František Kuřina

Matematika a realita

Učitel matematiky, Vol. 20 (2012), No. 4, 201–215

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149555

MATEMATIKA A REALITA

FRANTIŠEK KUŘINA

Tento příspěvek je volným pokračováním článků [1] a [2] o vztahu matematiky a kultury. Matematikou budeme v tomto příspěvku rozumět elementární matematiku, zejména pak aritmetiku a geometrii. Realitou budeme rozumět svět přírody a svět lidských artefaktů – a to jak technických, tak uměleckých.

Matematika je, jak známo, nástrojem ke studiu přírodní či společenské reality především tím, že pomáhá přírodním a společenským vědám utvářet modely, pomocí nichž lze realitu studovat. Těmito otázkami se zde nebudeme zabývat. Všimneme si pouze toho, jaké podněty náš svět dává elementární matematice.

1. Aritmetika

Aritmetika se zabývá čísly. „Malá přirozená čísla jsou jevy, které – na rozdíl od jiných jevů našeho světa – poznáváme dokonce všemi pěti tělesnými smysly. Vždyť číslo tři ukazující se na třech kamenech můžeme uvidět i nahmatat, tři údery zvonu lze uslyšet, tři různé chutě ochutnat a tři různé vůně ucítit. Přitom číslo tři jako takové, to je nikoliv tři kameny či tři údery zvonu a podobně, je jevem naprosto ostrým, na němž není vůbec nic neurčitého. Nejinak je tomu i s čísly čtyři, pět, ... Stěží bychom hledali jiné jevy, které by větším právem mohly být považovány za jevy světa poznávaného tělesnými smysly. Malá přirozená čísla se ovšem ukazují i v jiných světech či shlucích jevů .... I myšlenky nebo sny mohou být tři, přikázání je deset, světové strany jsou čtyři a podobně. Tato čísla se ukazují vlastně na každém shluku jevů, který není zcela jednolitý, a v tomto smyslu to jsou jevy univerzální“ ([3], s. 63). Z druhé strany ovšem „na malých seskupeních osamocených jednoduchých abstraktních objektů, to je dosud nezapojených do vztahů s jinými objekty, se projevuje už jen kvantitativní stránka malých přirozených čísel, zato však ve své nejprůzračnější čistotě. Číslo udávající počet objektů z takového seskupení je v podstatě jediným jevem, jenž se na něm ukazuje .... Stará školní počítadla, na jejichž stejných kuličkách se děti procvičují v nauce o kvantitativní stránce malých přirozených čísel zvané počítání jsou z tohoto hlediska zařízeními důmyslnými a rozhodně by neměla patřit minulosti" ([3], s. 107).

Lidské poznávání světa je ovšem spjato s jazykem. „Přirozená čísla jsou produktem lidské řeči, vynálezu počítat a počítat stále dál" ([4], s. 83). Rytmus, pravidelné střídání např. kroků vede k odpočítávání jako přirozenému vnímání některých jevů.

Uveďme nyní úryvek z pozoruhodné knihy matematika *Iana Stewarta* příznačně nazvané *Čísla přírody.*

„Fáze Měsíce tvoří úplný cyklus od novu k úplňku a zase zpět každých dvacet osm dnů. Rok je tři sta šedesát pět dnů dlouhý – zhruba. Lidé mají dvě nohy, kočky čtyři, hmyz šest a pavouci osm. Mořská hvězdice má pět ramen (nebo deset, jedenáct, dokonce sedmnáct, podle druhu). Jetel má normálně tři lístky: pověra, že čtyřlístek přináší štěstí, odráží hluboce zakořeněné přesvědčení, že výjimky z tvarů jsou něčím zvláštním. Velmi zajímavý jev se vyskytuje u okvětních lístků. Téměř u všech květin je počet těchto lístků jedním z čísel vyskytujících se v podivné posloupnosti

$$3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89. \qquad (1)$$

Např. lilie má tři lístky, blatouch pět, mnohé ostrožky jich mají osm, měsíčky třináct, astry dvacet jeden, většina sedmikrásek třicet čtyři, padesát pět, nebo osmdesát devět. Jiné počty nenajdeme často" ([11], s. 18).

Čísla (1) tvoří část tzv. *Fibonacciho posloupnosti,* v níž každý člen je součtem dvou předcházejících.

