Učitel matematiky

Oldřich Odvárko

O čem přemýšlí autor učebnic

Učitel matematiky, Vol. 27 (2019), No. 3, 187–197

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148614`

O ČEM PŘEMÝŠLÍ AUTOR UČEBNIC

Oldřich Odvárko

Úvod

Každá učebnice musí splňovat tři základní požadavky:

1. Po odborně matematické stránce je bez chyb. Pokud se do učebnice přesto nějaké vloudí, pak to mohou být jen *překlepy* (například nesprávné výsledky několika málo úloh). V žádném případě nelze tolerovat deformace pojmů, vět či algoritmů.
2. Metodicky je zpracována tak, aby byla pro žáka srozumitelná a přitažlivá. Vyhýbá se zbytečně dlouhým textům, vyjadřuje se jasně a stručně, zdůrazňuje podstatné informace, vybízí žáka ke spolupráci, zadává mu konkrétní úkoly. Snaží se, aby se kontakt se žákem neomezoval jen na řešení úloh. Jazykové vyjadřování je žákovi blízké, zůstává však stále na úrovni spisovné češtiny.
3. Je v souladu s *rámcovým vzdělávacím programem*, eventuálně s dalšími oficiálními dokumenty. V učebnici mohou být z hlediska rozsahu některé okruhy více zdůrazněny či mírně potlačeny, učivo může být rozšířeno nad stanovený povinný rámec, ale to je tak vše.

Shora uvedené požadavky jsou pro vznik učebnice nezbytné, ale ani ve svém souhrnu nejsou ještě postačující.

Škola má vést k rozvoji osobnosti žáka, ať už jde o jeho duševní potenciál či morální profil, a zároveň ho má také připravit na to, aby se dovedl orientovat v běžném praktickém životě. A tady se autor učebnic ocitá před kardinálním problémem: Jak učebnici koncipovat, aby ke splnění tohoto úkolu maximálně přispěla? Co všechno může matematika základní školy v tomto směru žákovi poskytnout?

Pokusím se naznačit několik možností, které ovšem zdaleka tuto problematiku nevyčerpávají. Nepředpokládám, že všichni čtenáři, zvláště pak vyučující matematiky na základních školách, se mnou budou ve všem souhlasit. Následující úvahy by měly být především inspirací k zamýšlení se nad celkovým pojetím výuky školské matematiky.

Matematika je nuda, radši bych hrál fotbal

Těžko lze na žácích druhého stupně základní školy chtít, aby do sebe vstřebávali teoretické poznatky, aniž by viděli jejich užitečnost v reálném světě. Proto je učebnice povinna *průběžně a systematicky* ukazovat *vztah teorie a praxe.* Partii o osové souměrnosti by měly doprovázet v úrovni motivačních i ilustračních příkladů dopravní značky, značky aut, vlajky, hrací karty, průčelí domů. Desetinná čísla by měla být úzce spojena s cenami zboží, s teplotami a jejich změnami, se sportovními výsledky, s kurzy měn. Je třeba využít všechny vhodné zdroje, které nabízí živá i neživá příroda, architektura, umění, doprava, sport, historie, ekologie, ...

V některých partiích se bezprostřední odkazy na praxi hledají obtížněji, ale i v neoblíbeném tématu o výrazech s proměnnými se takové příklady dají najít, viz obrázek 1.

Slevové karty

Zákazníci hypermarketu *Zdali* mohou získat některou ze tří slevových karet: Majitelé *bronzové karty* mají při každém nákupu slevu 3 %, vlastníci *stříbrné karty* slevu 5 % a majitelé *zlaté karty* slevu 8 %.

a) Cena zboží bez slevy je *m* Kč. Jaká je cena pro majitele jednotlivých typů karet po slevě?

b) Cena nákupu bez slevy je 862 Kč. Kolik zaplatí u pokladny vlastník bronzové karty, stříbrné karty, zlaté karty?

Obr. 1: Ukázková úloha z učebnice ([5], str. 49)

Řada zaváděných pojmů může být *modelována* pomocí *jednoduchých pomůcek.*[1] Modelování je aktivní činnost a žáci se jí rádi zúčastní.

Špejlemi lze znázorňovat vzájemné polohy přímek v rovině i prostoru, úhly různých velikostí, různé tvary trojúhelníků a čtyřúhelníků. Na papírovém trojúhelníku ukáží špejle osy úhlů, výšky, těžnice. Na čtvrtce, na které je narýsována kartézská soustava souřadnic, lze špejlemi modelovat grafy lineárních funkcí a grafické řešení soustav lineárních rovnic.

