Učitel matematiky

František Kuřina

Jak to vlastně je? Rovnice

Učitel matematiky, Vol. 28 (2020), No. 3, 173–182

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148644`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2020

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

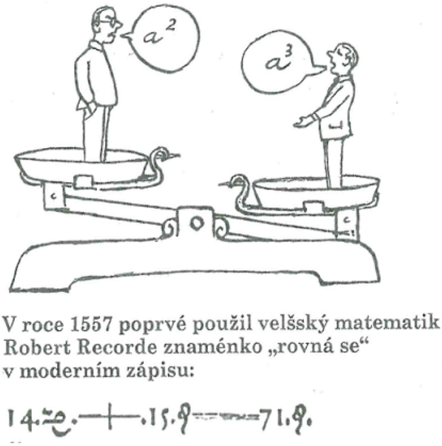
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

Jak to vlastně je?[1]

ROVNICE

František Kuřina

Učebnice *Matematika pro trojkaře* (Klaus & Fišerová, 2013) uvádí kapitolu o rovnicích Slívovým obrázkem a historickou poznámkou, které reprodukujeme na obrázku 1.



Obr. 1

Rovnice jsou důležitou složkou matematického vzdělávání na základní i střední škole. Jsou významným příkladem tzv. určovacích úloh, které *Jan Vyšín* (1908–1971) objasňuje v knize *Metodika řešení matematických úloh* takto: „Je dána množina Ω matematických objektů. Mezi objekty množiny Ω máme vyhledat

[1]Tímto nadpisem uvádíme sérii krátkých článků o různých otázkách, které souvisejí s vyučováním matematice. Přáli bychom si, aby čtenáři na příspěvky reagovali, kriticky nebo doplněním. Inspirací k nadpisu byla kniha *Jak to řešit?* (Polya 2016).

všechny takové objekty, které vyhovují daným podmínkám, neboli které mají požadované vlastnosti“ (Vyšín, 1962, s. 6).

Rovnice jsou tedy především úlohy, které máme řešit. Druhým významem slova rovnice je popis určitého matematického útvaru. $3x+4y+5=0$ je rovnice přímky, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ je rovnice elipsy. My se budeme nejdříve zabývat lineárními rovnicemi a jejich řešením.

Jak můžeme pojem rovnice definovat? Na tuto otázku dávají různí autoři různou odpověď.

Ve starší didaktice matematiky (Hruša & Vyšín, 1964) se uplatňuje toto pojetí: „Rovnicí o jedné neznámé rozumíme úlohu rozhodnout, zda existují taková čísla z určitého číselného oboru Ω, pro něž dvě dané funkce f, g jedné proměnné x definované nad oborem Ω nabývají týchž hodnot, a v případě, že taková čísla existují, nalézt je všechna. Tuto úlohu zpravidla zapisujeme

$$f(x)=g(x) \tag{2}$$

a také tento zápis samotný někdy označujeme názvem rovnice“ (Hruša & Vyšín, 1964, s. 147).

Rovnost (2) se běžně užívá i pro tzv. identickou rovnost, to znamená, že (2) platí pro libovolné x z oboru Ω.

Rozdíl v dvojím chápání zápisu (2) lze přirozeně odstranit. Stačilo by pro identickou rovnost užívat jiný symbol (např. $\equiv$) nebo v úloze o řešení rovnice opatřit zápis tzv. „tázacím kvantifikátorem“:

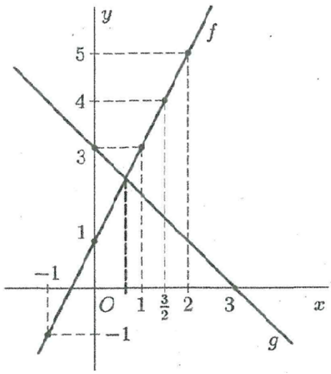
$$?x[f(x)=g(x)]. \tag{3}$$

Tuto možnost navrhl nizozemský didaktik *Hans Freudenthal* (1905–1990). Žádná z uvedených možností se však v didaktice matematiky neujala a rovnost (2) má dvojí význam: jako identická rovnost a jako jakási rovnost „falešná“.