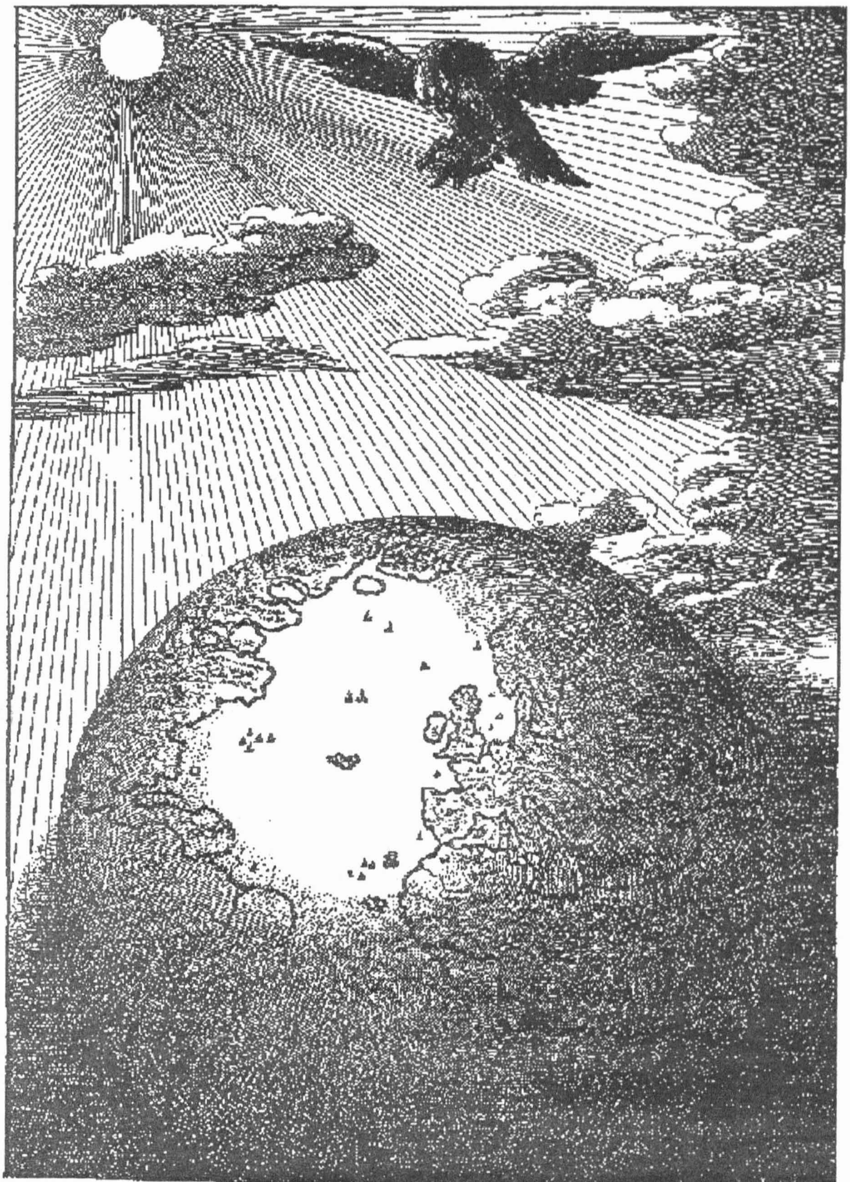
Dalšími číselnými obory (čísly zápornými, čísly racionálními, čísly reálnými a čísly komplexními) se zde nebudeme zabývat, ačkoliv i tato čísla pozoruhodným způsobem souvisí s realitou.

2. Geometrie

Elementární geometrie je svět tvarů, konstrukcí, délek, obsahů a objemů.

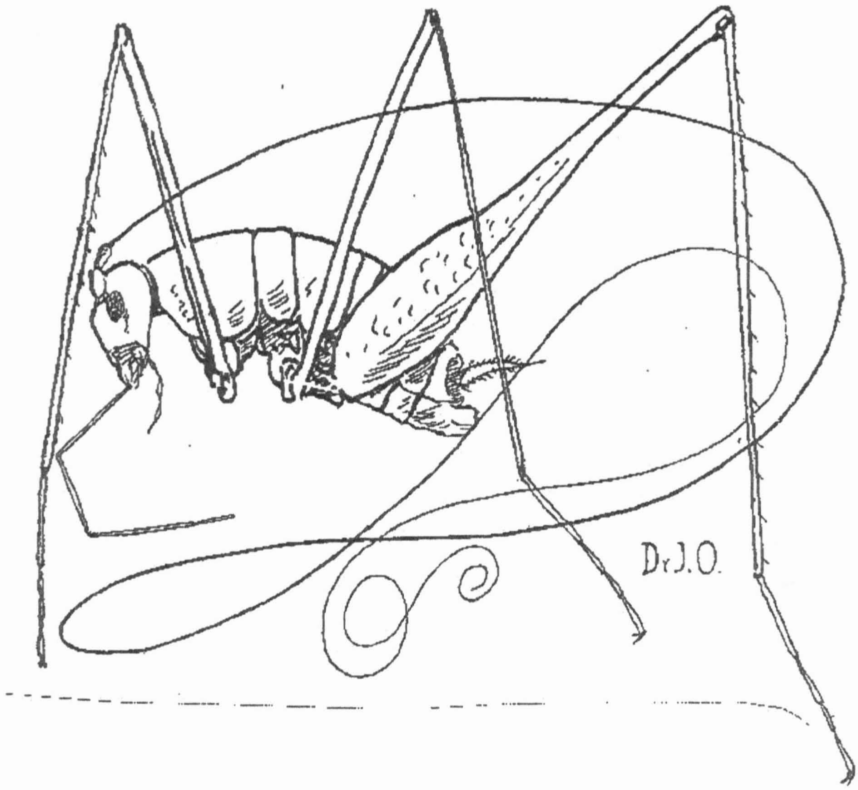
Příklady nejrůznějších tvarů nacházíme v přírodě, zprostředkovaně pak ve výtvarných dílech.