Další jednoduchou pomůckou je *sada* deseti papírových *karet* s číslicemi 0 až 9, která se dá vhodně užít například v tématu o dělitelnosti přirozených čísel. Žák pracuje s kartami podle zadání vyučujícího nebo některého spolužáka, například:

- „Z karet, které máš před sebou, vyber všechna jednociferná čísla dělitelná třemi."
- „Sestav takové dvojciferné sudé číslo, aby po změně pořadí číslic vzniklo číslo liché."
- „Sestav největší trojciferné číslo dělitelné čtyřmi."

S kartami mohou *hrát* současně dva, tři i čtyři žáci. Vyučující například zadá číslo. Hráči obdrží po čtyřech kartách a mají za úkol vyložit ze svých karet co nejvíce dvojciferných čísel dělitelných tímto číslem.[2]

V hodinách matematiky lze provádět i jednoduché *pokusy.* Z daného počtu kostek z dětské stavebnice se sestavuje těleso, které má mít maximální, resp. minimální povrch.[3] Pomocí čisté a obarvené vody se připravuje roztok v požadovaném poměru. (Tady lze například názorně ukázat, jaký je rozdíl mezi poměry 2 : 1 a 1 : 2.)

---

[1] Ponechávám stranou využití matematických programů pro počítače a interaktivní tabule, které může být i vysoce efektivní.

[2] Další hry a využití karet je v [1].

[3] Řadu dalších úloh s kostkami lze nalézt v [7].

Slovní úlohy jsou samé nesmysly, a proto je nemám ráda

Slovní úlohy, jejichž zdrojem jsou nejrůznější *mimomatematické oblasti*, hrají významnou roli jako příprava pro řešení problémů, se kterými se žák setkává nebo bude v budoucnu setkávat. Aby ale významnost těchto úloh nebyla znevážena a zprofanována, je nutno se vyvarovat takových z nich, které vzhledem ke své nevěrohodnosti a formálnosti mají negativní vliv na žáky. Jedna taková úloha na ukázku:

> Dvě třetiny dětí z vodáckého tábora odešly na výlet, sedmina dětí se šla koupat. Ostatní, 31 chlapců a děvčat, měli různé služby v táboře. Kolik dětí celkem se účastnilo tábora?

V této úloze se spojení s realitou jen předstírá a žáci to mohou podvědomě vycítit. I průměrný žák se může zeptat: „Není to divné, že máme řadu informací o různých skupinách dětí a přitom nevíme, kolik jich je celkem?“

Uvedená úloha mohla vzniknout tak, že bylo potřeba vytvořit slovní úlohu na užití lineárních rovnic. Recept je jednoduchý:

> „Vezmi rovnici $\frac{2}{3}x + \frac{1}{7}x + 31 = x$, za x dosaď počet dětí a umísti je do vodáckého tábora.“

Tímto způsobem se slovní úlohy dají *vyrábět jak na běžícím pásu*, ale není překvapující, že žáky odrazují. Cesta ke slovním úlohám musí jít obráceným směrem – zkoumat reálný život a hledat skutečné problémy, které lze řešit pomocí matematického aparátu, jejž už mají žáci k dispozici.[4]

Slovní úlohy vycházející z reálného života obvykle neodrážejí a nepopisují realitu v celé její šíři a ve všech detailech. Bývá v nich řada zjednodušení, aby žáci byli schopni předložený problém pochopit, matematizovat a vyřešit. Taková zjednodušení ale nesmí

[4] Pokud jsou ale slovní úlohy jasně formulovány jako *hříčky* či *rébusy* („věk otce a syna“, „myslím si číslo“ aj.), pak mají samozřejmě své oprávnění a do výuky matematiky patří.

realitu deformovat a vést k hrubému nesouladu s praxí. Odstrašující příklad:

> Podnikatel si vypůjčil v bance 1 milion korun a ročně splatí 100 000 Kč. Za kolik let dluh splatí? Úroky z úvěru pro zjednodušení neuvažujte.

