Učitel matematiky

František Kuřina; Naďa Vondrová

Jak to vlastně je? Nekonečno

Učitel matematiky, Vol. 29 (2021), No. 2, 111–127

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149002

Jak to vlastně je?

NEKONEČNO

František Kuřina, Naďa Vondrová

Český básník Viktor Dyk (1877–1931) objevil nekonečno v labské krajině: „Z té české roviny / kde volně teče Labe / kult nekonečna vyrostl / v duši slabé.“ Spisovatel Bohumil Hrabal (1914–1997) uzřel nekonečno na krabičce zápalek:

> Myslívám na tu jistou dospělost, kterou jsem dosáhl možná už jako chlapec, když jsem seděl na chodbě na kufru a díval se pozorně na krabičku matičních sirek, na kterých byla nálepka, na které byla vyobrazena žena, která na rukou měla děťátko, které v prstech drželo tu samou krabičku matičních sirek, a tedy na té malinké krabičce byl mnohem menší obrázek ženy, která na ruce držela ještě menší děťátko, které drželo ještě menší krabičku matičních sirek, zmenšujících se dál a dál až do nekonečna. (Hrabal, 2000, s. 22)

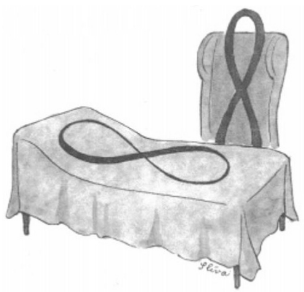
Známe významy pouze konečného počtu slov, ale rozumíme nekonečnému počtu vět (Altman, 2005, s. 102), neboť ke každé větě můžeme přidat další slovo, čímž dostaneme větu novou.

Petr Vopěnka vysvětluje nekonečno takto:

> Nekonečným slove to, co nemá žádného východiska nebo hranic, ačkoliv by je podle své povahy míti mělo. Z těchto Aristotelových slov vane snad vůbec nejstarší podoba nekonečna, objevená pravděpodobně již ve starověkém Egyptě.
>
> Příkladem dění, pro něž si zjednáváme porozumění nekonečnosti tohoto druhu, je pohyb probíhající po kružnici. Takové dění nemůže mít konec, neboť při tomto

> pohybu procházíme stále týmiž místy a čím rychleji se budeme po kružnici pohybovat, tím častěji budeme stále týmiž místy procházet. (Vopěnka, 1989, s. 473)

To je tzv. *bludné nekonečno*, jehož prvním symbolem byla kružnice a následně ležatá osmička, „která lépe než kružnice postihuje spletitost a bezvýchodnost bludných, to je do týchž míst stále se vracejících cest“ (Vopěnka, 1989, s. 470). Tento tvar připomeňme kresbou Jiřího Slívy (obr. 1).



Obr. 1: Ležatá osmička v pojetí Jiřího Slívy („Freud vyšetřuje nekonečno“; z obálky knihy Kuřina & Půlpán, 2006)

Všimněme si nyní *nekonečna potenciálního* a *nekonečna aktuálního.* Vyjděme z užití slov potenciální a aktuální v běžném jazyce. Potenciálním čtenářem tohoto textu je každý, kdo umí česky. Aktuálními čtenáři jsou pouze ti, kteří se k této četbě odhodlali. O potenciálním nekonečnu mluvíme v případě pouhých možností, aktuální nekonečno charakterizují uskutečněné jevy.

Potenciální nekonečno

Následující příklady ilustrují potenciální nekonečno, jímž rozumíme neomezený, nikdy nekončící proces.

Příklad 1. Přičítáme-li k číslu 0 postupně číslo 1, roste výsledek „nade všechny meze“. K libovolnému přirozenému číslu n můžeme sestrojit číslo $n + 1$, které je větší, čímž dostaneme množinu $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ všech přirozených čísel. Postupná konstrukce dalších a dalších přirozených čísel je potenciálně nekonečný proces. (Kdybychom mohli v tomto procesu pokračovat bez omezení, dostali bychom aktuálně nekonečnou množinu, k níž už nelze přidat žádné přirozené číslo.)

Příklad 2. Úsečku můžeme bez omezení prodlužovat „na obě strany". (Kdybychom mohli prodlužovat úsečku bez omezení, dostali bychom celou přímku, kterou již nelze prodloužit.)

