

Jiří Fabián

Finanční aritmetika

Učitel matematiky, Vol. 10 (2002), No. 2, 65–72

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150486>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2002

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

FINANČNÍ ARITMETIKA

JIŘÍ FABIÁN

Když jsem před šedesáti lety studoval na klasickém gymnáziu, byla v sextě zařazena do učiva matematiky finanční aritmetika se značnou časovou dotací.

Myslím si, že i v současné době, kdy prý jsou peníze až na prvním místě, by měly znalosti středoškolské matematiky umožnit, aby si každý absolvent dokázal spočítat možnosti penzijního pojištění.

Dovoluji si tvrdit, že zařazení dvou vyučovacích hodin v tématickém celku *Užití geometrických posloupností* by vedlo k získání této dovednosti.

Cílem dvouhodinovky je řešení příkladu:

Kolik je nutno ukládat měsíčně po dobu čtyřiceti let, abychom po dobu dalších třiceti let měli měsíční důchod 10 000 Kč při roční úrokové míře 4% .

Pro zvládnutí této úlohy je třeba vysvětlit pojmy *složené úrokování, diskont, střadatel a zásobitel*.

Složené úrokování

Úroková míra p označuje, o kolik procent se zvýší uložený kapitál K_0 na konci prvního úložního období.

$$K_1 = K_0 + (K_0 : 100) \cdot p,$$

tj.

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Výraz v závorce se nazývá *úročitel* a značí se r . Je tedy

$$r = 1 + \frac{p}{100}.$$

Necháme-li kapitál K_1 dále úročit, dostaneme na konci druhého úložního období

$$K_2 = K_1 \cdot r = K_0 \cdot r \cdot r = K_0 \cdot r^2$$

$$K_3 = K_0 \cdot r^3$$

$$\vdots$$

$$K_n = K_0 \cdot r^n.$$

Hodnoty $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n$ tvoří geometrickou posloupnost, počáteční vklad tedy roste geometrickou řadou s kvocientem $q = r$.

Je-li úrokování měsíční, značí n počet měsíců; úroková míra je potom $1/12$ roční úrokové míry. Analogicky se postupuje pro denní úrokování.

Střádání

Jestliže ukládáme na začátku každého období stále stejnou částku (*úložku*) a , zhodnotí se tyto úložky postupně do konce doby, po kterou spoříme, takto:

| | | |
|----------------|-------|-------------------|
| 1. úložka | | $a \cdot r^n$ |
| 2. úložka | | $a \cdot r^{n-1}$ |
| 3. úložka | | $a \cdot r^{n-2}$ |
| | | \vdots |
| n -tá úložka | | $a \cdot r$ |

Nastřádaný kapitál má hodnotu

$$K_n = ar + ar^2 + \dots + ar^n.$$

Pravá strana je součet geometrické řady:

$$K_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Výraz $r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ se nazývá *střadatel* a bývá označován s_n .

Důchod

Jak velký počáteční kapitál je nutno mít při odchodu do důchodu při úrokové míře p , aby se z něj dala vybírat pravidelně po m období částka b (začátkem každého období)?

Na začátku prvního období (měsíce) vybereme částku b . K výběru částky b na začátku druhého období (měsíce) je třeba, aby v počátečním kapitálu byla částka b bez úroku, tzv. **diskontovaná hodnota** částky b , tedy $\frac{b}{r}$.

K výběru částky b na začátku 1. období je třeba b .

K výběru částky b na začátku 2. období je třeba $b \cdot r^{-1}$.

K výběru částky b na začátku 3. období je třeba $b \cdot r^{-2}$.

⋮

K výběru částky b na začátku m -tého období je třeba $b \cdot r^{-(m-1)}$.

Na počátku je tedy třeba uložit kapitál rovný součtu všech diskontovaných vybraných částek:

$$\begin{aligned} K &= b + br^{-1} + br^{-2} + br^{-3} + \dots + br^{-(m-1)} = \\ &= br^{-(m-1)} \cdot (1 + r + r^2 + \dots + r^{m-1}) \\ K &= b \cdot r^{-(m-1)} \cdot \frac{r^m - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

Výraz $r^{-(m-1)} \cdot \frac{r^m - 1}{r - 1}$ se nazývá **zásobitel** z_m . Tedy

$$K = b \cdot z_m.$$

Vrátíme se k příkladu z úvodu tohoto článku.

Kolik je nutno ukládat začátkem každého měsíce po dobu čtyřiceti let, abychom po dobu dalších třiceti let měli měsíční důchod 10 000 Kč vyplácený začátkem měsíce při roční úrokové míře $p = 4\%$.

Řešením je kořen x rovnice

$$x \cdot s_{480} = 10\,000 \cdot z_{360} \quad (1)$$

Při roční úrokové míře 4% je měsíční úroková míra dvanáctina $p = \frac{1}{3}\%$.

Úročitel $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{1}{300} = \frac{301}{300}$. Dosazením do vzorců pro střadatele a zásobitele a výpočtem (na kalkulačce) dostáváme

$$s_{480} = 1\,185,900\,9 \quad z_{360} = 210,159\,37$$

Dosazením do rovnice (1) vychází

$$x = 1\,772,149\,5$$

Měsíčně je nutno ukládat 1 772,15 Kč.

Námítky

- Inflace: Plátce musí přiměřeně zvýšit částku úločky, solidní bankovní dům valorizuje současně váš kapitál.
- Sedmdesát let je dlouhá doba a kdo se dožije devadesátky? Zbytek je předmětem pozůstalostního řízení.
- Nebezpečí finančních reforem. Ve státech s pevnou ekonomikou tato starost, odpadá. Jsou státy, kde i dnes žijí lidé v klidu z důchodů získaných naznačeným způsobem.

Příklady k procvičení

1. Vypočítejte měsíčního úročitele při roční úrokové míře $p = 5\% \left[\frac{17}{12}\right]$

2. Na kolik vzroste 1 Kč při složeném úrokování za sto let při $p = 4\%$ [50,5 Kč]
3. Za jak dlouhou dobu se vklad zdvojnásobí (zečtyřnásobí) při $p = 4\%$? [17 roků 8 měsíců; (35 roků 4 měsíce)]
4. Za pět let chceme našetřit 50 000 Kč. Jakou částku musíme měsíčně ukládat při $p = 4\%$? [752,70 Kč]
5. Jakou částku je třeba ukládat měsíčně po dobu dvaceti let, má-li být na konci dvacátého roku nastrádáno 500 000 Kč? ($p = 4\%$) [1 359 Kč]
6. Jaký kapitál je třeba mít k vyplácení měsíčního důchodu 8 000 Kč po dobu dvaceti let při $p = 4,5\%$? [1 269 265 Kč]
7. Les, který právě obsahuje 45 000 m³ dřeva, má 2%–ní roční přírůstek. Kolik m³ porostu bude mít po devíti letech, vykáčeli se každým rokem 1 500 m³? [32 757 m³]
8. Kuřák nakupoval od svých šestnáctých do svých dvacátých narozenin, kdy se odhodlal nekouřit, průměrně denně za 20 Kč cigaret. Ušetřené peníze chce ukládat měsíčně. Kolik nastrádá, vydrží-li mu jeho předsevzetí až do šedesátých narozenin? [711 540 Kč]

A nyní něco pro kolegyně a kolegy, kteří (ve skrytu duše) touží po založení soukromé školy.

Příklad č. 2305 ze Sbírkky [2].

Na novostavbu zařízení spolkového dívčího reálného gymnázia v P. si spolek vypůjčil 4 600 000 Kč. Jak velké musí být roční splátky na tento náklad, úrokuje-li se dluh 5% p.a. a má-li být částka ta za třicet let zaplácena? Ústav má 600 žákyň. Jak vysoké by muselo býti jejich roční školné, kdyby z něho mělo býti hrazeno umořování částky vydané na stavbu, jakož i osobní a věcný náklad na vydržování školy ve výši 300 000 Kč? [299 230 Kč, 1 000 Kč] (Týdenní výdělek kvalifikovaného dělníka byl v těch dobách 200 Kč.)

Další dva příklady ilustrují národohospodářskou situaci naší země před více než šedesáti lety.

Příklad 2312

Dlouhodobý státní dluh vnitřní (zahraniční) naší republiky činil koncem roku 1935: 23 311 608 940 Kč (8 160 354 911 Kč). Na úrok těchto dluhů bylo v roce 1936 počítáno 1 153 573 957 Kč (186 505 108 Kč), na úmor 251 267 000 Kč (40 966 844 Kč). Jak velké bylo úrokovací a umořovací procento těchto dluhů, a kdy by podle toho měly býti umořeny? [4,948 4 % (2,285 5 %); 1,077 8 % (0,502 %), 36(72)]

Příklad 2313

Většina bank úrokuje od 1. ledna 1936 vklady 3,25 %. Při tom se však z úroků sráží 3 % na daň rentovou, 4 % na poplatky z úroků a 3 % Všeobecnému fondu peněžních ústavů v ČSR. Jak velký je tedy čistý úrok z kapitálu? Nač vzroste při této úrokové míře 50 000 Kč za 10 let při a) celoročním; b) pololetním úrokování. Za jakou dobu se v případě a) i b) kapitál zdvojnásobí (ztrojnásobí)? [2,925 %; a) 66 707 Kč; b) 66 830 Kč; za a) 24,84 (38,108) roku; b) 23,89 (37,93) roku]

Ještě několik poznámek.

Poznámka 1

V příkladu uvedeném v textu se za 40 let vloží $480 \cdot 1\,772,15 = 850\,631,75$ (za 30 let vybere $360 \cdot 10\,000 = 3\,600\,000$ Kč). Schopnost strádat přináší zisk 2 749 368,25.

Poznámka 2

Místo postupného strádání po dobu čtyřiceti let by bylo možno na začátku těchto let uložit jednorázově takový kapitál, který by při složeném úrokování na potřebnou částku k zajištění výplaty důchodů vzrostl. Tedy diskont částky 2 101 593,70 Kč, to jest částku $2\,101\,593,70 \cdot r^{-480} = 425\,434,90$ Kč.

Poznámka 3

K tomu, aby člověk pobíral měsíčně důchod 10 000 Kč od šedestáti do devadesáti let, je třeba při jeho narození jednorázově uložit 191 414,70 Kč = $2\,101\,593,70 \cdot r^{-720}$. Proti částce nastrádané běžným způsobem je to úspora 656 391,17 Kč. A za tuto částku se dá během života už něco pořídit!

Poznámka 4

Důchodce má na kontě ve svých

60 letech ... 2 101 594 Kč.

70 letech ... 1 650 218 Kč.

80 letech ... 988 700 Kč.

85 letech ... 544 209 Kč.

Zdá se, že důchodci jsou značně bohatí a neměli by se tedy bát, zda se právě tento rok na jejich důchod vybere.

Celý život jsme státu odváděli peníze na důchod. Stát by je tedy měl mít v hotovosti, v nemovitém majetku nebo ve spolehlivě vratných půjčkách, tak jak to ukládal penzijní zákon z roku 1929. Umíme si vůbec představit, jaké sumy dosahuje důchodový fond všech pojištěnců?

Literatura

- [1] Bydžovský, B., *Arithmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií*, Praha, 1911
- [2] Bydžovský, B., Teplý, S., Vyčichlo F., *Sbírka úloh z matematiky pro IV – VIII. třídu středních škol*, Praha, 1936
- [3] Klodner, J., *Matematika pro obchodní akademie II*, Svitavy, 1998
- [4] Ostrý, M., *Arithmetika v úlohách*, Praha, 1948

- [5] Walter J., Radová, J., *Základy finanční a pojistné matematiky*, VŠE, Praha, 1995

PhDr. Jiří Fabián

Kukleny – Zelená 516

500 04 Hradec Králové

e-mail: marketa.bednarova@vsp.cz



OZNÁMENÍ

Setkání učitelů matematiky na gymnáziích

Matematicko-pedagogická sekce JČMF – odborná skupina pro vyučování matematice na gymnáziu a pobočka JČMF Pardubice ve spolupráci s Pedagogickým centrem Pardubice pořádají ve dnech 19. – 21. září 2002 celostátní konferenci učitelů matematiky na gymnáziích. Tématickým zaměřením akce budou aktuální otázky vyučování matematice na gymnáziu, nové pojetí maturity, příprava studentů pro studium na vysoké škole, odborné přednášky, výměna zkušeností. Zájemci se mohou přihlásit prostřednictvím WWW stránek Pedagogického centra: <http://www.pcpce.cz> nebo kontaktovat garanta akce na adrese:

František Janeček, Tyršova 744, 53401 Holic