Z toho, co bylo řečeno, je zřejmé, jak důležitý je *výběr slovních úloh* pro výuku. Základem úspěšného vyřešení úlohy je její detailní rozbor. Žák musí řádně pochopit všechna fakta a situace obsažené v úloze i úkol, který ho čeká. Navíc by měl být *vtažen do děje* a *úlohu vnitřně přijmout* (na základě svých zkušeností s obdobnými problémy či na základě motivačního vstupu vyučujícího). Pokud vyučující usoudí, že úloha bude pro žáky cizorodá a bude je spíše odrazovat, pak nemá smysl ji vůbec uvádět.

Pro žáky bývají atraktivní *optimalizační úlohy*, v nichž se rozhoduje, která z předložených možností je nejvýhodnější (časově, finančně apod.). Jeden příklad na ukázku, viz obrázek 2.

Směna peněz pro přemýšlivé
Pan Datel si chce na zahraniční dovolenou koupit eura.
V první bance účtují za směnu peněz 2 % z vyměňované částky. Ve druhé bance se platí základní poplatek 50 Kč a k tomu 2 % z obnosu, o který vyměňovaná částka převyšuje 3 000 Kč. Předpokládáme, že v obou bankách je stejný směnný kurz.
Poraď panu Datlovi, do které banky se má pro nákup eur vydat.
Napovíme: Bude samozřejmě záležet na tom, kolik korun si bude chtít vyměnit.

Obr. 2: Ukázková úloha z učebnice ([2], str. 59)

V centru pozornosti by mělo být užití grafů lineárních funkcí a znalostí o řešení lineárních rovnic. Pokud ale žáci navrhnou řešit úlohu *pokusně* (na základě volby různých finančních částek), ať to realizují. Uznávání (někdy i primitivních) žákovských postupů řešení může značně přispět ke zvýšení zájmu o slovní úlohy.

Ve společnosti dochází k neustálým změnám. Mění se ceny zboží a služeb, úrokové sazby, ceny za elektřinu a plyn, jízdní řády, sportovní rekordy. To nemůže učebnice spojitě zachytit. A tady je další dobrá příležitost pro aktivní činnost žáků. Žáci mohou sami (podle pokynů vyučujícího) vyhledávat a shromažďovat *aktuální* *údaje*, které se pak využijí například pro řešení úloh z učebnic s novými číselnými údaji. Slovní úlohy se tím stávají pro žáky bližší.

Dalším momentem, který dokáže zvýšit zájem žáků o slovní úlohy, je *místní lokalizace*. Je například podstatný rozdíl, když žák řeší úkoly spojené s vymyšleným jídelním lístkem z učebnice, nebo když má před sebou konkrétní jídelní lístek z restaurace v blízkosti školy. Podobně je tomu i v řadě dalších případů.

Říkají to v televizi, tak to musí být pravda

Denně nás zahlcují reklamy finančních institucí a obchodních společností, dostáváme nejroztodivnější nabídky do poštovních a e-mailových schránek i formou SMS, volají nám či klepou na dveře dealeři se zaručeně nejvýhodnějšími tarify elektřiny a plynu. Na sociálních sítích se šíří neověřené informace, politici nás stále o něčem přesvědčují. A občan se pak nechá často, ke své škodě, snadno zmanipulovat.

Výuka matematiky může a musí žákovi významně pomoci k rozvoji jeho *občanské* (nikoliv jen matematické či finanční) *gramotnosti.*

K rozvíjení schopnosti kriticky posuzovat předložená fakta mohou dobře posloužit úlohy typu „Vyber správnou odpověď“, „Kontroluj“, „Ověř“, „Najdi chybu a oprav ji“. Pro ilustraci dva příklady na obrázcích 3 a 4.

Zkontroluj, zda jsou zápisy správné. Piš *ano – ne*, chyby oprav:

a) $1 < 5$	b) $0 < 4$	c) $-2 > 1$	d) $-4 < 5$
e) $-4 < -5$	f) $-3 < 3$	g) $-1 > 0$	h) $-3 = 3$

Napovíme: Načrtni si číselnou osu.

Obr. 3: Ukázková úloha z učebnice ([4], str. 54)

Vyber správnou odpověď!

Nejmenší trojciferné záporné celé číslo je

$-1\,000$, -900, -100, -999, -1.

Obr. 4: Ukázková úloha z učebnice ([4], str. 56)

Důležité místo mají úlohy typu: „Ověř správnost postupu výpočtu (řešení, konstrukce); pokud najdeš chyby, oprav je a napiš, jak to má být správně.“ Žák se zde učí pozorně číst předložený text z učebnice a následně sám provádět čitelný a přehledný zápis. Řešení shora uvedených typů úloh by mělo vést žáka i k tomu, aby kontroloval výsledky své práce.