Přímky a kouli výstižně zobrazil *Václav Hollar* (1607–1677) v jedné z ilustrací *Ezopových bajek* (obr. 1, [6], s. 145).



Obr. 1

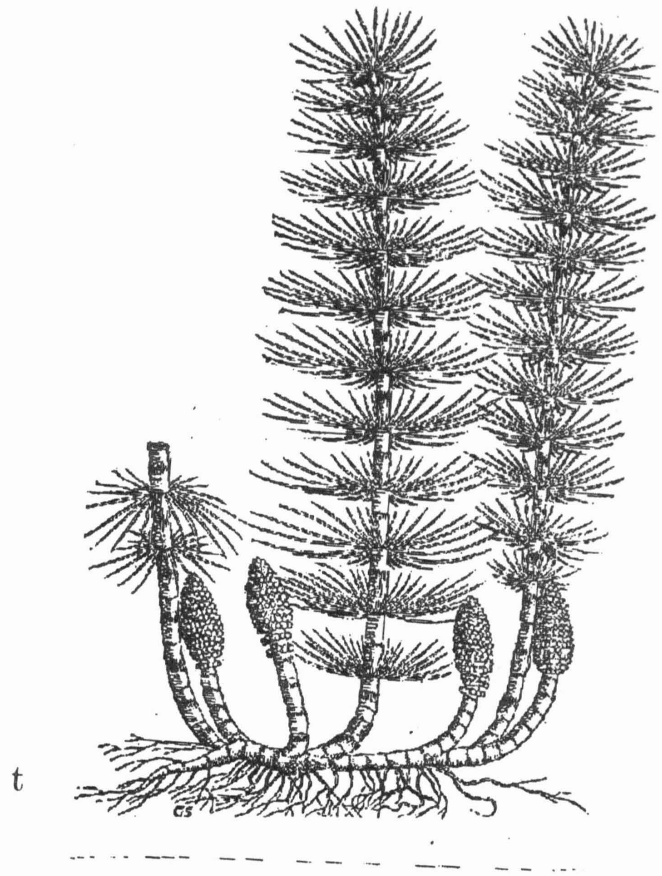
Téměř neskutečnou křivku objevil přírodovědec *Jan Obenberger* u *jeskynní dalmatské kobylky* (obr. 2, [7], s. 133).



Obr. 2

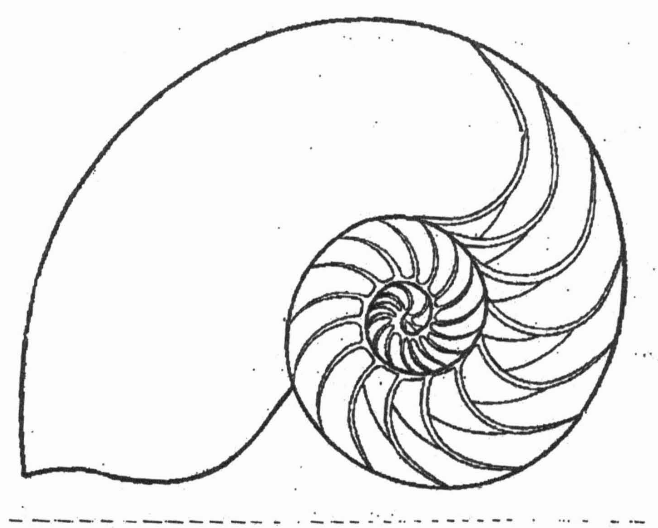
Smělou prostorovou konstrukci vidíme na obr. 3 přesličky z *Mathiolliho herbáře* ([8]).

Fraktální struktura je nakreslena na obrázku kapradiny (obr. 4, [9], s. 275). „Fraktály jsou tvary, u nichž ... detail reprodukuje část a část reprodukuje celek“ ([10], s. 7). „Každý živý tvor se vyvíjí podle vnitřního zákona, který mu je vlastní a který jej organizuje. Již od zárodku ukládá jeho budoucí vzhled .... Schopnost měnit měřítko, přičemž forma zůstává totožná, se zdá být charakteristikou života. Skořápka, která chrání měkkýše, i když má minerální podstatu, je podrobena stejnému zákonu jako léta na dřevě anebo měkká a vazká hmota, která naplňuje housenku. Počínaje ztvrdlým středem, vylučovaný vápenec vyráží logaritmickou spirálu“. Na obr. 5 je řez ulitou měkkýše *nautila*.