Funkční pojetí rovnice, které jsme výše popsali, lze dobře ilustrovat konstrukcí grafů funkcí $y=f(x)$ a $y=g(x)$. Jde o známé grafické řešení rovnice. Tak např. rovnici

$$2x+1=x+3$$

graficky řešíme znázorněním funkcí $y=2x+1$ a $y=x+3$ podle obrázku 2 z učebnice (Boček et al., 1995, s. 14).



Obr. 2

Pomocí množinového logického jazyka můžeme problematiku rovnice vysvětlit takto: Rovnice $L(x) = P(x)$ je výroková forma, pomocí níž můžeme určit množinu K všech x, která po dosazení do této rovnice dávají pravdivý výrok.

Termín *rovnice* užíváme ve dvou významech:

1. Jako úlohu na určení množiny K.
2. Jako výrokovou formu $L(x) = P(x)$.

To je výklad v duchu knihy (Šedivý, 1969).

Také termín *řešení rovnice* je dvojznačný.

1. Postup určování množiny K (úpravami výrokové formy $(L(x) = P(x))$.
2. Množina K.

Snaha všechny matematické pojmy explicitně definovat, jak požaduje např. učebnice (Bušek et al., 1992, s. 7) není ovšem nejvhodnějším přístupem k matematickému vzdělávání. Doložme to velmi pěkně zpracovanou učebnicí (Boček et al., 1995), která obsahuje odstavce:

1.1. Rovnice $ax + b = cx + d$.
1.2. Řešení rovnice v daném oboru.
1.3. Zkouška při řešení rovnice.
1.4. Grafické řešení rovnice $ax + b = cx + d$.
1.5. Rovnice $(ax + b) : (cx + d) = 0$.
1.6. Lineární rovnice a shrnutí.

Nikde na 22 stránkách textu nepadne otázka „Co to je rovnice?“ a ve Shrnutí najdeme: „Rovnici, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na tvar $px + q = 0$, kde $p, q \in \mathbb{R}$, se nazývá *rovnice lineární* a výraz $px + q$, kde $p, q \in \mathbb{R}, p \neq 0$, se nazývá *lineární dvojčlen.*“ Přitom kapitola o lineárních rovnicích obsahuje 18 řešených příkladů a 26 úloh. Pokládám takovýto, řekněme „implicitní“, přístup k matematickým poznatkům v mnoha případech za vhodný. Je promyšleně realizován např. v učebnicích A, B, C, D, E, F *Milana Hejného* z let 2015–2018 (Hejný et al., 2015–2018).

Rovnice se zde zavádějí příklady rovnic mincových, váhových, šipkových a algebraických již v knize A, pokračují v knihách B a C, kde se již vyskytují i soustavy rovnic s parametrem:

Řešte soustavu

$$\begin{aligned}(p-3)x - y &= p - 1\\ 2x + py &= p - 4, \qquad \text{pro } p = 4, 3, 2, 1.\end{aligned}$$

Soustavy rovnic se rozvíjí v učebnici D: váhová rovnice s krychličkou a válečkem a slovní úlohy. V učebnici E se řeší rovnice s neznámými $\star, x, u, v, a, b$; uvedeny jsou i rovnice kvadratické, např.:

Najděte kořen rovnice $a^2 + 6a + 9 = 49$.

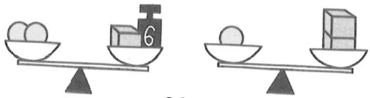
V učebnici E se řeší např. úlohy:

- Řešte soustavu rovnic

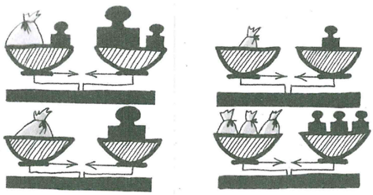
$$\begin{aligned}r + 1 &= 2r - s\\ 2r &= 10 + s.\end{aligned}$$

- Najděte t tak, aby platilo: $(8 - t)^2 = 49$.

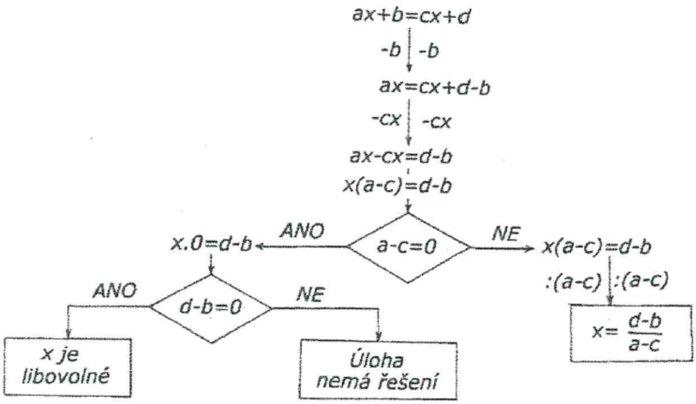
V učebnici F se řeší soustavy váhové a algebraické a snad jako jediné poučení o řešení soustav jsou zařazeny dvě „Domluvy“ uváděné příklady s řešeními formou dialogu Ariana a Elmara. Týkají se názvů *dosazovací a sčítací způsob řešení soustavy.* Nikde v těchto učebnicích jsem nenašel explicitní vysvětlení např. ekvivalentních úprav řešení rovnic. Vše se poznává např. na váhových modelech. V učebnici C je např. úloha: Vyřešte soustavu váhových rovnic na obrázku 3. Váhové inspirace pro úpravu rovnic se vyskytují snad ve všech našich učebnicích. Na obrázku 4 je ukázka z učebnice (Herman et al., 1996). Blažena Součková používá k zdůraznění „oboustranné“ úpravy rovnic „dvojitých zápisů“, jak je vidět ze znázornění diskuse o řešení lineární rovnice na obrázku 5.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Všimněme si soustavy

$$\begin{aligned} &ax + by + c = 0 \\ &0x + 0y + 0 = 0, \qquad\qquad \text{kde } a \neq 0. \end{aligned}$$

Jejím řešením je množina všech dvojic $[x, y]$ reálných čísel, které splňují první rovnici. Za jednu neznámou, např. y, můžeme volit libovolné reálné číslo, např. t, a x můžeme z rovnice $ax + bt + c = 0$ vypočítat. Platí tedy

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{b}{a} \cdot t - \frac{c}{a} \\
y &= t
\end{aligned}
$$

To je ovšem parametrické vyjádření přímky

$$X = A + t\vec{u},$$

kde $A = \left[[-\frac{c}{a}; 0\right]$, $\vec{u} = \left(-\frac{b}{a}, 1\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Podobně lze z rovnice $ax + by + c = 0$ odvodit parametrické vyjádření roviny.

Rovnici přímky $3x + 4y + 5 = 0$ a rovnici elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ lze tedy chápat jako řešení jedné rovnice o dvou neznámých, z nichž jednu lze volit a druhou vypočítat. Druhý význam těchto rovnic jako popisu geometrických útvarů, jak jsem o tom mluvil na začátku, má tedy význam pouze formální.

Žáci střední školy by si měli uvědomovat, že rovnice $ax + by + cz + d = 0$ může být chápána jako rovnice roviny. Tyto otázky se, jak známo, řeší v analytické geometrii (viz např. učebnice (Kočandrle & Boček, 1995)). Všímání si souvislostí různých odvětví matematiky se někdy zanedbává. Vím ze zkušenosti, jak maturantům dělají potíže např. úlohy:

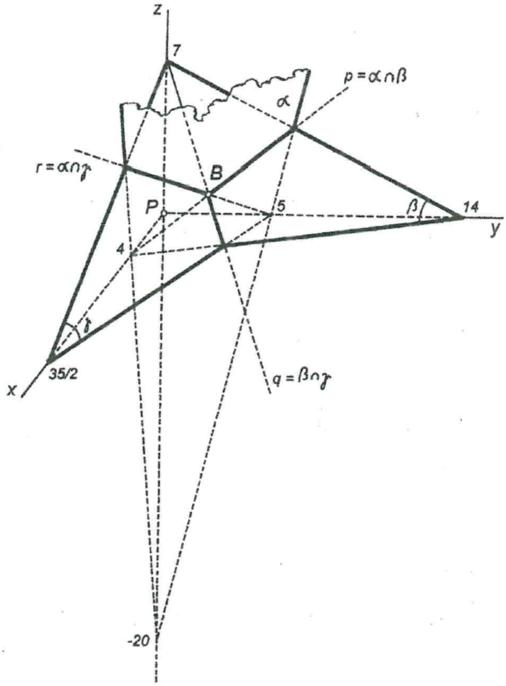
Znázorněte roviny $y - 5 = 0$, $x + 2y = 0$, $x + 2y + 5z + 4 = 0$ v kartézské soustavě s osami x, y, z. Kdyby bylo časově možné zařadit i úlohy typu Řešte graficky i početně soustavu

$$
\begin{aligned}
5x + 4y - z &= 20, \\
7x + 2y + 4z &= 28, \\
2x + 7y + 5z &= 30,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

přimlouval bych se za to. Soustava má, jak snadno zjistíme výpočtem, řešení $[2, 3, 2]$ a znázornění rovin

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 5x + 4y - z = 20\right\} \\
\beta &= \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 7x + 2y + 4z = 28\right\} \\
\gamma &= \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 2x + 7y + 5z = 35\right\}
\end{aligned}
$$

v kartézské soustavě s osami x, y, z vede ke grafickému řešení soustavy (4) na obrázku 6.



Obr. 6

Kvadratické rovnice

S překvapením jsem zjistil, že existují současné učebnice (např. Cizlerová et al., 2013), nebo příručky (Liška, 2015), v nichž vzorec pro řešení kvadratické rovnice „padá z neznámého místa matematického nebe". Za vhodný považuji postup, který doporučuje slovenský matematik Zbyněk Kubáček (2010): uvést vzorec, nacvičit jeho používání všemi žáky a pak s nejlepšími žáky vzorec odvodit.

Podle mého názoru je učivo o kvadratické rovnici vhodné k neformální diferenciaci třídy. Všichni žáci by se měli naučit vypočítat podle vzorce kořeny kvadratických rovnic s přirozenými koeficienty; je to koneckonců jen jistá „práce s daty“. Pak můžeme řešit např. rovnice $x^2 = 4$, $(x+4)^2 = 25$, $x^2 + 8x + 16 = 25$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, až žáci poznají „doplnění na úplný čtverec“. Tím je připravena cesta k odvození příslušného vzorce. Pak následuje řešení úloh, které ke kvadratickým rovnicím vedou.

Středoškolská matematika se ovšem zabývá např. i rovnicemi s parametry, rovnicemi algebraickými, iracionálními, exponenciálními, logaritmickými a goniometrickými. Touto problematikou se zde nebudeme zabývat. Nebudeme se zabývat ani řešeními slovních úloh pomocí rovnic.

Tematiku rovnic můžeme sledovat v celé kulturní historii lidstva. Stručný přehled o tom, ale také o rovnicích v našich historických učebnicích, lze najít např. v *Didaktice matematiky* Josefa Poláka (2014).

Rovnice jsou důležitou složkou matematického kurikula. Nejen pro jejich vzdělávací hodnoty (práce s proměnnými, úprava algebraických výrazů, početní technika, ...), ale hlavně proto, že hrají důležitou roli v nejrůznějších aplikacích matematiky.

Je ovšem třeba uznat, že řešení rovnic může mít i formální charakter, kterému není současná didaktika příliš nakloněna. Ve sbírce úloh (Hromádko & Strnad, 1879) najdeme 108 lineárních rovnic různé obtížnosti, např. rovnice

$$x + 15 = 25,$$
$$\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x - 1\right) - 1\right] - 1\right) - 1\right\} = 0,$$
$$\frac{x^4 + ax^3}{x^2 + ax + b} = x^2 - b.$$

Sbírka Daga Hrubého (2008) obsahuje 20 lineárních rovnic, např.

$$3(1 - x) = 7 - 3x,$$
$$(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6(x^2 + x + 1).$$

Polákova *Středoškolská matematika v úlohách* (1996) uvádí k řešení 11 úloh, např.

$$5 - x = 2x - 7$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \text{ s neznámou } R_1.$$

Sbírka úloh z matematiky Jarmily Novotné (1997) obsahuje jen 8 lineárních rovnic, např.

$$2x - 3 = 5,$$

$$\frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 7.$$

Řešení rovnic je příkladem práce podle určitého algoritmu, který ovšem nebývá vždy explicitně uveden. Tuto problematiku bychom neměli zanedbávat.

Má příručka *Praktikum algebraické techniky* z roku 1992 obsahuje rozsáhlý soubor rovnic z učebnic našich, německých, bulharských, ruských a francouzských. Obsahuje i ukázky aplikací algebry v geometrii.

Literatura

[1] Boček, L., Bočková, J., & Charvát, J. (1995). *Matematika pro gymnázia. Rovnice a nerovnice.* Prometheus.

[2] Bušek, I., Boček, L., & Calda, E. (1992). *Matematika pro gymnázia. Základní poznatky.* Prometheus.

[3] Cizlerová, M., Krupka, P., Polický, Z., & Škroupková, B. (2013). *Matematika pro střední školy. Výrazy, rovnice a nerovnice.* Didaktis.

[4] Doboš, J. (2003). *Rovnice a nerovnice.* Bolchazy-Carducci Publishers.

[5] Hejný, M., Šalom, P., & Urbánek, L. (2015–2018). *Matematika pro druhý stupeň základní školy A, B, C, D, E, F.* Fraus.

[6] Herman, J., Chrápavá, V., Jancovičová, E., & Šimša, J. (1996). *Matematika. Rovnice a nerovnice.* Prometheus.

[7] Hromádko, F., & Strnad, A. (1879). *Sbírka úloh z algebry.* JČM.

[8] Hrubý, D. (2008). *Matematická cvičení pro střední školy.* Prometheus.

[9] Hruša, K., & Vyšín, J. (1964). *Vybrané kapitoly z metodiky vyučování matematice na základní devítileté škole*. SPN.

[10] Klaus, V., & Fišerová, K. (2013). *Matematika pro trojkaře*. Fortuna.

[11] Kočandrle, M., & Boček, L. (1995). *Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie*. Prometheus.

[12] Kubáček, Z. (2010). *Matematika pre 2. ročník gymnázií*. Orbis Pictus Istropolitana.

[13] Kuřina, F. (1992). *Praktikum algebraické techniky*. MÚ AV ČR.

[14] Liška, M. (2015). *Matika pro spolužáky. Opakování, Základní poznatky. Rovnice a nerovnice*. Meg-cz.

[15] Novotná, J. (1997). *Sbírka úloh z matematiky*. Scientia.

[16] Polák, J. (1996). *Středoškolská matematika v úlohách*. Prometheus.

[17] Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky*. Fraus.

[18] Polya, G. (2016). *Jak to řešit?* Matfyzpress.

[19] Součková, B. (1978). *105 hodin algebry v 8. ročníku*. JČMF.

[20] Šedivý, J. (1969). *O modernizaci školské matematiky*. SPN.

[21] Vyšín, J. (1962). *Metodika řešení matematických úloh*. SPN.

Abstract

The article presents different ways of understanding the concept of equation at the elementary school level. It includes illustrations from several textbooks and emphasises the need to connect algebra and geometry.

František Kuřina
Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové
e-mail: kurinovi@gmail.com