V životě je často potřeba porovnávat větší množství předložených informací mezi sebou, hledat shody a rozdíly, nalézat souvislosti. V tomto směru může matematika žáka připravovat poměrně výrazně. Uvažme třeba pojmovou oblast. Pojmy v matematice nechápeme izolovaně, ale hledáme vztahy mezi nimi, zařazujeme je do systémů, třídíme je podle různých kritérií. A v učebnici to lze snadno realizovat. Žák se učí například třídit rovnoběžníky podle vzájemné velikosti sousedních stran, podle vzájemné velikosti úhlopříček, podle velikosti největšího vnitřního úhlu; učí se zjišťovat, které vlastnosti mají obdélník a kosodélník shodné a v čem se odlišují, jaký je vztah mezi čtvercem a pravoúhelníkem atd.[5]

Lidé by měli vyslovovat otevřeně své názory, například na společenské dění, ale podstatné je, aby je také byli schopni umět seriózně zdůvodnit. Pro přípravu na vytváření takových schopností je v matematice široké pole působnosti. V matematice se všechny věty dokazují, matematika bez důkazů není matematikou. Předkládat žákům základní školy formální důkazy samozřejmě nemá smysl. Můžeme je ale vést k tomu, aby pomocí pozorování, pokusů a vlastních zkušeností vytvořili hypotézu. A pak tuto hypotézu, která je v momentě vzniku jen jakýmsi subjektivním názorem, objektivně zdůvodnili. Je ovšem třeba zařazovat jen takové případy, které žáky dostatečně motivují. Jeden příklad je na obrázku 5.

Protipříklady k Pepovu tvrzení najdou žáci snadno (mají už k dispozici obor racionálních čísel). Cesta k hypotéze by pak měla vést přes zkoumání vztahu nerovnosti pro značný počet čísel a přes třídění do skupin „Platí“, „Neplatí“. Vyslovení hypotézy a její ověření by už nemělo být (s eventuální pomocí vyučujícího) příliš náročné.

[5] Detailně je uvedeno v [8].

Z Pepových matematických objevů

$2^2 < 2^3$, $3^2 < 3^3$, $4^2 < 4^3$, …

Pro každé číslo a platí $a^2 < a^3$.

a) Má Pepa pravdu?
b) Najdi aspoň jedno číslo, pro které *Pepova věta* neplatí.
c) Dovedeš říci, pro která čísla *Pepova věta* platí a pro která ne?

Napovíme k c): $a^3 = a \cdot a^2$

Obr. 5: Ukázková úloha z učebnice[6] ([5], str. 74)

Proč musím počítat zpaměti, když mám kalkulačku?

Není výjimkou, když žák při výpočtech typu $8 \cdot 4$, $80 \cdot 0{,}4$, $8\,000 : 40$, $2^2 \cdot 5^2$, $\sqrt{25}$ vezme do ruky kalkulačku. Přitom existuje řada důvodů, proč by měl v takových případech určit výsledek zpaměti:

- Žák trénuje paměť, což není nepodstatné. Navíc úspěšné řešení jednoduchých úloh zpaměti může zvýšit jeho matematické sebevědomí (zvláště když jde o slabšího žáka).
- Žák si při pamětném počítání ujasňuje podstatu uvažovaného objektu. Při výpočtu $2^2 \cdot 5^2$ si podvědomě připomíná definici druhé mocniny. Pokud užije kalkulačku, může jít pouze o formální činnost se symboly, s nimiž není spojen žádný obsah.
- V oboru přirozených čísel, celých čísel a racionálních čísel se objevují pravidla, která si žák řešením co nejjednodušších příkladů zpaměti osvojí nejrychleji. Při pamětném počítání může vyučující bezprostředně ověřovat, zda žák chápe probíranou látku správně.
- Podstatným důvodem, proč pamětné počítání nepodceňovat a nezatlačovat do pozadí, je jeho využití při *odhadování*.