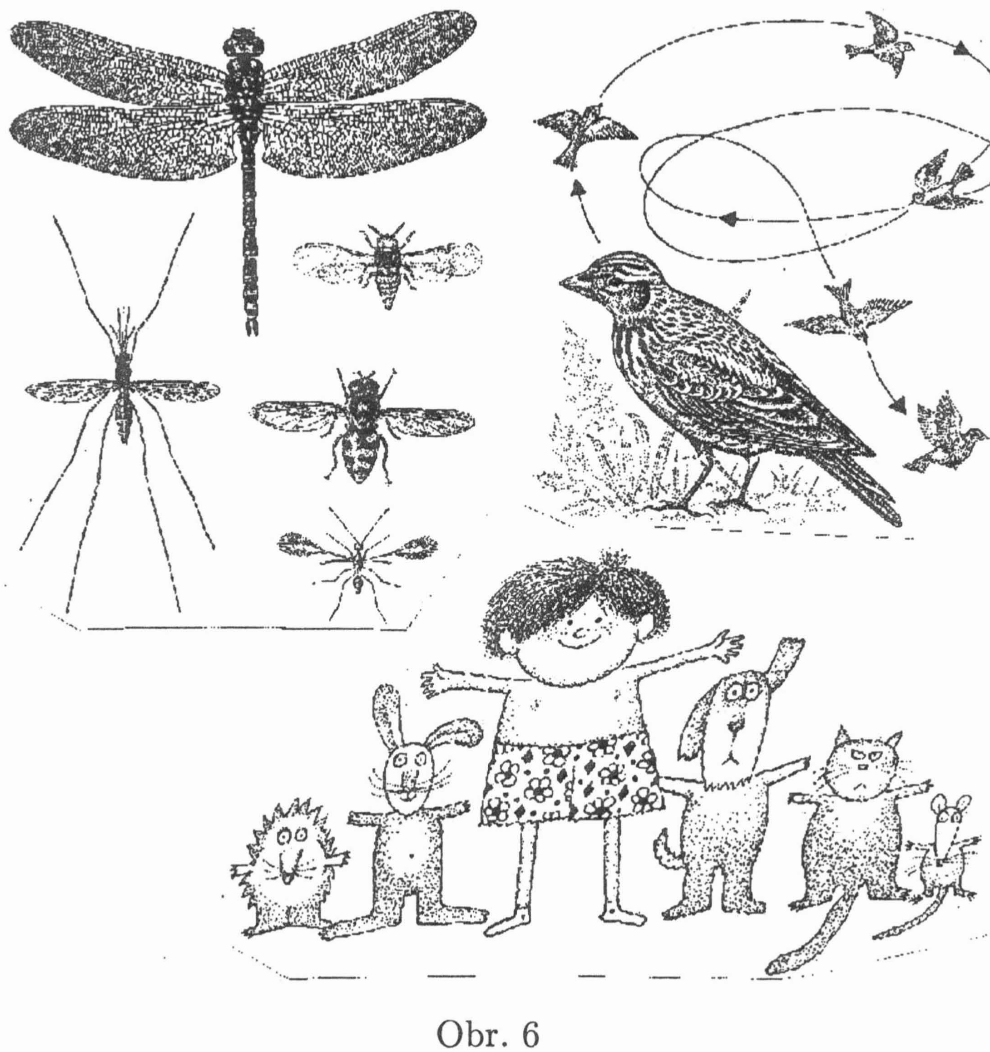
Obr. 3

Obr. 4



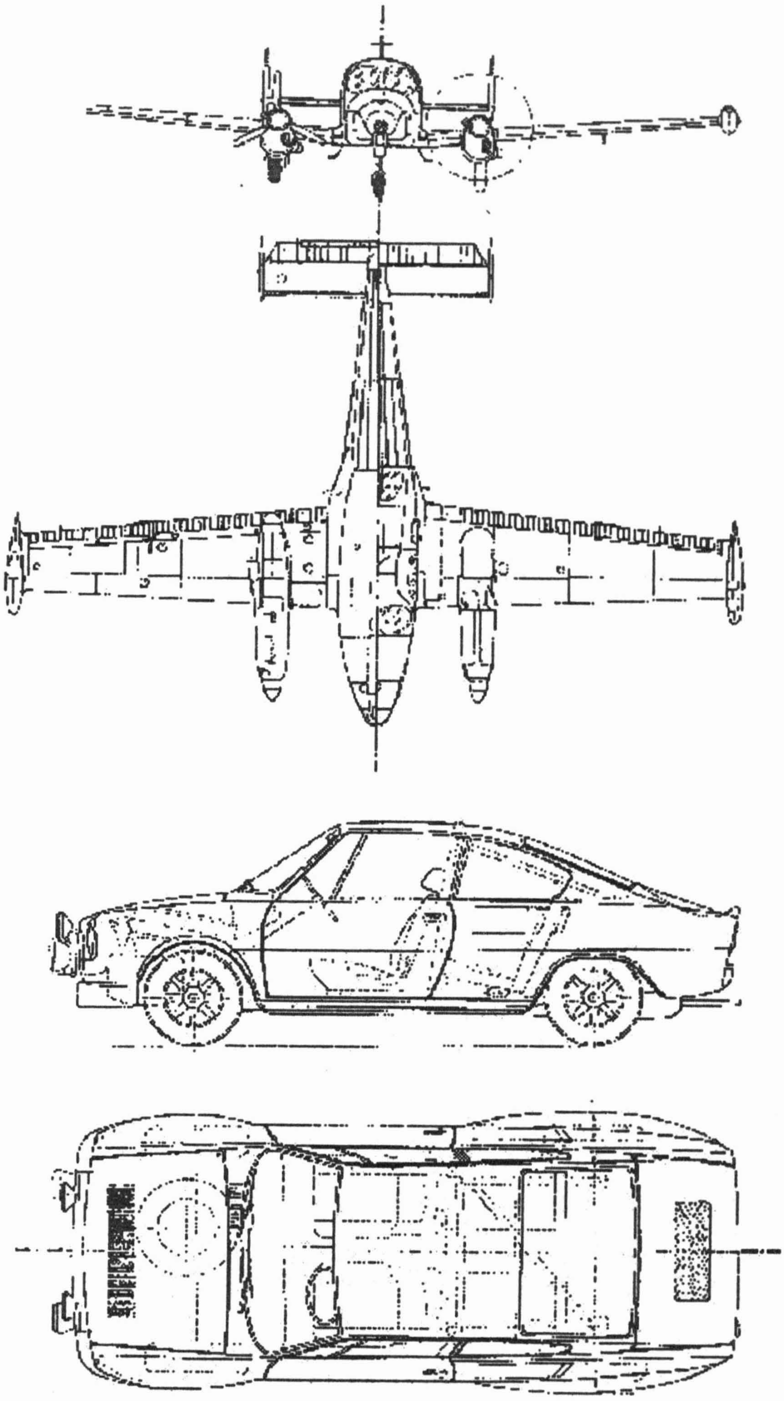
Obr. 5

Některé fyzikálně důležité vlastnosti organismů se projevují geometricky. Např. k udržení rovnováhy při pohybu je výhodné, aby pohybující se objekt (pták, motýl, kůň, člověk, ...) byl souměrný podle svislé roviny, ne však podle roviny vodorovné (obr. 6, [15], [16], [20]). Tento „vynález“ přírody „kopíruje“ technika. Letadla, jízdní kola, auta, ...jsou rovněž souměrná podle svislé a nejsou souměrná podle vodorovné roviny (obr. 7, [18], [19]).



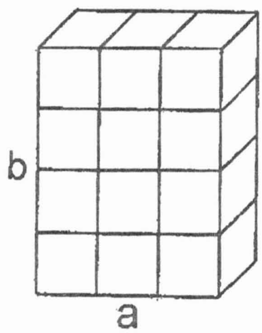
Obr. 6

Němečtí autoři *Christoph J. Scriba* a *Peter Schreiber* dokládají v monografii *5 000 let geometrie* ([12]), že přírodní vědy, technika a umění ovlivňovaly významně geometrii jako vědeckou disciplínu. Tím spíše by měly podle mého názoru ovlivňovat školskou

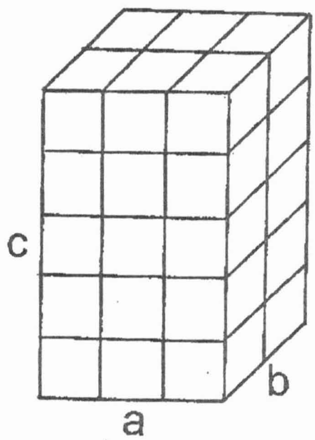


Obr. 7

geometrii zkušenosti žáků a podněty z přírody, techniky a umění. Ve středoškolských lavicích možná sedí několik budoucích matematiků, kteří by snad mohli docenit logickou vytříbenost geometrie budované axiomaticky, jsou tam však jistě budoucí lékaři, přírodovědci