A,B)$$

   pro všechny body $A, B \in p$.[23]

2. **(Určenost přímky dvěma body)** Dva dané body P, Q, $P \neq Q$, obsahuje právě jedna přímka p.

[21] Viz kniha [3] a později článek [2].

[22] Axiomy SMSG nebyly nezávislé, aby se usnadnilo odvozování výsledků školské geometrie. Například zavedení obsahu usnadňují postuláty 20 (*Obsah obdélníku je součinem délky jeho základny a výšky.*) a 22 (Cavalieriho princip). Soubor axiomů SMSG je uveden např. v [17, s. 379–380], [21, s. 186–188].

[23] Předpokládá se, že x_A je obrazem bodu A v této bijekci, podobně x_B je obrazem bodu B.

3. **(Míra úhlu)** Mezi polopřímkami $l, m, \ldots$ s libovolným počátkem O a reálnými čísly $a \pmod{2\pi}$ existuje bijekce taková, že pokud $A \neq O$ a $B \neq O$ jsou body ležící na polopřímce l, resp. na m, tak rozdíl $a_m - a_l \pmod{2\pi}$ je úhel $\angle AOB$. Navíc platí, že pokud se bod B polopřímky m pohybuje spojitě po přímce r neobsahující vrchol O, tak se číslo a_m mění také spojitě.

4. **(Podobnost trojúhelníků – sus)** Jestliže ve dvou trojúhelnících $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí pro nějakou konstantu $k > 0$

$$d(A', B') = k\, d(A, B)\,, \quad d(A', C') = k\, d(A, C)\,, \quad \angle B'A'C' = \pm BAC\,,$$

pak také

$$d(B', C') = k\, d(B, C)\,, \quad \angle C'B'A' = \pm CBA\,, \quad \angle A'C'B' = \pm ACB\,.$$

Poznámky k Birkhoffovým axiomům

1. Tento axiom splňuje např. reálná osa. V Birkhoffově přístupu k planimetrii není třeba dokazovat, že reálná čísla jednoznačně odpovídají bodům přímky.

2. Důsledkem tohoto axiomu je, že dvě přímky mohou mít nejvýše jeden společný bod. Mají-li jeden společný bod, říkáme, že se *protínají* a nazýváme je *různoběžky*. Jestliže dvě přímky nemají žádný společný bod, říkáme, že jsou *rovnoběžné*.

3. Polopřímku Birkhoff definuje po formulaci 1. axiomu. Nejprve zavádí, co znamená, že bod B leží mezi body A a C. Polopřímkou l' s počátkem O a vnitřním bodem $A \neq O$ pak rozumí třídu všech bodů A' ležících na přímce OA takových, že bod O neleží mezi A a A'.

Netradiční je pohled na úhel – jedná se o primitivní relaci, reálné číslo přiřazené třem bodům tak, jak je specifikováno v axiomu 3. Zde se Birkhoff odchyluje od tradiční eukleidovské geometrie, kde je úhel definován jako jistá část roviny; odlišuje se tedy úhel a jeho velikost.

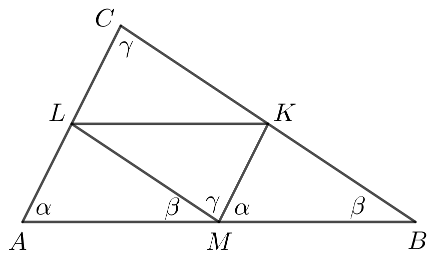
Druhá část třetího axiomu zajišťuje, že se jedná o archimédovskou rovinu.

4. Trojúhelník není v článku [4] definován dostatečně přesně, pouze je konstatováno, že jsou-li dány tři různé body A, B, C, pak úsečky AB, BC, CA *tvoří* trojúhelník $\triangle ABC$. Není tak zřejmé, zda je trojúhelník pouze sjednocením těchto úseček, nebo zda je částí roviny těmito úsečkami ohraničené.

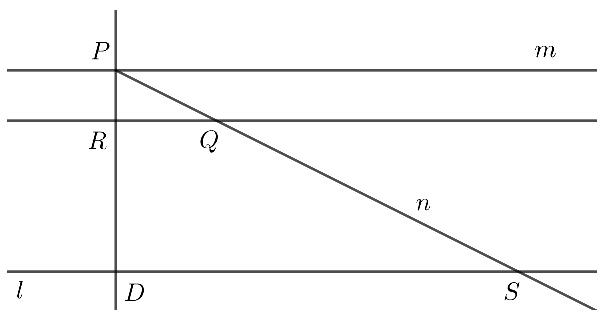
Pátý Eukleidův postulát

Pátý Eukleidův postulát se v Birkhoffově pojetí geometrie stává dokazatelným tvrzením. Sám Birkhoff jej ve svém článku [4] dokázal na základě svých čtyř axiomů, a to dokonce dvakrát.

V prvním případě dokázal tvrzení ekvivalentní s pátým Eukleidovým postulátem: *součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven* π. Vycházel přitom ze spojnic středů stran trojúhelníku ABC, čímž vznikly trojúhelníky $\triangle AML$, $\triangle MBK$, $\triangle LKC$, které jsou dle Birkhoffova axiomu 4 s původním $\triangle ABC$ podobné s koeficientem $k = 1/2$. Tyto trojúhelníky jsou navíc dle věty sss (kterou Birkhoff také dokázal) shodné s trojúhelníkem středních příček $\triangle KLM$. Doplníme-li tedy příslušné úhly například při vrcholu M, dostaneme ihned požadované tvrzení $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.



V druhém případě Birkhoff přímo dokázal, že *daným bodem P prochází právě jedna přímka rovnoběžná s danou přímkou l*. Před tím však odvodil tvrzení, že daným bodem lze k dané přímce vést jedinou kolmici. Existenci rovnoběžky pak lze ukázat konstruktivně: rovnoběžkou m k dané přímce l procházející bodem P je kolmice procházející bodem P ke kolmici PD vedené bodem P k přímce l. Skutečně, tato „kolmice ke kolmici“ m neprotíná přímku l, jinak by totiž jejich průsečíkem S bylo možno vést dvě kolmice k PD: přímky SP a SD.



Jednoznačnost je v článku [4] dokázána sporem. Pokud by bylo možno bodem P vést další rovnoběžku n s přímkou l různou od m, mohli bychom na ní zvolit bod Q různý od P a neležící na přímce m. Tímto bodem Q bychom pak vedli kolmici k přímce PD s patou R, čímž by vznikl pravoúhlý trojúhelník $\triangle PRQ$. Pokud bychom umístili bod S na přímku[24] l tak, aby

$$\frac{SD}{PD} = \frac{QR}{PR}\,,$$

vznikly by tak dva pravoúhlé trojúhelníky $\triangle QRP$, $\triangle SDP$ (neboť oba úhly $\angle QRP$, $\angle SDP$ jsou pravé), které by byly dle Birkhoffova axiomu 4 podobné. Polopřímka PS by tedy splývala s polopřímkou PQ a přímka n by tedy nemohla být s přímkou l rovnoběžná, neboť by ji protínala v bodě S.

[24] Je třeba jej umístit do poloroviny s hraniční přímkou PD obsahující bod Q.

L i t e r a t u r a

[1] Aristotelés: *Druhé analytiky.* Přel. A. Kříž. Nakladatelství ČSAV, Praha, 1962.

[2] Beatley, R., Birkhoff, G. D.: *A new approach to elementary Geometry.* Yearbook of the National Association of Mathematics Teachers, 1929.

[3] Birkhoff, G. D.: *The Origin, nature and influence of relativity.* Macmillan, 1926.

[4] Birkhoff, G. D.: *A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor.* Ann. of Math. *33 (2)* (1932), 329–345.

[5] Drábek, J.: *Světonázorové problémy v matematice, II. díl.* Pedagogická fakulta v Plzni, Plzeň, 1985.

[6] Drábek, J., Šilarová, M.: *Kategorie pravdy v matematice.* Pedagogické centrum Plzeň, Plzeň, 2001.

[7] Euclidis opera omnia. I. L. Heiberg (Ed.), Vol. I, libros I–IV. B. G. Teubner, Leipzig, 1883.

[8] Greenberg, M. J.: *Euclidean and non-Euclidean geometries, development and history.* 3rd ed., W. H. Freeman, New York, 1993.

[9] Greenberg, M. J.: *Old and new results in the foundations of elementary plane Euclidean and non-Euclidean geometries.* Amer. Math. Monthly *117* (2010), 198–219.

[10] Hadamard, J.: *Elementární geometrie I – planimetrie.* 3. vyd. rus. překladu 11. vyd., přel. D. I. Perepjolkin. Učpedgiz, Moskva, 1948.

[11] Hartshorne, R.: *Geometry: Euclid and Beyond.* Springer, 2000.

[12] Hilbert, D.: *Über den Zahlbegriff.* Deutsche Math. Ver. *8* (1900), 180–184.

[13] Hilbert, D.: *The foundations of geometry.* Přel. E. J. Townsend. The Open Court, La Salle, IL, 1902.

[14] Kleene, S. C.: *Introduction to metamathematics.* North-Holland, Amsterdam, 1952.

[15] Kuřina, F.: *Matematika jako pedagogický problém.* Gaudeamus, Hradec Králové, 2016.

[16] Kutuzov, B. V.: *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie.* Přel. R. Zelinka a V. Macháček. ČSAV, Praha, 1953.

[17] Lee, J. M.: *Axiomatic geometry.* Pure and Applied Undergraduate Texts *21*, AMS, 2013.

[18] Pasch, M.: *Vorlesungen über neuere Geometrie.* 1. Auflage, Teubner, Leipzig und Berlin, 1882.

[19] Poincaré, H.: *Science et méthode.* Flammarion, Paris, 1908.

[20] Tamari, D.: *Moritz Pasch (1843–1930), Vater der modernen Axiomatik.* Shaker, Aachen, 2007.

[21] Tuller, A.: *A modern introduction to geometries.* D. van Nostrand, New Jersey, 1966.

[22] Veblen O.: *Hilbert's Foundations of Geometry.* The Monist *13* (1903), 303–309.