[6] V učebnicích pro druhý stupeň základní školy, které jsem psal společně s docentem J. Kadlečkem, jsme vytvořili fiktivní postavu Pepy Poplety. To je žák, který je velice aktivní, ale zbrklý a často dělá chyby. Získali jsme řadu informací o tom, že Pepa má značný vliv na sebedůvěru žáků. Jedna dívka nám napsala: „Jsem ráda, že Pepa je ještě hloupější než já a že ho mohu opravovat.“

> V praktickém životě mnohdy nepotřebujeme přesný výsledek, stačí nám určitý *odhad.* Odhadujeme potřebné množství barvy na vymalování pokoje, výši úroku při daném vloženém kapitálu a dané úrokové sazbě, porovnáváme finanční výhodnost většího či menšího balení zboží, odhadujeme množství vody v sudu či čas potřebný k projití určité vzdálenosti. Odhad nahrazuje obtížnou úlohu úlohou tak jednoduchou, abychom ji dokázali vyřešit zpaměti.[7]

Dříve než učebnice začne předkládat žákovi úlohy na odhady, musí ho samozřejmě naučit zaokrouhlovat. Navíc by ho měla vést aspoň v některých případech k tomu, aby si své odhady zkontroloval výpočtem (a tím se přesvědčil, že odhaduje správně). Pro ilustraci dva příklady, viz obrázky 6 a 7.

Ondřej si v samoobsluze vybral pět tvarohových koláčů po 7,90 Kč a dva jablkové koláče po 9,70 Kč.

a) Odhadni, zda mu bude při placení stačit 60 Kč.
b) Vypočítej přesně, kolik korun zaplatí.

Obr. 6: Ukázková úloha z učebnice ([3], str. 48)

Délka hadice

Paní Dušková kupuje 30 metrů hadice na kropení zahrady. Prodavač odhaduje délku zbytku stočené hadice: zbytek má 14 závitů a průměr závitu je přibližně 60 cm.

a) Odhadni zpaměti, zda bude tento zbytek stačit, nebo zda musí prodavač 30 metrů odměřit z nového balíku.
b) Jaká je přibližně délka zbytku?

Obr. 7: Ukázková úloha z učebnice ([6], str. 51)

Pokud se v úloze vyskytují náročnější numerické výpočty, využijeme samozřejmě kalkulačku. Správnost výsledků na kalkulačce musí být žák ale schopen kontrolovat – a nejrychlejší kontrolou správnosti je právě odhad výsledku pomocí pamětného počítání se zaokrouhlenými údaji.

[7] O odhadování lze nalézt více v [9].

Závěr

Matematika na základní škole není jednoduchý předmět, klade na žáka i vyučujícího značné nároky. Učebnice matematiky by jim oběma mohly pomoci. Pokud jsou učebnice koncipované promyšleně, odborně bez chyb a metodicky dobře zpracované, měly by být maximálně využity. Vyučujícímu budou sloužit jako vhodný zdroj a odrazový můstek pro jeho pedagogickou činnost, žákovi jako základní literatura.

Literatura

[1] Odvárko, O. & Kadleček, J. (1998). *Knížka pro učitele k učebnicím matematiky pro 6. ročník základní školy.* Praha: Prometheus.

[2] Odvárko, O. & Kadleček, J. (2013). *Matematika pro 9. ročník základní školy, část 1.* Praha: Prometheus.

[3] Odvárko, O. & Kadleček, J. (2015). *Matematika pro 6. ročník základní školy, část 2.* Praha: Prometheus.

[4] Odvárko, O. & Kadleček, J. (2016). *Matematika pro 7. ročník základní školy, část 1.* Praha: Prometheus.

[5] Odvárko, O. & Kadleček, J. (2018). *Matematika pro 8. ročník základní školy, část 1.* Praha: Prometheus.

[6] Odvárko, O. & Kadleček, J. (2018). *Matematika pro 8. ročník základní školy, část 3.* Praha: Prometheus.

[7] Odvárko, O. & Robová, J. (2015). Stavby z kostek. *Matematika-fyzika-informatika*, 24, 81–87.

[8] Odvárko, O. & Robová, J. (2015). Čtyřúhelníky pod mikroskopem. *Matematika-fyzika-informatika*, 24, 321–330.

[9] Odvárko, O. & Robová, J. (2016). Odhady a odhadování v matematice. *Matematika-fyzika-informatika*, 25, 335–342.

Abstract

The paper is focused on the influence of secondary school mathematics textbooks on pupils' mental enhancement and society integration. The attention is especially paid to mathematics theory and practice conjuction, role of word problems, signifikance of creation and verification of hypotheses and importance of estimations.

Oldřich Odvárko
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: odvarko@karlin.mff.cuni.cz