

Učitel matematiky

Matúš Harminc; Jana Chudá

Čo s nejednoznačným zadáním slovnej úlohy?

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 4, 193–204

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/149403>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2016

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

ČO S NEJEDNOZNAČNÝM ZADANÍM SLOVNEJ ÚLOHY?

MATÚŠ HARMINC, JANA CHUDÁ

Odpoveď na otázku v názve je zrejmá: zadanie má byť jednoznačné. V tomto článku sa budeme zaoberať jednou úlohou o dotýkajúcich sa kružniciach v obdĺžniku. Jav, ktorý pomocou nej chceme rozdiskutovať, sa môže pritrafiť hocikomu, kto tvorí a formuluje slovné úlohy z matematiky. Učítelia základnej alebo strednej školy to robia bežne napríklad pri príprave úloh v kontrolných písomkách. Chceme podať návod pre riešiteľa takejto úlohy i naše stanovisko k tomu, ako jej riešenie zhodnotiť.

Úloha, o ktorej pojednáme, sa objavila v 55. ročníku Matematickej olympiády, v krajskom kole kategórie C. V riešeniach súťažiacich sa ukázalo, že výklad jej zadania nie je jednotný. Najprv uvedieme zadanie tejto úlohy, aby mohol čitateľ skúsiť nájsť v jeho formulácii samostatne to, čo spôsobilo nejednoznačnosť výkladu, neskôr aj jeho korektné formulácie odpovedajúce spôsobom, ktorými bolo pochopené.

Zadanie úlohy

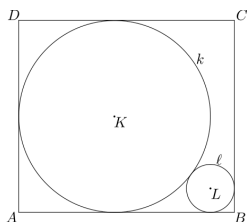
Slovenská verzia:

„Kružnice k, l s vonkajším dotykom ležia obe v obdĺžniku $ABCD$, ktorého obsah je 72 cm^2 . Kružnica k sa pritom dotýka strán CD, DA a AB , **zatiaľ čo** kružnica l sa dotýka strán AB a BC . Určte polomery kružníc k a l , ak viete, že polomer kružnice k je v centimetroch vyjadrený celým číslom“ (SKMO, 2006: s. 2).

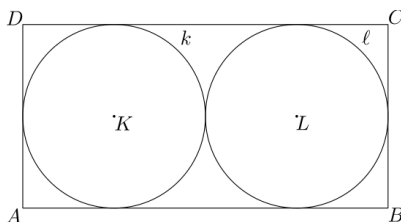
Pretože naša úvaha sa týka aj českého variantu zadania úlohy, uvádzame aj znenie českej verzie zadania úlohy.

Česká verzia:

„Kružnice k, l s vnějším dotykem leží obě v obdélníku $ABCD$, jehož obsah je 72 cm^2 . Kružnice k se přitom dotýká stran CD , DA a AB , **zatímco** kružnice l se dotýká stran AB a BC . Určete poloměry kružnic k a l , jestliže poloměr kružnice k je v centimetrech vyjádřen celým číslem“ (MO, 2006: s. 1).



Obr. 1



Obr. 2

Vzorové autorské riešenie uvádzalo, že úloha má práve dve riešenia. Citujeme pokyny k hodnoteniu úlohy: „*Za úplné riešenie dajte 6 bodov bez ohľadu na to, či riešiteľ určil jediné dve možnosti výpočtom, alebo z piatich možností vylúčil postupne tie, ktoré nevyhovujú daným podmienkam. Za každé nesprávne riešenie (napríklad keď žiak uvedie ako možný výsledok $r = 5, s = 1/5$) strhnete bod*“ (SKMO, 2006: s. 3). Pokyny v češtine sa od slovenských líšili len použitým jazykom.

Domnievame sa, že aj samotní opravovatelia tejto úlohy jej korektnosť a úplnosť riešenia definovali rôzne. Napriek tomu, že plný počet bodov mali dávať za obe prípustné riešenia, objavili sa 6-bodové riešenia, v ktorých bolo uvedené len jedno riešenie z toho dôvodu, že žiaci interpretovali zadanie úlohy tak, že sa jednotlivé kružnice dotýkajú len tých strán obdĺžnika, ktoré sú explicitne vymenované.

Pokyny na opravovanie a hodnotenie nie sú z nášho pohľadu najšťastnejšie. Myslíme si, že ak riešitelia úlohy chápu niečo inak, než očakávajú autori úlohy (resp. úlohová komisia MO), neznamená to, že je to neoprávnené, v rozpore so zadaním alebo z neopozornosti. Skôr sme toho názoru, že ak jednu, nižšie uvedenú

možnosť z úvah vyradili na základe svojej, logicky zdôvodnenej interpretácie zadania úlohy, tak mali získať plný počet bodov.

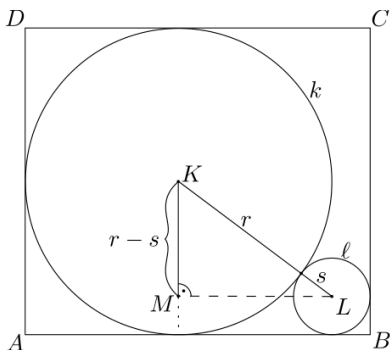
Čo bolo potrebné k vyriešeniu úlohy

Skúsme sa zamyslieť, čo sa touto úlohou sledovalo a ako to odzrkadľoval oficiálny návrh bodového hodnotenia. Na vyriešenie tejto úlohy bolo potrebné uvedomiť si tieto skutočnosti:

- ak r , polomer kružnice k , má byť celé číslo, tak veľkosť strany BC (resp. AD) bude párne celé číslo;
- naviac, toto celé číslo nemôže byť príliš veľké, presnejšie: obsah obdĺžnika je 72 cm^2 , preto $|BC| \leq \sqrt{72} \cong 8,49 \text{ cm}$;
- úvaha, že ak obsah a jeden rozmer obdĺžnika sú celé čísla, tak aj druhý rozmer obdĺžnika je celé číslo, nie je správna (napr. $7,2 \cdot 10 = 72$);
- polomery oboch kružníc sú obmedzené rozmermi obdĺžnika, môžu byť nasledovné:

	$ BC $ (cm)	$ AB $ (cm)	r (cm)	s (cm)	Komentár	(Ne)vedie k riešeniu
1.	2	36	1		kružnice by nespĺňali všetky podmienky zo zadania, buď by sa navzájom nedotýkali, alebo by sa kružnica l nevošla do obdĺžnika	Nevedie
2.	4	18	2			Nevedie
3.	6	12	3	3	kružnica l by sa dotýkala aj strany CD	?
4.	8	9	4	1	polomer s dopočítame pomocou Pytagorovej vety	Vedie
5.	10	-	-	-	najmenšie párne celé číslo ($ BC $) väčšie než $8,49 \text{ cm}$, nie je ho potrebné uvažovať, rovnako ani žiadne väčšie	Nevedie

- možnosti v 1., 2. a 5. riadku nevedú k riešeniu;
- možnosť v 3. riadku vedie k hodnotám $r = s = 3$ cm; tieto hodnoty boli pre väčšinu žiakov neprípustné;
- možnosť v 4. riadku vedie k riešeniu s polomeri $r = 4$ cm, $s = 1$ cm; dopočítanie polomeru s na základe vzťahov, ktoré platia medzi kružnicami k a l v obdĺžniku $ABCD$ a pomocou Pytagorovej vety v trojuholníku KML :



Obr. 3

$$|KM| = r - s = 4 - s$$

$$|KL| = r + s = 4 + s$$

$$|ML| = |AB| - r - s = 9 - 4 - s = 5 - s$$

$$|MK|^2 + |ML|^2 = |KL|^2$$

$$(s - 25) \cdot (s - 1) = 0$$

$s_1 = 25$, nemôže byť polomerom kružnice, ktorá má byť vnútri daného obdĺžnika;

$s_2 = 1$, spĺňa požiadavky zo zadania.

Z nášho pohľadu sa dá dôjsť k dvom záverom:

1. Úloha má jedno riešenie: $r = 4$ cm, $s = 1$ cm (kružnica l sa nemá dotýkať strany CD).
2. Úloha má dve riešenia: $r = 4$ cm, $s = 1$ cm a $r = s = 3$ cm (kružnica l sa môže dotýkať aj strany CD).

Pri analyzovaní žiackých riešení sme dospeli k názoru, že zadanie nie je sformulované úplne jednoznačne, je možné dvojake

uchopenie tohto zadania. Nejasnosti prameňa z pochopenia časti zadania, „*Kružnica k sa pritom dotýka strán CD , DA a AB , zatiaľ čo kružnica l sa dotýka strán AB a BC .*“

Pozrime sa na význam slovného spojenia **zatiaľ čo**: ide o podradovaciú spojku, ktorá sa používa pri vedľajších vetách časových vo význame **za ten čas**, **medzitým**, ale tiež v odporovacích vedľajších vetách vo význame **kým**, **ale**. V prvom prípade ako časová spojka vo vedľajších vetách časových stojí na začiatku súvetia: *Zatiaľ čo Tomáš raňajkoval, otec ho poučal, ako sa má na stavbe správať* (Zúbek podľa Ružička, 1974: s. 273). V druhom prípade má význam protikladu a stojí vnútri súvetia, vo vedľajších vetách odporovacích: *Starý Zachar bol štedrý, zatiaľ čo Ondrej bol bezcitný* (Krnó podľa SSJ).

Aj z umiestnenia spojky „**zatiaľ čo**“ teda vyplýva, že je použitá v svojej odporovacej funkcii. Je však diskutabilné, či vyššie spomínanú vetu máme chápať v tom význame, že kružnica k sa dotýka vymenovaných troch strán, CD , DA a AB , a kružnica l sa dotýka vymenovaných dvoch strán, AB a BC , nevylučujúc dotyk s ďalšou stranou obdĺžnika. Alebo ju treba chápať tak, že kružnica k sa dotýka vymenovaných troch strán, CD , DA a AB , a kružnica l sa dotýka len vymenovaných dvoch strán, AB a BC , vylučujúc dotyk s ďalšou stranou obdĺžnika. Myslíme si, že ani jeden z týchto výkladov nemožno považovať za chybný.

V rovnakej situácii boli aj českí riešitelia. Pôvodne časový význam spojky „**zatímco**“ s rovnakým významom ako **mezitímco** sa rokmi mení na kontrastne porovnávací: *Návštěvníci Matěje se odhadují na sto tisíc duší, zatímco před válkou to bývala pouf několik set lidí* (K. Čapek). Ten býva vyjadrovaný tiež spojkou **kdežto**, rokmi nadobúda prevahu a časová súbežnosť je v úzadí, alebo celkom chýba (Daneš, 1963). Aj v českej verzii zadania ide zrejme o použitie spojky „**zatímco**“ v jej kontrastne porovnávacom význame.

V nasledujúcom priblížime čitateľovi ukážky z riešení, týkajúce sa pochopenia práve tejto problematickej časti zadania úlohy.

Ukážky žiackych riešení

Ukážky uchopenia zadania ukazujú rôznosť prístupu jednotlivých riešiteľov. V zátvorkách za menom uvádzame získaný počet bodov za riešenie (maximálny počet bodov bol 6) a skutočnosť, či riešiteľ diskutabilnú možnosť z 3. riadku tabuľky akceptuje, alebo neakceptuje. V citovaných ukážkach riešení zvýrazňujeme relevantné časti hrubým písmom. Ukážky sú autentické, mená sú pozmenené. V prepisoch žiackych riešení sme zjednotili označenie polomerov kružnic tak, že r je polomer kružnice k a s je polomer kružnice l .

Daniel (3, neakceptuje):

Tento žiak robí štyri rozklady čísla 72 na súčin činiteľov, $4 \cdot 18$, $2 \cdot 36$, $6 \cdot 12$ a $8 \cdot 9$. Podľa neho vyhovuje len posledný, pričom obdĺžnik so stranami 6 cm a 12 cm nevyhovuje, pretože „*obe* (rozumej: kružnice k a l) *by museli byť rovnaké, keďže polomer kružnice k by bol 6 cma to nevyhovuje, lebo kružnica l by sa dotýkala strany CD .*“ Svoje riešenie podporuje aj obrázkom, v ktorom je v obdĺžniku ABCD narysovaná len jedna kružnica (zrejme k) a píše, že: „*nevyhovuje*“.

Erik (3, neakceptuje):

Žiak vlastnými slovami formuluje niektoré informácie zo zadania, pričom slovné spojenie **zatiaľ čo** nahrádza slovami **ale** a **iba**: „*Dalej vieme, že kružnica k sa dotýka strán AB aj CD , ale kružnica l iba strany AB . Z toho vyplýva, že k je väčšia ako l i polomer kružnice k je väčší ako polomer kružnice l $r > s$* “, čo nepripúšťa možnosť $r = s = 3$ cm.

V týchto riešeniach vidíme, že riešitelia pochopili spojenie **zatiaľ čo** vo vylučovacom význame, teda prvá kružnica sa dotýka práve troch (vymenovaných) strán a druhá **iba** (niektorí použili **len**) tých dvoch, ktoré sú uvedené v zadaní. V nasledujúcej ukážke je prítomný druhý spôsob uchopenia danej úlohy: to, čo v zadaní nie je zakázané, to je prípustné.

Ivana (4, akceptuje):

„... *to by však znamenalo, že sa* (rozumej: kružnica l) *bude dotýkať aj strany CD , čo v zadaní nie je uvedené. V zadaní však*

nie je uvedené ani to, že sa strany CD dotýkať nesmie, preto je to možné riešenie úlohy.“

Z desiatich ostatných riešiteľov, ktorí získali plný počet bodov (6), ôsmi sa k možnosti $r = s = 3$ cm vyjadrili explicitne. Predpokladali, že polomer kružnice k je ostro väčší ako polomer kružnice l , neakceptovali ju a nepovažovali za riešenie úlohy. A teda v odpovedi uviedli jediné riešenie. Poslední dvaja z nich túto možnosť našli, ale zamietli ju bez komentára. Z týchto desiatich žiakov sa až osem zaradilo medzi celkovo úspešných riešiteľov (získali celkovo viac ako 10 bodov). Vyberáme z ich riešení:

Lenka (6, neakceptuje):

Hneď prvá veta jej riešenia znie: „**Zo zadania aj z náčrtu vyplýva**, že kružnica k je väčšia ako kružnica l .“ Neskôr, keď narazí na riešenie $r = s = 3$ cm, vylúči ho s argumentom: „čo je už zo zadania vylúčené.“

Norbert (6, neakceptuje):

V tabuľke s možnosťami pre veľkosti polomerov oboch kružníc, v riadku s možnosťou $r = s = 3$ cm píše: „*spor* $r \neq s$ “.

V jednom prípade si žiak s dvojakým výkladom zadania poradil nasledovne. Z jeho odpovede je vidieť, že aj keď si nie je istý, či to zadanie dovoľuje, pre istotu uvádza aj druhé riešenie s komentárom v zátvorke.

Jozef (6, akceptuje):

„Kružnica k má polomer 1 cm a l má 4 cm, **alebo (ak l sa môže dotýkať CD)**, k má 3 cm, l má 3 cm.“ (Polomery má v prvom prípade v odpovedi naopak, ale za túto drobnosť neustratil body.)

Z uvedených ukážok je zrejmé, že nemôžeme vo všeobecnosti hovoriť o nepozornosti ani o chybe. Myslíme si však, že aj druhá skupina riešení, kde sa kružnica l dotýka aj strany CD , je správna. Prekvapujúce je množstvo riešení, kde sa táto možnosť nijako neobjavila a riešiteľ sa o nej vôbec nezmielil.

Aj keď vo vzorovom riešení sa argumentuje pomocou neostrých nerovností, v pokynoch k hodnoteniu sme nenašli komentár ku rôznym interpretáciám zadania úlohy, pokiaľ ide o strany, ktorých sa kružnice majú dotýkať. Ako vidieť z uvedených ukážok vyššie, väčšina žiakov v tomto smere pochopila úlohu inak ako autori.

Na porovnanie uvádzame aj niektoré skúsenosti s riešeniami účastníkov krajského kola matematickej olympiády v Juhomoravskom kraji. O nich píše v práci (2008) Jitka Bělašková. Ku chybe o celočíselnej dĺžke druhej strany obdĺžnika (Bělašková, 2008: s. 35) píše: „... následovalo chybné konstatování, že jelikož zadaný obsah obdélníku je celé číslo a jeden jeho rozměr je rovněž celé číslo, musí být i druhý rozměr obdélníku celé číslo, což samozřejmě není pravda.“ Táto chyba sa vyskytla až v 28 zo 73 riešení. V Košickom kraji to bolo u 7 z 53 žiakov.

K otázke, ktorej sa v tomto článku venujeme, uvádza (Bělašková, 2008: s. 28): „K úplnému řešení hodnocenému šesti body dospěli celkem 4 žáci a pouze 3 žáci ze všech přítomných získali za tuto úlohu nula bodů, což je opět jedinečné ve srovnání s počty nul u úloh ostatních. Co se může zdát překvapivé, je skutečnost, že v tak úspěšné úloze se našli pouze 4 žáci, kteří za ni obdrželi plných šest bodů a 14 žáků získalo pět bodů. To dávám za vinu hlavně skutečnosti, že zadání úlohy mohlo vést ke zmatení jejich řešitelů a k vyloučení řešení, které pak komise považovala za správné. Jde o to, že v zadání úlohy (3) se požaduje aby se kružnice l dotýkala stran AB a BC , ovšem tím se dle autorů nevylučuje případ, že se bude kružnice l dotýkat také strany CD ... neboť z hlediska matematické logiky je určitě správné uvážit i případ kružnice l , která se bude dotýkat strany CD . Nikde v textu zadání úlohy se toto nevylučuje.“

Autorka sa však na rozdiel od nás domnieva, že nejde o neuvedomelo použité dvojznačné zadanie, ale o zámer otestovať všímavosť a pozornosť riešiteľov (Bělašková, 2008: s. 28–29): „Otázkou zůstává, zda je formulace úlohy vyloženě klamavá. Podle mého názoru si zadavatelé úlohy pohrávali s postřehem žáků ... Díky zmíněné skryté komplikaci se tak povedlo i u úlohy (3) jakýmsi způsobem oddělit ty nejlepší a nejpozornější řešitelé od ostatních. ...“

V nasledujúcej tabuľke (obsahujúcej tabuľku 1.4 v Bělašková, 2008: s. 29) uvádzame prehľad získaných bodov z tejto úlohy:

Počet bodov	0	1	2	3	4	5	6	spolu
Počet žiakov Košický kraj	10	10	11	6	3	2	11	53
Počet žiakov Juhomoravský kraj	3	7	7	24	14	14	4	73

O vplyve výkladu zadania a uchopenia zadania na bodové hodnotenie riešenia píše (Bělašková, 2008: s. 35): „*Je jisté, že z 14 žáků, kteří byli ohodnoceni pěti body, by jich 11 mělo bodů šest, kdyby kvůli špatnému pochopení zadání úlohy nevyloučili případ $r_k = r_l = 3$ cm.*“ Toto vyjadrenie potvrdzuje, že sa od riešiteľa žiada nájsť a uviesť aj riešenie, v ktorom $r = s = 3$ cm.

V Košickom kraji 18 riešiteľov na základe zadania usúdilo, že $r > s$. Celkovo 28 riešiteľov možnosť $r = s = 3$ cm neakceptovalo, 4 ju akceptovali, 20 riešiteľov sa k tejto možnosti nijako nevyjadrilo alebo sa k nej na základe chybných úvah nedopracovalo a 1 žiak sa vyjadril tak, že ak sa kružnica l môže dotýkať aj strany CD , tak ponúka aj druhé riešenie. Ak v procese riešenia sa možnosť $r = s = 3$ cm objavila, ale nebola považovaná za prípustnú a neobjavila sa v odpovedi, v Košickom kraji sa body nestrhli. Opravovatelia nevideli v úlohe zámer „postrehnúť“ skrytý obsah zadania. V opačnom prípade by 10 z 11 riešení bolo ohodnotených namiesto šiestimi bodmi iba piatimi bodmi.

Záver

V našej úlohe o kružniciach bolo vymenovaných niekoľko javov, ktoré si mal riešiteľ uvedomiť na to, aby úlohu úspešne vyriešil. Výklad spojky „zatiaľ čo“ (resp. „zatímco“) nepatrí k tým javom, ktoré je možné považovať za podstatné. Preto nedať plný počet bodov v prípade, že riešiteľ jednu možnosť v kontexte zadania vylúčil, sa nám zdá byť nespravodlivé.

V snahe vyhnúť sa akýmkoľvek pochybnostiam a nedorozumeniam pri pochopení zadania môžeme preformulovať znenie úlohy dvojako. Prvý prípad, v ktorom očakávame vylúčenie možnosti rovnako veľkých kružníc, by mohol vyzeráť nasledovne (oproti pôvodnému textu sú pridané tri slová vyznačené hrubým písmom): Kružnice k , l s vonkajším dotykom ležia obe v obdĺžniku $ABCD$, ktorého obsah je 72 cm^2 . Kružnica k sa pritom dotýka **troch** strán CD , DA a AB , zatiaľ čo kružnica l sa dotýka **len dvoch** strán AB a BC . Určte polomery kružníc k a l , ak viete, že polomer kružnice k je v centimetroch vyjadrený celým číslom.

V druhom prípade, v ktorom pripúšťame, že polomery kružníc k a l môžu byť rovnaké, zadanie by mohlo vyzeráť takto (oproti pôvodnému textu je vynechané slovo **pritom** a spojka **zatiaľ čo** je nahradená spojkou **a**):

Kružnice k , l s vonkajším dotykom ležia obe v obdĺžniku $ABCD$, ktorého obsah je 72 cm^2 . Kružnica k sa dotýka strán CD , DA a AB a kružnica l sa dotýka strán AB a BC . Určte polomery kružníc k a l , ak viete, že polomer kružnice k je v centimetroch vyjadrený celým číslom.

Napokon ešte odporúčania, najprv učiteľovi, potom žiakovi. Ak sa už stane, že daná úloha má dve interpretácie zlučiteľné so zadaním a pri oboch sa prejaví znalosť či neznalosť testovaného učiva, nič sa nedeje. V opačnom prípade je potrebné dať žiakovi možnosť preukázať vedomosti znovu a riešenia „nesprávne“ vyloženej úlohy nehodnotiť. Pokiaľ ide o žiaka, ktorému sa zdá, že úloha má dvojaký výklad, má právo sa učiteľa na to opýtať. Tým sa môže v zárodku predísť nedorozumeniu. Učiteľ nie je neomylný a takto má možnosť (s poďakovaním za upozornenie) nejednoznačnosť zadania úlohy na poslednú chvíľu odstrániť. Ak je riešiteľ ponechaný sám na seba a nemá možnosť sa pýtať, urobí najlepšie, ak pripustí pri riešení úlohy obe možnosti výkladu jej zadania, napríklad tak, ako to urobil Jozef: „Kružnica k má polomer 1 cm a l má 4 cm , **alebo (ak l sa môže dotýkať CD)**, k má 3 cm , l má 3 cm .“

Literatura

- [1] Bélašková, J. (2008). *Rozbor řešení úloh matematické olympiády v Jihomoravském kraji*. [Diplomová práce]. Brno: MU.
- [2] Daneš, F. (1963). Konfrontační souvětí se spojkami jestliže, zatímco, aby, když. *Naše řeč*, 46(3). [online]. [cit. 10. 1. 2016] Dostupné z <http://nase-rec.ujc.cas.cz/archiv.php?art=4950>
- [3] Ružička, J. (1974). Časové a podradňovacie súvetie. In Š. Peciar (Ed.), *Slovenská reč* 268–278. Bratislava: SAV. [online]. [cit. 10. 1. 2016] Dostupné z <http://www.juls.savba.sk/ediela/sr/1974/5/sr1974-5-1q.pdf>
- [4] Matematická olympiáda. (2006). [online]. SKMO, [cit. 8. 12. 2015] Dostupné z <http://skmo.sk/dokument.php?id=241>
- [5] *55. ročník matematické olympiády*. (2006). [online]. MO, [cit. 10. 12. 2015] Dostupné z <http://mo.webcentrum.muni.cz/media/440704/C55ii.pdf>
- [6] *Slovník slovenského jazyka*. [online]. [cit. 10. 12. 2015] Dostupné z <http://slovník.azet.sk/pravopis/slovník-sj/?q=zatia%C4%BE+%C4%8D>

Abstract

In the paper we deal with a task about two circles touching in a rectangle. The assignment of the task was formulated in a fuzzy way, so solvers understood it differently. We present extracts from the authentic solutions which reflect this phenomenon. We suggest an approach to such tasks, how to solve them and how to assess their solutions.

Matúš Harminc

Ústav matematických vied

Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Prírodovedecká fakulta

Jesenná 5

040 01 Košice

e-mail: matus.harminc@upjs.sk

Jana Chudá

Ústav matematických vied

Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Prírodovedecká fakulta

Jesenná 5

040 01 Košice

e-mail: jana.chuda1@student.upjs.sk