a technici, vyskytují se tam i budoucí filosofové a umělci. Ti by asi spíše ocenili souvislost matematiky s realitou běžného života, řemeslem a uměním. Všimněme si proto některých možností, které by vyučování matematice mohlo využívat.



Obr. 8



Obr. 9

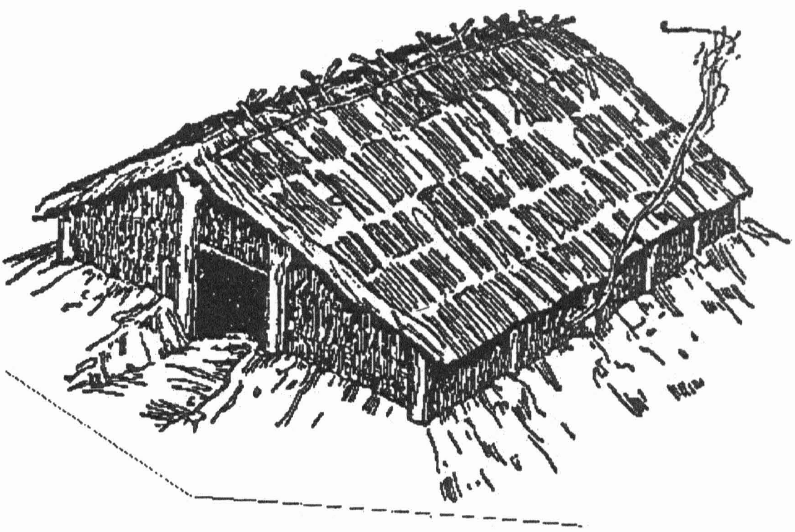
Náš světově proslulý malíř *František Kupka* (1871–1957) napsal: „Architektura – umění, jež vzešlo z potřeby přístřeší – zakládá se zcela na řešení dělení prostoru. Pro ni otázka objemu tkví v tom, že jedna nebo několik částí prostoru je uzavřena .... Utváření objemu vyplývá tu zcela z užitkové podmíněnosti" ([13], s. 137). Vystihl tak princip dělení a vyplňování prostoru, který považuji za základní pro koncepci školské geometrie. Na úrovni školských modelů můžeme tento princip ilustrovat stavbami z krychlí. Je-li a počet sloupců a b počet vrstev stavby z krychlí (obr. 8), můžeme celkový počet krychlí na stavbu určit dvěma způsoby. Protože v každém z a sloupců je b krychlí, je celkový počet krychlí $a \cdot b$. Protože v každé z b vrstev je a krychlí, je celkový počet $b \cdot a$. Takto lze geometricky ověřit komutativitu násobení přirozených čísel

$$ab = ba.$$

Podobně můžeme na stavbě z obr. 9 ověřit asociativitu násobení přirozených čísel a, b, c

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

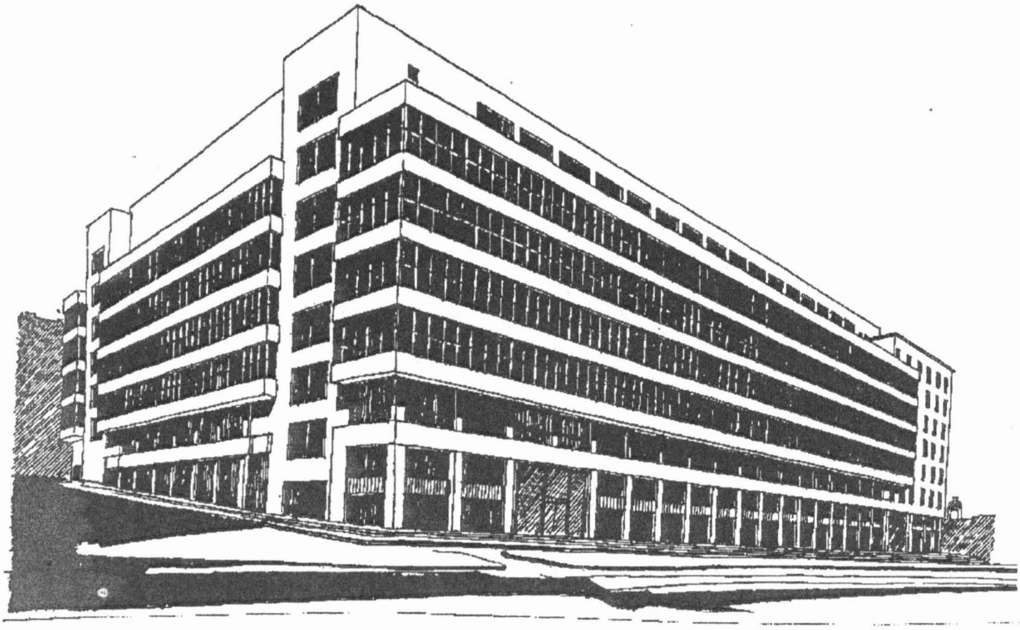
Geometrie je takto spjata s vlastnostmi čísel, tedy s aritmetikou.



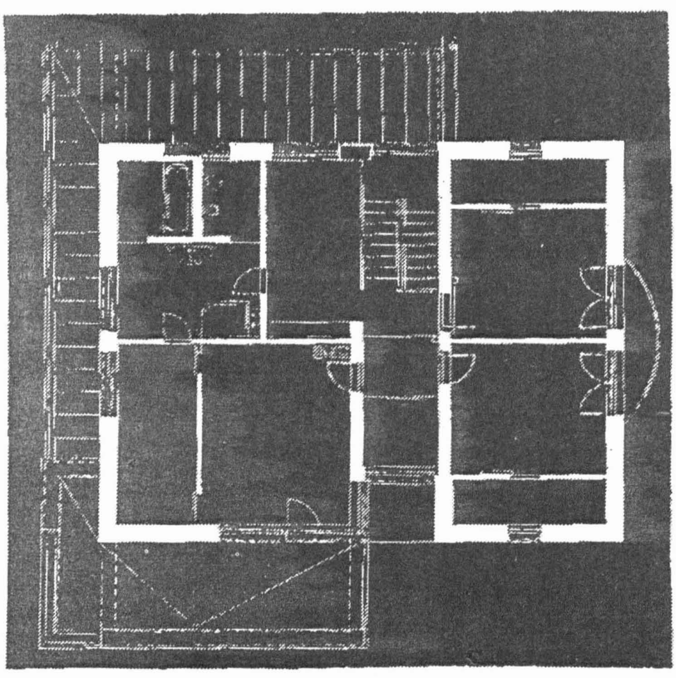
Obr. 10

Lidský příbytek ze 2. tisíciletí př. Kr. (obr. 10, [14], s. 142) je částí prostoru, právě tak jako stavba Průmyslového paláce (obr. 11, [5], s. 340). S dělením prostoru na části se seznámí každý, kdo zamýšlí postavit si rodinný dům (obr. 12). Na části je dělen nejen trojdimenzionální prostor, ale i různé plochy včetně roviny. Příroda rozdělila povrch Země na pevniny a moře, historie rozdělila kontinenty na státy. S těmito, na první pohled matematicky zřejmými skutečnostmi, je spjat tzv. *problém čtyř barev*, který stručně popíšeme.

Roku 1879 byla formulována hypotéza, že čtyři barvy stačí k pravidelnému vybarvení libovolné mapy. Přitom mapou rozumíme část roviny libovolně rozdělenou čarami, zbarvení bude pravidelné, jestliže každá dvě území, která mají část hranice, tj. čáry, společnou, jsou vybarveny barvami různými. Hypotéza, že „čtyři barvy stačí“ (Four colours suffice – bylo heslo na příležitostném razítku pošty v USA) byla dokázána r. 1976 americkými matematiky *K. Appelem* a *W. Hakenem* důmyslnými metodami, které využívají i moderní výpočetní techniku.



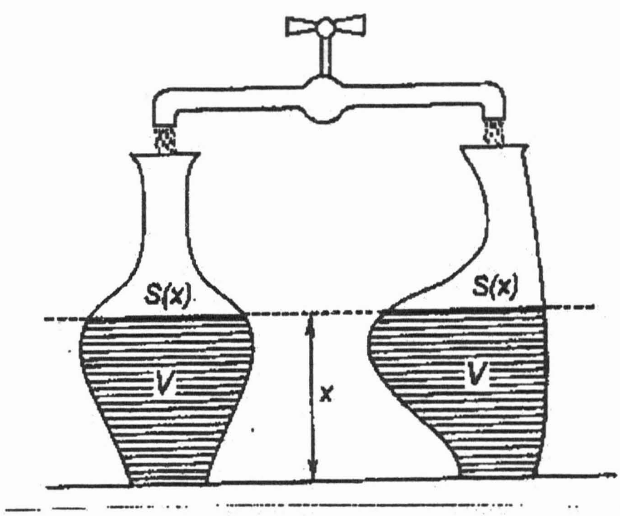
Obr. 11



Obr. 12

Na dělení a vyplňování prostoru jednorozměrného je založeno měření délek, na dělení a vyplňování prostoru trojdimenzionálního je založen tzv. *Cavalieriho princip*, který téměř 2 000 let před Cavalierim formuloval Archimédes fyzikálně:

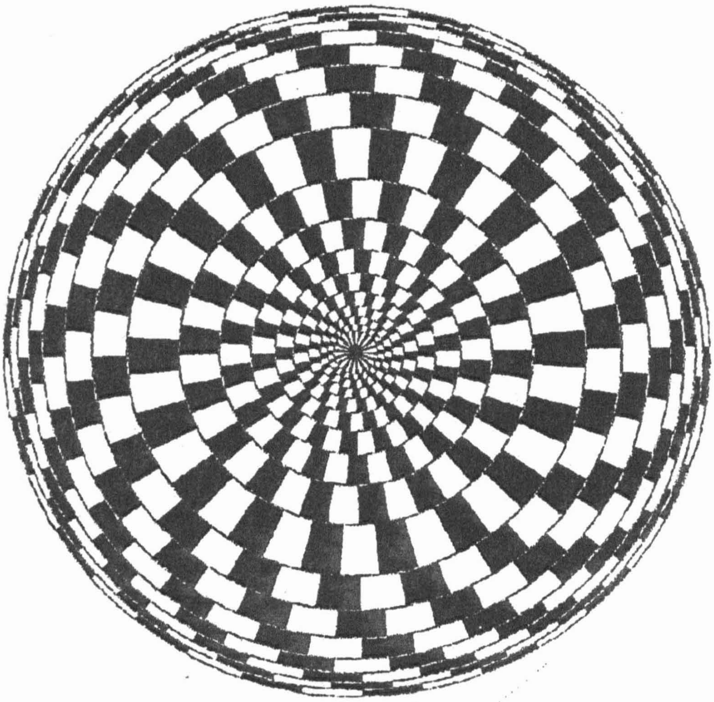
Jestliže do dvou nádob přitéká voda tak, že v každém okamžiku má hladina vody týž obsah, pak je v obou nádobách týž objem vody (obr. 13).



Obr. 13

Obr. 14

Pozoruhodné příklady vyplňování roviny nebo její části jsou známy z umění. Na obr. 14 je reprodukována Vasarelyho grafika, na obr. 15 je tzv. *Kitaokova spirála* složená ze soustředných kruhů [17].



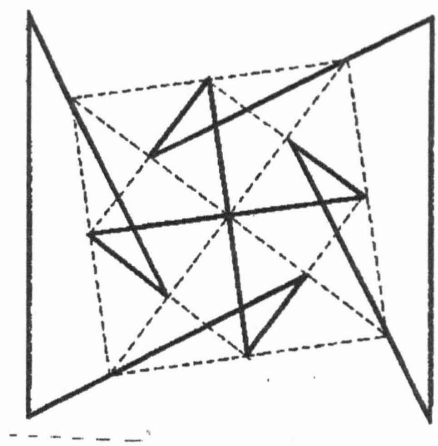
Obr. 15

Matematika souvisí tedy nejen s řešením praktických otázek života ve společnosti, ale i s uměním. Všimněme si proto souvislosti umění a geometrie.

Pohybem ruky *Mikuláše Alše* vznikla kresba reprodukovaná na obr. 16. Je to kresba pro autora netypická, skoro se chce říci čmáranice, přesto však vyvolává tento obrázek iluzi trojdimenzionálního výjevu. Takovýto „zázrak" morfismu mezi dvojrozměrným obrázkem a trojrozměrnou realitou je základem deskriptivní geometrie, disciplíny významné pro aplikace geometrie na techniku. Je ovšem i základem výtvarné tvorby. Užitá výtvarná tvorba se může realizovat dvěma směry: výtvarné dílo je obrazem existující skutečnosti nebo je základem konstrukce něčeho nového (plán stavby či stroje, návrh kostýmu či divadelní scény, ...).

Umělecká výtvarná tvorba nemusí mít přirozeně charakter zobrazení např. objektů přírody, může být i konstrukcí vyjasňující „pouze" estetické hodnoty, jako např. geometrická konstrukce švýcarského výtvarníka *Paula Kleea* na obr. 17.

Obr. 16



Obr. 17

Dětská kresba (tužkou či pastelkou) má již od raného věku ráz zobrazování prostorových předmětů, přitom nemusí jít nutně o zobrazování v geometrickém smyslu. Doložme to obr. 18, který správně zachycuje, že hrnek má určitý objem a že lze do něho shora nalít tekutinu, vidět však takto hrnek nemůžeme. Kresba je tedy spíše transformací vědomostí dítěte o hrnku než jeho obrazem.

Obr. 18

Dalším rysem přirozeného přístupu ke školní geometrii je dimenzionální pohled. Půdorys budovy je její dvojdimenzionální obraz, průnikem koule a roviny je kruh, průnikem dvou různoběžných rovin je přímka, ...

3. Závěry

Souvislost školské matematiky se světem dítěte by se podle mého názoru měla odrazit v přirozeném přístupu k matematice, který spočívá v těchto zásadách.

Aritmetika
Základem aritmetiky jsou čísla a počítání s nimi.

1. Přirozená čísla můžeme vytvářet postupným přičítáním čísla 1 (začínáme od čísla 0). Počítání po deseti, stech, tisících, ... umožňuje zapsat libovolné přirozené číslo pomocí deseti číslic. Libovolná dvě přirozená čísla můžeme s jediným výsledkem sečíst nebo znásobit. Další číselné operace (odečítání a dělení) vedou k rozšíření číselných oborů na čísla záporná a na čísla racionální.
2. Při výpočtech vhodně využíváme kalkulačky a jinou výpočetní techniku.

Geometrie
Základem geometrie je prostor a jeho vlastnosti.

1. Prostor lze dělit na části.
2. Části prostoru lze vyplňovat.
3. V prostoru se lze pohybovat.
4. V prostoru existují útvary trojdimenzionální, dvojdimenzionální a jednodimenzionální.

Přirozený přístup k matematice umožňuje rozvíjet matematickou kulturu od útlého věku dítěte, ukazuje souvislost matematiky se světem, v němž dítě žije. Mnohé matematické pojmy a postupy lze tak zavést přirozeným způsobem a přispívat tak ke kultivaci myšlení žáků.

Literatura

[1] Kuřina, F., Laťkový plot jako inspirace, *Učitel matematiky* **82**(2012), 89–96.

[2] Kuřina, F., Číslo pět jako inspirace, *Učitel matematiky* **83**(2012), 135–148.

[3] Vopěnka, P., *Meditace o základech vědy*, Práh, Praha, 2001.

[4] Popper, K. R., *Život je řešení problémů*, Mladá fronta, Praha, 1998.

[5] Staňková, J., Pechar, J., *Tisíciletý vývoj architektury*, SNTL, Praha, 1989.

[6] *Ezop Václava Hollara*, Sfinx, Praha, 1963.

[7] Obenberger, J., *Příroda a její divné děti*, Mladá fronta, Praha, 1950.

[8] Matthioli, P. O., Hájek z Hájku, T., *Herbář, jinak bylinář velmi užitečný*, Odeon, Praha, 1982.

[9] Hejný, S., Slavík, B., *Květena ČR*, Academia, Praha, 1988.

[10] Mandelbrot, B., *Fraktály*, Mladá fronta, Praha, 2003.

[11] Stewart, I., *Čísla přírody*, Archa, Bratislava, 1996.

[12] Scriba, C. J., Schreiber, P., *5 000 Jahre Geometrie*, Springer, Berlin, 2001.

[13] Kupka, F., *Tvoření v umění výtvarném*, Brody, Praha, 1999.

[14] Buchvaldek, M. a kol., *Dějiny pravěké Evropy*, SPN, Praha, 1985.

[15] Suchantke, A., *Proměny v říši hmyzu*, Mladá fronta, Praha, 2003.

[16] Born, A., Žáček, J., *Aprílová škola*, Albatros, Praha, 1983.

[17] Al Seckel, *Nová kniha optických iluzí*, Albatros, Praha, 2005.

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulty Univerzity Hradec Králové
Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové 3
e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz