Lukáš Honzík; Šárka Pěchoučková

Matematické úlohy na šachovnici

Učitel matematiky, Vol. 27 (2019), No. 1, 12–24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148594

MATEMATICKÉ ÚLOHY NA ŠACHOVNICI

Lukáš Honzík, Šárka Pěchoučková

Šachy jsou desková hra pro dva hráče v současné době známá v naprosté většině zemí světa. Její obvyklé pojetí pochází z jižní Evropy 15. století, kde bylo odvozeno z perské hry šatranž. Ta zase vznikla úpravou staré indické hry čaturanga vynalezené již v 6. století n. l. v Guptovské říši.

I přes některé odlišnosti čaturangy a moderních šachů (čaturangu hrají čtyři hráči rozdělení do dvou spojeneckých týmů, namísto některých obvyklých figur se zde setkáme s figurou rádži, slona nebo lodě, přičemž o tom, jakou figurou bude hráč, který je na tahu, hrát, se rozhoduje hodem čtyřstěnnou kostkou) lze najít významné společné rysy obou her, mezi které patří především čtvercová hrací deska – šachovnice – rozdělená na 8×8 polí střídavě obarvených černou a bílou barvou. [1]

Vynalezení hry

Za vynálezce čatarungy a tedy i praotce dnešních šachových her je považován učenec Sissa bin Dahir, s nímž je svázán i příběh předznamenávající využitelnost šachovnice nejen pro hru samotnou, ale též pro uvedení nejrůznějších matematických a logických úkolů či hlavolamů. Legenda praví, že Sissa bin Dahir vymyslel hru pro mladého krále Šahrama, aby mu prakticky ukázal, že král se nemůže obejít bez svých poddaných a že i samotný pěšák může vyhrát bitvu. Král byl hrou nadšen a učenci slíbil, že mu za ni dá jakoukoliv odměnu, o niž si řekne. Sissa bin Dahir odpověděl, že mu postačí, když mu král dá tolik zrnek pšenice, kolik se vejde na šachovnici podle následujícího klíče: na první pole 1 zrno, na druhé pole 2 zrna, na třetí 4, na čtvrté 8 a tak dále, tedy na každé další pole vždy dvojnásobek množství z pole předchozího. Králi se to zdálo jako poněkud skromný požadavek, nicméně učenci vyhověl a nařídil poddaným jej splnit. Teprve později se ukázalo, že zmíněné přání není vůbec skromné, ale naopak nesplnitelné, jelikož v celé Indii není tolik pšenice, aby dala potřebné množství zrn.

Podíváme-li se na tento problém pohledem současné matematiky, je zřejmé, že situaci můžeme zapsat následujícím výrazem

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63},$$

který popisuje částečný součet posloupnosti. Konkrétně se jedná o součet prvních 64 členů geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = 2$. Využijeme-li známý vzorec pro zjištění součtu prvních n členů geometrické posloupnosti

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

obdržíme výpočet

$$s_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1.$$

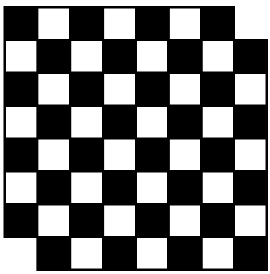
Po vyjádření výsledku v dekadické soustavě se dostáváme k číslu 18 446 744 073 709 551 615, Sissa bin Dahir měl tedy obdržet více než 18 trilionů zrn pšenice. Při průměrné hmotnosti 1 gramu na 25 zrn pšenice se dostáváme k úctyhodné hmotnosti přesahující 737 miliard tun pšenice. Pro úplnost dodejme, že v současnosti se celosvětová roční produkce pšenice pohybuje okolo 700 miliónů tun. [1, 2]

Zajímavé úlohy

Jak jsme již uvedli v předchozí kapitole, šachovnice může dobře sloužit jako „dějiště“ nejrůznějších logických a matematických úloh a problémů. Ty mohou mít značný a dobře využitelný motivační potenciál nejen pro žáky základních a středních škol a zároveň je lze použít jako dobrý trénink pro rozvoj matematického a logického myšlení a též procvičení algoritmizace. Zde předkládáme několik zajímavých úloh rozdělených do několika kategorií. Konkrétně jmenujme úlohy týkající se obarvování či dláždění šachovnice různě velkými dlaždicemi, dále pak úlohy o pohybu figur po šachovnici a v neposlední řadě zmiňme též úlohy řešitelné Dirichletovým přihrádkovým principem. Dodejme, že u posledně zmíněných úloh nemusí být způsob řešení vždy na první pohled zřejmý a to ani v případě, že víme, že se jedná o Dirichletův princip. Pokud je však toto řešení objeveno, je většinou již poměrně jednoduché.

Obarvení a dláždění

Úloha 1. Lze šachovnici 8×8 polí bez dvojice diagonálně protilehlých rohů (obr. 1) pokrýt kostkami domina, kdy jedna kostka domina překryje právě dvě sousední pole šachovnice, přičemž žádná kostka domina nesmí být nijak dělena? Pokud způsob existuje, nalezněte jej, pokud ne, zdůvodněte toto tvrzení.



Obr. 1: Šachovnice 8×8 bez dvou protějších rohů

Řešení. První myšlenka řešitele se může ubírat tímto směrem. Standardní šachovnice má $8 \times 8 = 64$ polí. Uřízneme-li dva protější rohy, zbyde nám 62 polí. Vzhledem k tomu, že jedna kostka domina pokrývá právě dvě sousední pole, mělo by být teoreticky možné pokrýt naši šachovnici 31 kostkami domina. Toto však není důkaz natož popis postupu jak na šachovnici kostky vyskládat.

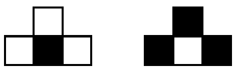
Pokusme se tedy na problém podívat z trochu jiného úhlu. Každá kostka domina pokryje vždy jedno černé a jedno bílé pole.

V šachovnici však chybí protilehlé rohy, které jsou stejné barvy – v případě obr. 1 se jedná o pole bílá. Ve výsledku tedy šachovnice sestává ze 30 bílých polí a 32 černých polí. Vzhledem k tomu, že z těchto různých počtů odlišně obarvených polí nelze vytvořit příslušný počet dvoubarevných dvojic, není ani možné pokrýt šachovnici kostkami domina.

Úloha 2. Máme šachovnici o velikosti 10×10 polí. Je ji možné beze zbytku pokrýt tetraminy tvaru T, aniž bychom některé z tetramin museli dělit?

Řešení. Provedeme-li na počátku opět zběžný výpočet $\frac{10 \cdot 10}{4} = 25$, dojdeme k závěru, že tuto šachovnici by teoreticky mohlo být možné pokrýt tetraminy beze zbytku. Přitom bychom jich potřebovali 25 kusů.

Z toho ovšem vyplývá zásadní problém. Tetramina na ni můžeme položit dvěma způsoby, buď půjde o tertamino ležící na třech bílých a jednom černém poli, nebo o tertramino ležící na třech černých polích a jednom bílém (obr. 2).



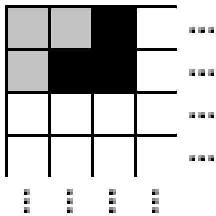
Obr. 2: Tetramina

Přitom šachovnice má dohromady 100 polí a obarvíme-li ji obvyklým způsobem, dostaneme 50 polí černých a 50 polí bílých. To ale znamená, že můžeme položit po 12 od obou druhů, čímž pokryjeme 48 polí černých a 48 polí bílých, na zbylá 2 černá a 2 bílá pole již musíme použít poslední 25. tertramino, které ale musí být jedním ze zmíněných druhů. Ani v jednom případě však neuspějeme.

Úloha 3. Kuba a Bára spolu hrají hru. K dispozici mají šachovnici o 30×30 polích, která jsou všechna bílá. Kuba začíná a v každém svém tahu přebarví nějaký bílý čtverec velikosti 2×2 na černo. Bára v každém svém tahu přebarví na černo tři bílá políčka tvořící libovolně orientované L. V tazích se pravidelně střídají a prohrává ten, kdo jako první nemůže táhnout. Pro kterého z nich existuje vyhrávací strategie? [3]

Řešení. Řešitelovým prvním krokem by mohlo být uvážení, který z hráčů má větší výhodu, již může v průběhu hry využít. Kuba začíná, je to tedy on, kdo volí první umístění jakéhokoliv obarvení na šachovnici. Tím ovšem v podstatě jeho výhoda končí, vyčerpal ji hned na počátku hry. Naproti tomu Bára může využít skutečnosti, že její obarvené L zabírá menší plochu nežli Kubův čtverec. Bára tedy vždy může hrát do libovolných 4 políček tvořících čtverec, zatímco Kuba není schopen svůj čtverec do 3 sousedních zatím neobarvených políček tvaru L vtěsnat.

Vyhrávací strategie tedy existuje pro Báru, pokud ji zvolí, neexistuje proti tomu obrana. Stačí, když si ve svém prvním tahu vybere některý z prázdných rohů šachovnice (takové existují minimálně tři, jelikož Kuba hrál teprve jednou) a umístí do něj první L (černě vyznačená pole) podle obrázku 3.

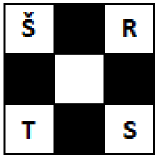


Obr. 3: Bářin první tah

Po tomto jejím prvním tahu vzniknou tři rezervní políčka (zvýrazněna šedou barvou), do nichž může zahrát pouze ona, Kubův čtverec se do nich nevejde. V průběhu hry pak mohou nastat dvě možnosti, kdy existuje poslední nevybarvený čtverec. Buď je na tahu Bára, která do tohoto čtverce umístí své L, a Kuba již nemá kde hrát a prohrává, anebo je na tahu Kuba, který tento čtverec vybarví, načež Bára využije zmíněná rezervní políčka, následně Kuba nemá kde hrát a také prohrává.

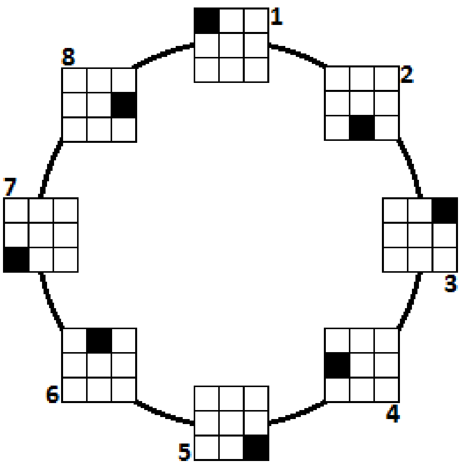
Pohyb figur po šachovnici

Úloha 4. Na rohových polích šachovnice 3×3 stojí postupně Semík (Š), Rozinanta (R), Stínovlas (S) a Trojský kůň (T) (obr. 4), přičemž všichni se pohybují jako šachoví koně a zároveň nesmí stát dva na jednom poli. Je možné, aby si Šemík a Rozinanta prohodili své pozice a zároveň Stínovlas a Trojský kůň zůstali na svých místech? [3]



Obr. 4: Šachovnice s počátečním rozmístěním koní

Řešení. Pokud uvážíme tahy, kterými se koně mohou po šachovnici pohybovat, lze tyto možnosti zanést do jednoduchého grafu (obr. 5). V tomto znázornění pak hrana mezi dvěma stavy (umístěními figury na šachovnici) představuje možnost přesunout figuru z jednoho zvýrazněného pole na druhé. Přitom platí, že figura na kterémkoliv krajním poli šachovnice má tyto možnosti právě dvě (buď po směru hodinových ručiček, nebo proti směru). Na středové pole se zmíněnými tahy nedá dostat, v grafu tedy není tato možnost uvedena. Jak je z grafického znázornění jasné, jedná se o cyklus.



Obr. 5: Pohyb figur po šachovnici

Posuneme-li nyní Šemíka ze stavu 1 do stavu 2, dalším možným krokem (nechceme-li figuru vracet na její původní místo), je posun do stavu 3. Na cílovém poli ale stojí Rozinanta, kterou je tedy nutné posunout po šachovnici opět jediným možným způsobem. Při dalším pohybu by Rozinanta narazila na Stínovlase, který by jí také musel uhnout jediným možným způsobem. Důsledkem tohoto pojetí je skutečnost, že všechny figury se na šachovnici mohou pohybovat jedním nebo druhým směrem (po směru nebo proti směru hodinových ručiček), vždy tak ale činí jediným možným způsobem. Bez ohledu na směr pohybu se po celkovém počtu 32 tahů (bez vracení na předchozí pozici) dostanou všechny figury na své původní pozice. Odpověď tedy zní: Ne, Šemík a Rozinanta si nemohou prohodit své pozice, aniž by při tom změnili svá místa i Stínovlas a Trojský kůň. Pro úplnost dodejme, že dokonce platí ještě silnější tvrzení, a to: Šemík a Rozinanta si nemohou prohodit své pozice.

Dirichletův princip

Než se budeme věnovat konkrétním úlohám, připomeňme tvrzení, která se dají k důkazu Dirichletovým principem použít [5, 6]:

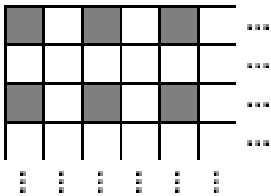
(základní tvrzení) Mějme $n+1$ předmětů a n přihrádek. Pokud všechny předměty rozdělíme do přihrádek, existuje alespoň 1 přihrádka, kde se nachází alespoň 2 předměty.

(obecné tvrzení) Mějme $kn+1$ předmětů a n přihrádek. Pokud všechny předměty rozdělíme do přihrádek, existuje alespoň 1 přihrádka, kde se nachází alespoň $k+1$ předmětů.

Úloha 5. Jaký nejvyšší počet králů můžeme na šachovnici 8×8 polí umístit, aby se navzájem žádní dva z nich neohrožovali? [5]

Řešení. Na začátku připomeňme, že král na šachovnici může táhnout vždy jen na libovolné sousední pole (horizontálně, vertikálně či diagonálně). Dohromady tak z pole, na kterém stojí, ohrožuje všech 8 sousedních polí. Přestože každý král takto zabírá čtverec 3×3 pole, tyto čtverce se částečně navzájem překrývají, protože nejmenší vzdálenost, která může dva krále na šachovnici dělit, aniž by se vzájemně ohrožovali, je právě jedno pole.

„Nejhustší“ uspořádání figur králů na šachovnici bude ve výsledku spočívat ve vymezení čtverců 2×2, přičemž jejich umístění provedeme například následujícím způsobem: Prvního krále umístíme do levého horního rohu, další krále pak do šachovnice umisťujeme podle obrázku 6 vždy ob jedno pole vpravo, dolů či po diagonále (obsazená pole jsou zvýrazněna šedě).



Obr. 6: Umístění králů na šachovnici

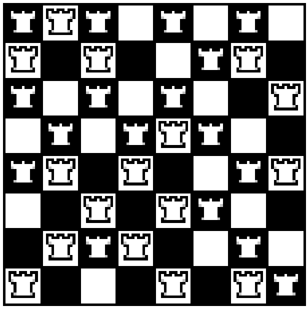
Provedeme-li zmíněné rozmístění figur, je zřejmé, že se nám takto podařilo šachovnici rozdělit na 16 čtverců, v každém z nich je jeden král.

Nyní ukažme, že 16 králů je skutečně maximální možný počet umístěných figur. Pokud bychom se na šachovnici pokusili umístit 17 nebo dokonce více figur, podle Dirichletova principu by se v alespoň jednom ze čtverců 2×2 musely nacházet alespoň 2 figury, které se nutně musí ohrožovat.

Maximálním počet králů, kteří se na šachovnici navzájem neohrožují, je tedy skutečně 16.

Úloha 6. Na šachovnici 8×8 polí je rozmístěno 33 věží. Dokažte, že mezi nimi vždy existuje pětice věží takových, že se žádná dvojice z nich neohrožuje. [5, 6]

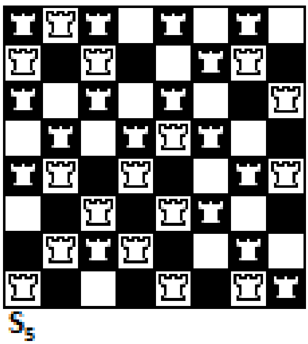
Řešení. Nejprve podotkněme, že zmíněné tvrzení neplatí pro 32 věží. Stačí uvážit například situaci, kdy budou věže rozmístěny ve čtyřech řadách po osmi. V takovém případě bychom v každé libovolné náhodně vybrané pětici našli alespoň jednu dvojici věží, které leží v jedné řadě a tudíž se vzájemně ohrožují.



Obr. 7: Ilustrace náhodného rozmístění 33 věží

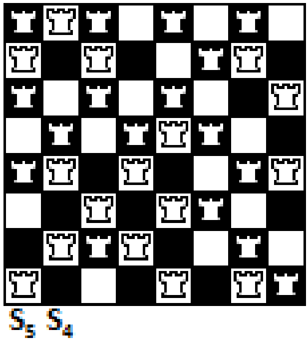
Pro 33 věží je situace již jiná. Dirichletovým principem se pokusme najít pětici sloupců, označme je S_5, S_4, S_3, S_2, S_1, takových, že v nich postupně leží 5, 4, 3, 2 a 1 věž. Přitom z těchto sloupců již bude jednoduché vybrat pětici věží, z nichž žádné dvě se neohrožují.

Na počátku máme 33 věží rozmístěných v osmi sloupcích, tzn. $33 : 8 = 4$, zbytek 1. Podle Dirichletova principu pak existuje alespoň jeden sloupec, ve kterém se nachází alespoň 5 věží. Tento sloupec označme S_5. Přitom si uvědomme, že maximální počet věží v tomto sloupci může být 8, takže nám zbývá alespoň $33 - 8 = 25$ věží.



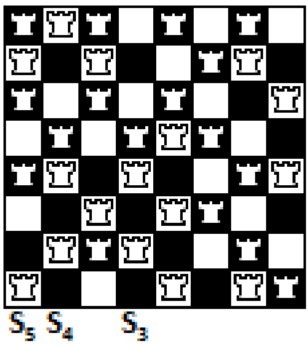
Obr. 8: Výběr sloupce S_5

Těchto zbylých 25 věží je rozmístěno v 7 sloupcích, tzn. $25 : 7 = 3$, zbytek 4, přičemž podle Dirichletova principu mezi nimi existuje alespoň jeden sloupec, v němž se nachází alespoň 4 věže. Tento sloupec označme S_4. Maximální počet věží v tomto sloupci opět může být 8, tudíž zbývá alespoň $25 - 8 = 17$ věží.



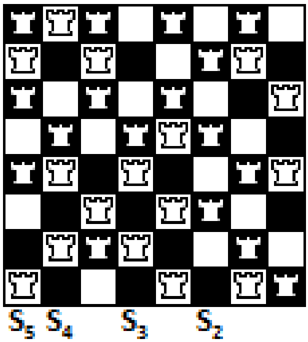
Obr. 9: Výběr sloupce S_4

Těchto 17 věží je rozmístěno v 6 sloupcích, tzn. $17 : 6 = 2$ a zbytek 5, takže podle Dirichletova principu mezi nimi existuje alespoň jeden sloupec, kde se nachází 3 věže. Tento sloupec označíme S_3. Přitom maximální počet věží, které se v něm nacházejí, může být opět 8, takže ve zbývajících sloupcích najdeme alespoň $17 - 8 = 9$ věží.



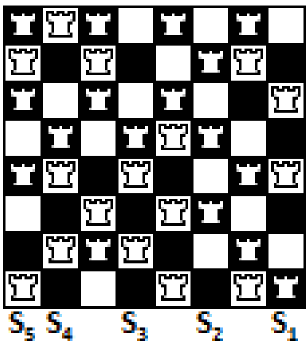
Obr. 10: Výběr sloupce S_3

Analogicky naložíme s těmito 9 věžemi rozmístěnými v 5 sloupcích, tzn. $9 : 5 = 1$ a zbytek 4, kdy podle Dirichletova principu mezi nimi existuje alespoň jeden sloupec, v němž se nachází 2 věže. Tento sloupec označíme S_2. Maximální počet věží v tomto sloupci může být zase 8 a ve zbývajících čtyřech sloupcích tak najdeme alespoň $9 - 8 = 1$ věž.



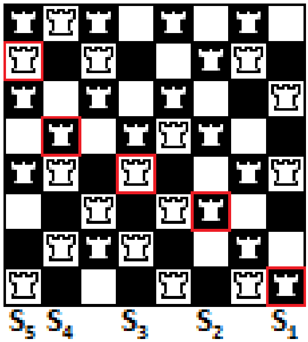
Obr. 11: Výběr sloupce S_2

Sloupec, ve kterém se tato zbývající věž nachází, označíme S_1.



Obr. 12: Výběr sloupce S_1

Nyní projděme sloupce S_1 až S_5 a nalezněme hledanou pětici věží: Ve sloupci S_1 vybereme první věž (je-li jich více, pak vybereme libovolnou z nich). Ve sloupci S_2 jsou alespoň 2 věže, z nichž vybereme druhou tak, aby se neohrožovala s vybranou věží ze sloupce S_1. Ve sloupci S_3 jsou alespoň 3 věže, ze kterých vybereme třetí tak, aby se neohrožovala s vybranými věžemi ze sloupců S_1 a S_2. Obdobným způsobem pak vybereme i čtvrtou a pátou věž ze sloupců S_4 a S_5, které budou splňovat požadovanou podmínku.



Obr. 13: Příklad vybraných pěti věží, které se neohrožují

Závěr

Podobných matematických a logických úkolů a problémů lze najít poměrně široké spektrum od vcelku jednoduchých úloh vhodných už pro děti na základní škole až po problémy vysoké obtížnosti, které se mohou objevit například v některých vysokoškolských kvalifikačních pracích. Přes rozdílnou obtížnost a též odlišné zařazení do námi jmenovaných kategorií mají ale všechny tyto úlohy několik společných jmenovatelů. Těmi jsou jednak využití šachovnice, na niž je úkol zadán, ale především silný motivační činitel vycházející z prožitku zdárného vyřešení zadané úlohy.

Literatura

[1] *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Šachy* [online]. c2018. Dostupné z `https://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%A0achy`

[2] Staněk, M. *Odměna za šachy.* Dostupné z `home.pf.jcu.cz/~math4all/download/M_uloha_0226_SU.pdf`

[3] Matematický korespondenční seminář. (2015). *Úlohy na šachovnici.* Praha: MFF UK, 2015. Dostupné z https://mks.mff.cuni.cz/archive/35/komplet3p.pdf

[4] Musil, V. *Obarvení a dláždění.* Dostupné z http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~vejtek/prace/mks/2010_Domaslav/Obarveni_a_dlazdeni_VM.pdf

[5] Šimša, J. (2011). *Vybrané partie školské matematiky.* Dostupné z https://www.math.muni.cz/~xsasm/M8502.pdf

[6] Vaňhara, J. (2011). *Dirichletův princip neboli princip holubníku, invarianty a obarvení.* Dostupné z http://www.talnet.cz/documents/18/408e53bd-d27c-4e63-8b62-65ecc4a6e2b9

Abstract

The game of chess is known to all of us, including young children. The most of us also know its rules at least at the level that allows us to play the chess. The game develops logical thinking, algorithmization and strategic thinking. However, it is not the only activity that can be performed on the chessboard. Other activities, besides draughts (checkers) or chess predecessors chaturanga and shatranj, include various logical and mathematical tasks or rebus. These are often solvable for the students of secondary or even elementary schools and can thus be an interesting motivation for their deeper study of mathematics and related disciplines.

Lukáš Honzík
e-mail: honzikl@kmt.zcu.cz

Šárka Pěchoučková
e-mail: pechouck@kmt.zcu.cz

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy
Fakulta pedagogická ZČU v Plzni
Klatovská 51
306 14 Plzeň