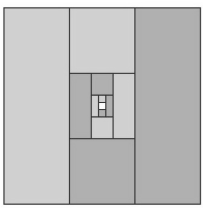
Příklad 3. Funkce $y = 2x$ je rostoucí v intervalu $(0, \infty)$. Roste-li x nade všechny meze, roste nade všechny meze i y.

Příklad 4. Funkce $y = \frac{1}{x}$ je klesající v intervalu $(0, \infty)$, roste-li x nade všechny meze, klesá bez omezení i y. V takovém případě říkáme, že funkce $y = \frac{1}{x}$ má v nevlastním bodě $+\infty$ limitu nula, a píšeme

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{(Hrubý \& Kubát, 1997, s. 57).}$$

Příklad 5. Souvislost potenciálního a aktuálního nekonečna výstižně ilustruje úloha z učebnice, kterou reprodukujeme na obrázku 2.

Čtverec je rozdělen na třetiny. Levá třetina je vybarvena žlutě, pravá zeleně. Prostřední třetina je rozdělena na třetiny. Horní část je vybarvena žlutě, dolní zeleně. Tak se pokračuje ve vybarvování dále, až do nekonečna.



a) Jaká část čtverce nakonec bude vybarvena žlutě a jaká zeleně?

b) Zjistěte součet nekonečné řady $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

Obr. 2: Geometrické znázornění souvislosti potenciálního a aktuálního nekonečna (Hejný et al., 2018, s. 25)[1]

[1] V Příručce pro učitele autoři vysvětlují, jak se ke správnému výsledku dostane vlastní úvahou i žák základní školy. Úloha je zařazena v učebnici F, která obsahuje rozšiřující učivo.

Aktuální nekonečno

Nevíme, kdo jako první v historii formuloval otázku, zda dvě nekonečné množiny jsou „stejně velké". Ovšem, množiny, které „neustále rostou", tedy množiny potenciálně nekonečné, nelze porovnávat. Snad to byl důvod vzniku myšlenky potenciálně nekonečné množiny „aktualizovat", určit jejich kardinální čísla (tedy „počet jejich prvků"), jako by byly dovedeny „do konce".

> Aktuálním nekonečnem rozumíme tu podobu jevu nekonečna, která se ukazuje na díle vytvořeném *vyčerpáním* všech příslušných *nevyčerpatelných možností.* (...) Již v samotném vymezení aktuálního nekonečna je až příliš nápadný protimluv. Požaduje se, aby to, co je nevyčerpatelné, bylo vyčerpáno, aby neukončitelné dospělo ke svému konci, tedy vlastně aby se to, co je neukončené, v jistém smyslu se stalo zároveň konečným. (Vopěnka, 1998, s. 113)

Můžeme se divit, že se významný německý matematik Georg Cantor (1845–1918) nesetkal s porozuměním, když rozpracoval teorii nekonečných mohutností a aktuálního nekonečna? Např. vlivný německý matematik Leopold Kronecker (1823–1891) označil Cantorovo „studium věcí, které neexistují, za totální humbuk" (Barrow, 2007, s. 76). Cantorova práce z roku 1874 byla plně doceněna až v roce 1897 a v roce 1926 David Hilbert napsal, že „Cantorovo matematické nekonečno se stalo nezpochybnitelnou částí matematiky, rájem, z něhož nás nikdo nevyžene" (Barrow, 2007, s. 101).[2]

Otázka existence aktuálně nekonečných množin je dodnes živá (a to i když existenci chápeme jako neexistenci sporu). Např. podle francouzského matematika Henriho Poincarého (1854–1912) aktuální nekonečno neexistuje, přičemž „zastánci Cantorovy teorie na to zapomněli, a proto se dostali do rozporů" (Kůrka et al., 2011,

[2]Cantor byl v roce 1904 vyznamenán za své zásluhy Sylvestrovou medailí, tehdy nejvyšším oceněním pro matematiky.

s. 156). Kateřina Trlifajová se vyjadřuje podobně: „‚Aktuální nekonečno' v našem světě neexistuje. Na tom se shodují všichni od Aristotela po současnost." (Kůrka et al., 2011, s. 102) Naproti tomu Eduard Fuchs cituje výrok Leibnizův:

> Jsem natolik pro aktuální nekonečno, že namísto, abych připustil, že se ho příroda děsí, jak se běžně říká, jsem přesvědčen, že je má v oblibě všude, aby lépe zdůraznila dokonalost svého Tvůrce. (Fuchs, 1999, s. 107)

Jak to tedy vlastně je? Než se pokusíme o odpověď, připomeneme několik pojmů.

Dvě množiny jsou ekvivalentní, existuje-li prosté zobrazení jedné na druhou. Takové dvě množiny mají stejný počet prvků. Ovšem ekvivalentní mohou být i množiny nekonečné. O takových množinách řekneme, že mají stejné *kardinální číslo* neboli stejnou *mohutnost*. Nekonečné množiny tak můžeme srovnávat co do velikosti podle jejich kardinálních čísel, jako by byly konečné. Tento fakt však nepřináší nic převratného. Např. Peter Zamarovský (2018) cituje Vojtěcha Kolmana, podle něhož na tom, zda nekonečno nazýváme potenciálním či aktuálním, v širším dějinném horizontu nezáleží, či Pavola Zlatoše, který stejnou myšlenku vyjádřil lapidárně:

> Otázka, či je všetkých prirodzených čísel aktuálně alebo len potenciálne nekonečne mnoho, je pre „pracujících" matematikov nanejvýš témou na nezaväznu diskusiu pri šálku kávy alebo pohári vína. (Zamarovský, 2018, s. 220)

Diskuse o existenci aktuálně nekonečných množin tak postrádá smysl. Tento pojem se neuvádí ani v monografiích o teorii množin (např. Alexandrov, 1954; Fuchs, 1999; Sľupecki & Borkowski, 1967; Šalát & Smítal, 1986) a není ani tématem středoškolské výuky. Sám Cantor napsal: „Aktuální nekonečno lze pouze uznat, ale ne poznat" (cit. podle Kolman, 2008, s. 400).

Nekonečně malé veličiny

V příkladu 4 jsme si mohli všimnout, že když jedna veličina (x) roste nade všechny meze, druhá veličina (y) bez omezení klesá. Tím se dostáváme k představě pojmu nekonečně malý.

> Takzvaná vyšší matematika – jak byla nazývána ta část matematiky, která se opírala o infinitesimální kalkul – byla založena na *kalkulacích s nekonečně malými veličinami*. Přitom nejprve především prostřednictvím podílu dvou a součtu nekonečně mnoha těchto veličin bylo možno získávat veličiny již přístupné dosavadnímu geometrickému názoru. Podle toho byl infinitesimální kalkul tradičně rozdělován na kalkul diferenciální a kalkul integrální.
>
> Tajemná povaha nekonečně malých veličin však infinitesimálnímu kalkulu dodávala mystický nádech, čímž samotný jeho objev nabýval v očích mnohých lidí rozměrů až nezasloužených; zároveň ale u nejednoho stroze racionálně uvažujícího matematika vzbuzovala pocit nejistoty. Podezření, že matematika pracuje s pojmy přinejmenším nejasnými, bylo zesilováno nepříjemnými chybami, jichž se mohl dopustit každý, kdo si při kalkulacích s nekonečně malými veličinami počínal nepozorně. Avšak na druhé straně kalkulace opírající se o jakýsi nevědomý nový geometrický názor, týkající se právě nekonečně malých veličin, vedly neomylně k udivujícím a nezpochybnitelným výsledkům. (Vopěnka, 1996, s. 3)

Pokusy o přesné definování pojmu nekonečně malé veličiny ztroskotaly, až na ně matematici postupně rezignovali. K tomu dostali příležitost prostřednictvím práce d'Alemberta, který zavedl pojem limity.

> O tento pojem se pak matematická analýza – nyní již nikoliv nekonečně malých veličin – mohla opřít a nahrazovat jím v různých úvahách nekonečně malé ve-

> ličiny, a to i v době, kdy aktuální nekonečno již v matematice zdomácnělo.
>
> Toto přetváření infinitesimálního kalkulu do ε, δ-analýzy netoliko uspokojovalo nároky matematiků na přesnost a jasnost, ale otevřelo jim nová široká pole působnosti. Nahrazování úvah o nekonečně malých veličinách úvahami o limitách nebylo totiž záležitostí zcela mechanickou, ale nezřídka vyžadovalo přístupy tvůrčí. (Vopěnka, 1996, s. 4)

Přes toto výrazně kladné hodnocení současných metod matematické analýzy je Vopěnka zastáncem rehabilitace nekonečně malých veličin.

> Odmítnutí Newtonova a Leibnizova pojetí infinitesimálního kalkulu matematiky devatenáctého a dvacátého století – vyvolané ať již jejich neochotou či neschopností domyslet a dotvořit základní pojmy, o něž se původní pojetí tohoto kalkulu opíralo – bylo jedním z největších omylů nejen matematiky, ale evropské vědy vůbec. (Vopěnka, 1996, s. 1)

Zájemcům o tuto problematiku doporučujeme Vopěnkovu práci z roku 1996 a v klasickém pojetí zpracovanou učebnici (Hrubý & Kubát, 1997).

Nekonečné množiny v aritmetice

Mohutnost množiny všech přirozených čísel se obvykle označuje $\aleph_0$ (alef je první písmeno hebrejské abecedy). Tutéž mohutnost mají všechny množiny, jejichž prvky lze uspořádat do posloupnosti. Takové množiny se nazývají *spočetné*.

Spočetnými jsou tedy např. množiny

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$,

$\mathbb{N}_k = \{k, 2k, 3k, 4k, 5k, \ldots\}$, k je libovolné nenulové číslo,

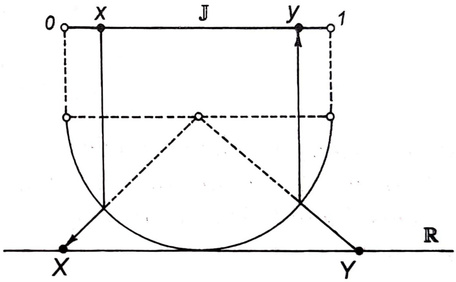
$A = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = a_1 + (n-1)d$, aritmetická posloupnost s diferencí d,

$G = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, geometrická posloupnost s kvocientem q,

$P = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$, množina prvočísel.

Tyto výsledky jsou podrobně vyloženy např. v učebnici (Odvárko, 1995). Cantor dokázal důvtipnými metodami, že spočetná je i množina všech čísel racionálních, ale že množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel i množina J všech reálných čísel intervalu $(0, 1)$ jsou *nespočetné*. Jejich mohutnost je $\aleph_1$ (alef jedna, viz např. Fuchs, 1999, s. 27).

Je známo, že číselná osa je prostým obrazem množiny $\mathbb{R}$, přičemž vnitřek úsečky $(0, 1)$ je obrazem intervalu $J(0, 1)$. Na přímce je tedy „stejně“ bodů jako na úsečce J. Ekvivalenci množin $\mathbb{R}$ a J lze prokázat i dvojím promítáním podle obrázku 3.

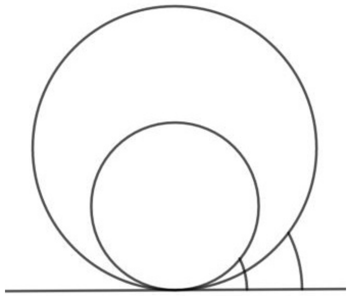


Obr. 3: Ekvivalence množin R a J (Kuřina & Půlpán, 2006, s. 51)

Toto tvrzení zdánlivě odporuje Eukleidovu axiomu 3: „Celek je větší než díl.“ (Eukleides, 2007, s. 43). Eukleides ovšem nechápe geometrické útvary jako množiny bodů. Tyto útvary reprezentují jejich velikosti. Axiom 3 bychom tedy mohli interpretovat takto: Přímka je delší než jakákoliv úsečka, která je její částí. V tomto smyslu je přímka nekonečně veliká. Je to analogie pojmu *nekonečně malý*, který Vopěnka vysvětluje ve svém komentáři v Eukleidových *Základech* (viz obr. 4).

Podle obvyklého pojetí svírá tečna s křivkou nulový úhel, to je vlastnost tečny. Vopěnka vysvětluje, jak k tomuto výsledku dojít. Přijmeme-li představu, že úhel přímky s kružnicí je na obrázku vyznačen obloučkem, bude platit následující:

> Úhel, který svírá tečna kružnice s obloukem této kružnice, je menší než každý ostrý úhel, které svírají dvě různé úsečky. Je to úhel nekonečně malý. I nekonečně malé úhly mohou být různě velké. Například úhel, který svírá tečna s obloukem kružnice o větším poloměru, je menší než ten, který svírá tečna s obloukem kružnice o menším poloměru. (Vopěnka v knize [Eukleides, 2007, s. 108])



Obr. 4: Nekonečně malý úhel

Další pro žáky překvapivé tvrzení je, že množina bodů vnitřku kruhu má stejnou mohutnost jako množina bodů jeho vnějšku. Jeho platnost snadno nahlédneme na základě prostého zobrazení vnitřku kruhu na jeho vnějšek např. tak, že libovolnému bodu X vnitřku kruhu $K(S, r)$ přiřadíme bod X' polopřímky SX tak, že platí $|SX| \cdot |SX'| = r^2$, kde X' je obraz bodu X v kruhové inverzi (viz např. Kuřina, 2002, s. 226).

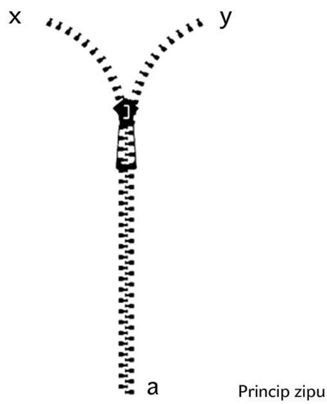
Přirozeně se naskýtá otázka, zda mají stejnou mohutnost množiny J a kartézský součin $J \times J$. I zde je odpověď (pro mnohé překvapivě) kladná. To nyní dokážeme podle (Zamarovský, 2018, s. 148–149).

Označme souřadnice bodu uvnitř čtverce x a y. V desetinném zápise mají tyto souřadnice formu $x = 0{,}x_1x_2x_3x_4\ldots$, $y = 0{,}y_1y_2y_3y_4\ldots$, kde $x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots$ jsou číslice 0 až 9. (Aby bylo přiřazení bodů a racionálních čísel jednoznačné, vyloučíme zápisy čísel s periodou, takže např. místo 0,2999… budeme psát 0,3 atp.)

Nyní vytvoříme nové číslo, které je k této dvojici čísel jednoznačně přiřazené:

$$a = 0{,}x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$$

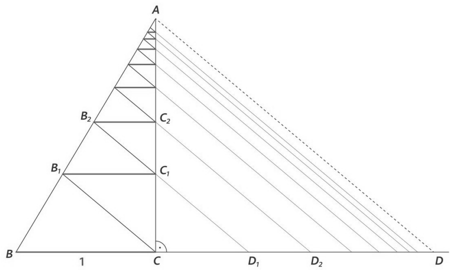
Vznik tohoto čísla si můžeme představit pomocí zipu, jeho zuby jsou číslice z desetinného rozvoje čísel x a y (obr. 5). Toto číslo lze vidět jako souřadnici jistého bodu A jednotkové úsečky. Tedy každému bodu čtverce odpovídá bod úsečky. „Zip" můžeme naopak rozepnout a každému bodu úsečky přiřadit bod čtverce (tj. dvě souřadnice). Tímto způsobem Cantor dokázal, že existuje vzájemně jednoznačné přiřazení (bijekce) bodů úsečky a čtverce. Podobně můžeme např. ukázat, že na úsečce délky 1 cm je „stejně" bodů jako v celém trojdimenzionálním prostoru.



Obr. 5: Princip zipu pro vznik čísla a (Zamarovský, 2018, s. 148)

Závěrem tohoto oddílu dodejme, že posloupnosti, které jsou snad nejběžnějšími příklady nekonečných množin, jsou učivem střední školy (viz např. učebnice Odvárko, 1995; Čech et al., 1953). Milan Hejný ovšem odvážně zařazuje posloupnosti aritmetické i geometrické již na základní školu (do učebnice F s rozšiřujícím učivem matematiky). Např. podle úlohy na obrázku 6, která vizualizuje geometrickou posloupnost a propojuje ji s podobností trojúhelníků a čtyřúhelníků, mají žáci odvodit vzorec pro součet nekonečné geometrické řady.

Narýsujeme pravoúhlý trojúhelník ABC a bod B_1, který dělí přeponu AB v poměru $2:1$. Dále sestrojíme body $C_1, B_2, C_2, B_3, C_3, \ldots$ pomocí rovnoběžek. Nakonec sestrojíme body $D_1, D_2, \ldots, D$.



Když $|BC| = 1$, zjistěte:

a) $|B_1C_1|, |B_2C_2|, |B_3C_3|, \ldots$ **b)** $|BD_1|, |BD_2|, |BD_3|, \ldots$ **c)** $|BD|$

Obr. 6: Geometrická reprezentace součtu nekonečné geometrické řady (Hejný et al., 2018, s. 26)

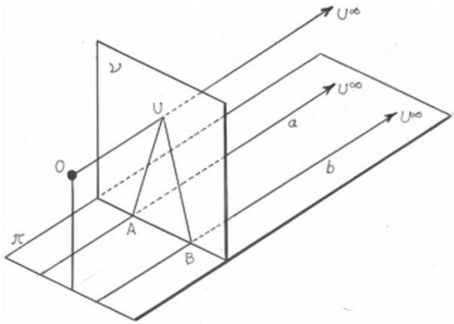
Nekonečné množiny v geometrii

Než se podíváme na nekonečné množiny v geometrii, vrátíme se k pojmu geometrického nekonečna. Stojíme-li na přímé železniční trati v rovné krajině, vidíme, že se koleje (rovnoběžné přímky) sbíhají „v nekonečnu“. Tento jev lze geometricky jednoduše vysvětlit. V prostoru jsou dány dvě k sobě kolmé roviny: vodorovná rovina π a k ní kolmá rovina ν, do níž promítáme ze středu O (oka) (obr. 7). Rovnoběžné přímky a, b, které leží v rovině π, mají společný bod U^∞ v nekonečnu. Průmět U bodu U^∞ je tzv. úběžník rovnoběžných přímek a, b. Bod U sestrojíme jako průsečík promítací přímky OU^∞ s průmětnou ν. Průmětem polopřímek AU^∞, BU^∞ (těch částí kolejí, které vidíme), jsou úsečky AU a BU (jak koleje vidíme). Tato tematika je zpracována např. v publikaci (Kraemer, 1951).

Geometrie našich učebnic je „množinová“.

> Od začátku vyučování geometrii máme učit žáky chápat prostor jako množinu bodů; přímky a roviny jsou její podmnožiny jistých vlastností [...] Při rozvíjení množinového pojetí úsečky můžeme dobře použít mo-

delu korálků navlečených na niti. (Hruša & Vyšín, 1964, s. 13)



Obr. 7: Geometrické vysvětlení „sbíhajících se rovnoběžek“ (Kuřina, 1982, s. 14)

Naskýtá se však otázka, co se stane, když si korálky navlečeme na krk. Korálky snad budou tvořit stále touž množinu. Množinové pojetí geometrických útvarů můžeme najít např. i v učebnicích matematiky pro víceletá gymnázia: „Bod je základní geometrický útvar, ze kterého se ‚skládají‘ další útvary, které chápeme jako ‚množiny bodů‘“ (Herman et al., 1997, s. 63). Např. v knize (Polák, 2014, s. 294) můžeme číst: „Geometrický útvar je množina bodů.“ Podobné formulace lze najít v řadě publikací Vyšínových.

Množinové pojetí geometrie problematizuje Peter Zamarovský. Cituje např. Aristotela: „Je nemožné, aby se něco spojitého skládalo z nedělitelného, jako např. čára z bodů, je-li čára něčím spojitým, bod však něčím nespojitým“ (2018, s. 222). V dalším textu pak dodává:

> Pojímání úsečky jako bodové množiny je spíše zatemněním než vysvětlením [...] Musíme se především smířit s tím, že „nejbližší body“ se navzájem nedotýkají, jinak by splynuly, avšak mezi nimi není mezera. [...]
>
> Nahromaděním všech bodů stále nedostaneme přímku. Tyto body tvoří spíše jakýsi druh lešení přímky.

> Přímka nemůže být z bodů složena. Bod je pouhým výsledkem konstrukce, protnutím dvou křivek a přímka je sféra takových možných protnutí, což znamená, že bodu v jeho existenci předchází, nikoli naopak. (Zamarovský, 2018, s. 222–224)

Poslední uvedená námitka nepředstavuje nic nového. Např. Karel Domin uvádí: „Body objevují se jako společné části dvou nebo více linií“ (Domin, 1880, s. 5). Tomu odpovídá i značení bodů křížky.

> Geometrické útvary, které studujeme ve škole, jsou metrické a topologické struktury. Zavedeme-li je jako množiny bodů na základě znalostí, které mají žáci o konečných množinách, jejichž prvky si lze představit a s nimiž lze pracovat, vytváříme u žáků nesprávné představy (bod jako malá kulička), které musíme v další výuce měnit. Množinové pojetí geometrických útvarů se tak jeví jako jednostranné a dosti formální. Ruští matematikové L. V. Kantorovič a S. L. Sobolev např. výslovně píší: Ztotožnění geometrického útvaru s množinou jeho bodů považujeme za zcela nevhodné. (Kuřina, 1982, s. 14)

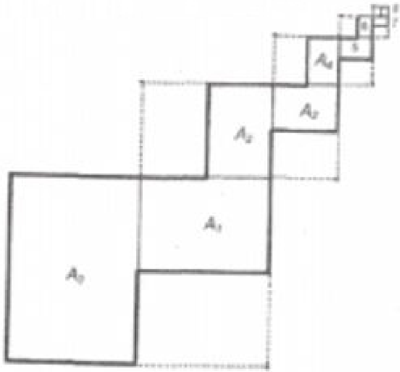
Áčkoliv na úsečce leží nekonečně mnoho bodů, není úsečka pouhou množinou bodů, ale metrickou strukturou. Pro body úsečky AB platí $|AX| + |BX| = |AB|$. Úsečce AB patří body A, B a všechny body X, které leží mezi body A, B. Na pouhou množinu jejích bodů bychom neměli úsečku redukovat. Pohybujeme se zde na tenkém „formulačním“ ledu, neboť rozlišujeme případy „úsečka obsahuje nekonečně mnoho bodů“ a „úsečka je nekonečně mnoho bodů“. Úsečka obsahuje nekonečně mnoho bodů, ale na tuto množinu nelze úsečku redukovat. Je to podobné, jako bychom chápali např. vektorový prostor dimenze dvě a Gaussovu rovinu jako množiny dvojic reálných čísel a neuvedli např. vlastnosti početních výkonů s těmito dvojicemi.

Na základní škole snad nemůže vést představa přímky a úsečky jako množiny bodů k problémům. Nicméně snad nejvhodnější přístup k pojmu úsečka a přímka je podle nás následující. Přímka je trajektorie přímého pohybu, místa na této trajektorii jsou body. To odpovídá procesu rýsování přímky, ale i zobrazení množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel na množinu bodů přímky. Částí přímky mezi dvěma body je úsečka. Podobně si můžeme představit rovinu jako neomezenou rovnou plochu. Místa v této rovině jsou body. Jejich polohu můžeme popsat pomocí souřadnicového systému uspořádanými dvojicemi reálných čísel. Analogická konstrukce je možná i v třídimenzionálním prostoru.

Závěr

Hrabalovo nekonečno, o němž jsme se zmínili na začátku článku, má fraktální charakter.

> Fraktály jsou tvary, u nichž – nezávisle na smyslu, který těmto slovům dáváme – detail reprodukuje část a část reprodukuje celek. (Mandelbrot, 2003, s. 7)



Obr. 8: Fraktál „schodiště formátů papíru řady A“ (Kuřina, 2012, s. 166)

Na této úrovni informací o problematice můžeme nakreslit např. fraktál „schodiště formátů papíru řady A“ (obr. 8). V roce 1768 si Lichtenberg všiml, že z obdélníku s poměrem stran $\sqrt{2} : 1$ dostaneme přeložením podél střední příčky rovnoběžné s kratší stranou obdélník podobný atd. Od roku 1922 je tak nejdříve v Německu a postupně téměř v celém světě zavedena řada normalizovaných formátů papíru: A_0 (obdélník s obsahem $1\,m^2$ s rozměry 1 189 mm a 841 mm), A_1 (obdélník s obsahem $0{,}5\,m^2$ s rozměry 594 mm a 841 mm). Nejběžnější formát A_4 má rozměry 297 mm a 210 mm, hrací karty mají formát A_8 s rozměry 74 mm a 52 mm (Robinson, 2008).

Závěrem ještě dodáme, že problematikou chápání nekonečna u českých žáků a studentů se zabývala např. Jirotková (1998) či Cihlář a kol. (2011/2012). Tečkou za naším textem budiž obrázek 9 ze starší anglické učebnice, jejíž výtisk již bohužel nemáme.

Obr. 9: Konečný obsah a nekonečný obvod

Literatura

[1] Altmann, G. T. M. (2005). *Výstup na Babylonskou věž.* Triáda.

[2] Alexandrov, P. S. (1954). *Úvod do obecné theorie množin a funkcí.* Nakladatelství ČSAV.

[3] Barrow, J. D. (2007). *Kniha o nekonečnu.* Paseka.

[4] Cihlář, J., Eisenmann, P., & Krátká, M. (2011/2012). Jak žáci a studenti chápou nekonečno? *Matematika, fyzika, informatika, 21*(6), 321–341.

[5] Čech, E., Balada, F., Holubář, J., Hruša, K., Chytilová, M., Junová, V., König, B., Mastný, E., Rössler, K., Srb, J., Šimek, J., Tuláček, A., & Zelinka, R. (1953). *Matematika pro třetí třídu gymnázií.* SPN.

[6] Domin, K. (1880). *Geometrie pro ústavy učitelské.* K. Šolc.

[7] Eukleides (2007). *Základy.* OPS.

[8] Fuchs, E. (1999). *Teorie množin.* MU.

[9] Hejný, M., Šalom, P., & Urbánek, L. (2018). *Matematika. Učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia, F.* H-mat.

[10] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (1997). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií. Úvodní opakování.* SPN.

[11] Hrabal, B. (2000). *Kdo jsem.* Hynek.

[12] Hrubý, D., & Kubát, J. (1997). *Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet.* Prometheus.

[13] Hruša, K., & Vyšín, J. (1964). *Vybrané kapitoly z metodiky vyučování matematice.* SPN.

[14] Jirotková, D. (1998). Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky PedF UK. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 43*(4), 326–335.

[15] Kolman, V. (2008). *Filosofie čísla.* Filosofia.

[16] Kraemer, E. (1951). *Perspektiva.* Přírodovědecké vydavatelství.

[17] Kůrka, P., Matoušek, A., & Valický, B. (2011). *Spor o matematizaci světa.* Mervart.

[18] Kuřina, F. (1982). *Množiny, logika a vyučování matematice na ZŠ.* Pedagogická fakulta Hradec Králové.

[19] Kuřina, F. (2002). *Deset geometrických transformací.* Prometheus.

[20] Kuřina. F. (2012). *Elementární matematika a kultura*. Gaudeamus.

[21] Kuřina, F., & Půlpán, Z. (2006). *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Academia.

[22] Mandelbrot, B. (2003). *Fraktály*. MF.

[23] Odvárko, O. (1995). *Matematika pro gymnázia. Posloupnosti a řady*. Prometheus.

[24] Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky*. Fraus.

[25] Robinson, A. (2008). *Jak se měří svět*. Euromedia.

[26] Sľupecki, J., & Borkowski, L. (1967). *Elements of mathematical logic and set theory*. Pergamon Press.

[27] Šalát, T., & Smítal, J. (1986). *Teória množín*. SNTL.

[28] Vopěnka, P. (1989). *Rozpravy s geometrií*. Panorama.

[29] Vopěnka, P. (1996). *Calculus infinitesimalis*. Práh.

[30] Vopěnka, P. (1998). *Podivuhodný květ českého baroka*. Karolinum.

[31] Zamarovský, P. (2018). *Mýtus nekonečna*. Karolinum.

František Kuřina
Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové
e-mail: kurinovi@gmail.com

Naďa Vondrová
Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz