

Ivana Kovárová; Jana Mihalčová

Vplyv riešenia jednej difúznej úlohy a následný rozbor na riešenie druhej difúznej úlohy o 12-tich kockách

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 3, 171–181

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150653>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2008

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VPLYV RIEŠENIA JEDNEJ DIFÚZNEJ ÚLOHY A NÁSLEDNÝ ROZBOR NA RIEŠENIE DRUHEJ DIFÚZNEJ ÚLOHY O 12-TICH KOCKÁCH

IVANA KOVÁROVÁ, JANA MIHALČOVÁ

1. Úvod

Žiacke otázky typu: „Načo sa toto máme učiť? Načo nám toto v živote bude? ...“ nie sú zvláštnosťou a stretol sa s nimi už každý učiteľ. Pritom v reálnom živote sme často konfrontovaní so situáciami, ktoré si vyžadujú využitie matematických znalostí. Každá situácia vyžaduje od človeka určitú mieru všeobecnej gramotnosti, v mnohých prípadoch špeciálne matematickej gramotnosti. Matematická gramotnosť v zmysle OECD PISA¹ je „schopnosť jedinca rozpoznať a pochopiť úlohu matematiky vo svete, robiť zdôvodnené hodnotenia, používať matematiku a zaoberať sa ňou spôsobmi, ktoré zodpovedajú potrebám života konštruktívneho, zaujatého a rozmýšľajúceho občana“. Podnety, ktoré sú v našom okolí, nie sú vždy jednoznačné, žiakov treba naučiť na ne reagovať. Od školy sa očakáva, že pripraví žiakov, aby sa vedeli vysporiadať so situáciami, ktoré prináša každodenný život, inými slovami, aby vychovávala „zaujatých a rozmýšľajúcich občanov“. Aj matematika ako predmet, v ktorom je priestor na rozvoj žiackej logiky a tvorivosti, má prostriedky na rozvoj tejto kompetencie. Jedným z nich sú i nejasne (nejednoznačne, vágne) zadané slovné úlohy – difúzne úlohy, ktoré by mohli žiaka pripraviť na podobné situácie. S „vágne formulovanými slovnými úlohami“ sme sa prvý

¹PISA je medzinárodný výskum vedomostí a zručností 15-ročných žiakov. Zúčastnené krajiny spolupracujú pri monitorovaní výsledkov vzdelávania a hodnotení efektívnosti svojich vlastných školských systémov krajín s rôznym kultúrnym kontextom [1].

krát stretli v práci prof. Milana Hejného. Vo výskume tieto úlohy používa k analýze edukačného štýlu učiteľa [5].

2. Teoretická časť

Termín slovná úloha nie je v didaktickej literatúre ustálený. Preto skôr ako v praktickej časti začneme pracovať s konkrétnymi žiackymi riešeniami je dôležité vymedzenie používaných pojmov. Najdôležitejšou školskou činnosťou je riešenie úloh. Úlohou rozumíme akúkoľvek výzvu k činnosti. Matematická úloha vyzýva riešiteľa k matematickej činnosti. Matematickú úlohu formulovanú pomocou slov, ktorej riešenie vyžaduje jazykové porozumenie a presah do životných skúseností nazývame slovná úloha.

Difúzna úloha je matematická úloha, ktorej zadanie je interpretovateľné rôznymi spôsobmi. Práca s difúznou úlohou je však, podľa nášho názoru, zložitejšia ako riešenie štandardnej slovnej úlohy. Rozbor a hlavne diskusia riešiteľa/riešiteľov spolu s učiteľom je nevyhnutnou súčasťou zadávania takto formulovaných úloh. Difúzne úlohy nie sú vhodné na klasifikované práce. Užitočným by mohlo byť zadávanie týchto úloh ako domáce úlohy alebo na samostatnú prácu počas vyučovacích hodín. Dôležité je však, aby učiteľ úlohu po jej vyriešení predebatoval spolu s celou triedou. Vhodné by bolo, ak by učiteľ len usmerňoval diskusiu triedy (žiakov). Rôzne pohľady, ktoré žiaci v triede našli, by mali obhajovať jednotliví riešitelia sami. Pochopenia, ktoré sa v triede nenašli by mohol učiteľ dodatočne ponúknuť na premyslenie. Difúzne úlohy a „uvedomelá“ práca s nimi sú jednou z metód, ktorými sa môžu rozvíjať dôležité kľúčové matematické kompetencie² žiakov (napríklad argumentácia, kritické čítanie textu, zvýšenie odborného sebavedomia, ...).

²Problematika kľúčových kompetencií je v súčasnej dobe aktuálna. Podrobnejšie je táto tematika rozpracovaná v publikáciách [3], [4].

3. Praktická časť

Predpokladáme, že pravidelné zadávanie difúzných úloh a hlavne následná diskusia, by mohli byť jedným z prostriedkov, ako rozvíjať spomínané kompetencie. Rozhodli sme sa uskutočniť prieskum, ktorý by potvrdil alebo vyvrátil hypotézu „riešenie difúzných úloh má pozitívny vplyv na výkon žiaka v matematike“. Zamerali sme sa len na difúzne úlohy a venovali sme pozornosť žiakom od šiesteho ročníka ZŠ až po študentov tretieho ročníka SŠ. Na materiály získané z prieskumu sme sa pozerali z dvoch nezávislých hľadísk. V tomto príspevku sa zaoberáme analýzou riešení z hľadiska vplyvu pravidelného zadávania difúzných úloh na rozvoj kľúčových kompetencií žiakov no zaujímavá je i myšlienka analýzy žiackych riešení z hľadiska tvorivosti.

Prieskum bol realizovaný v októbri 2006 v ôsmich triedach troch košických škôl: v šiestom až deviatom ročníku Základnej školy Laca Novomeského, v prvom až treťom ročníku Gymnázia Tomáša Akvinského a siedmom ročníku Základnej školy sv. Cyrila a Metoda. Prebiehal na troch vyučovacích hodinách v po sebe nasledujúcich dňoch. Keďže práca s difúznymi úlohami má svoju štruktúru, pokúsili sme sa priebeh experimentu prispôbiť tejto štruktúre. Na prvej vyučovacej hodine sme žiakom dali presné inštrukcie k vyplneniu pracovného materiálu³ a v stanovenom časovom rozsahu žiaci riešili zadanú úlohu. Na druhej hodine sme sa venovali rozboru prvej úlohy. Diskutovali sme so žiakmi o ich vlastných riešeniach, postrehoch a názoroch. V triede sa objavili rôzne interpretácie danej úlohy a samotní žiaci prezentovali pred triedou svoje riešenia. Riešenia, ktoré boli v písomnej forme nezrozumiteľné nám žiaci dodatočne slovné vysvetlili. Z hľadiska vplyvu, na ktorý sa sústreďuje tento príspevok, je druhá hodina veľmi dôležitá. Žiaci nie sú zvyknutí na hodinách diskutovať, obhajovať svoje názory. Pri tomto type neštandardných úloh je diskusia najdôležitejšou časťou práce s úlohou. Na záverečnej tretej hodine žiaci vyplňali druhý pracovný materiál, v ktorom riešili druhú difúznu

³Súčasťou pracovného materiálu bola okrem zadania úlohy i hlavička, v ktorej mali žiaci uviesť meno, triedu, vlastné hodnotenie svojich matematických znalostí a tiež i vlastný názor na nami zadanú úlohu.

úlohu. Z hľadiska požiadaviek prieskumu sme za vzorku zvolili len riešenia žiakov, ktorí sa zúčastnili všetkých troch hodín. Za kontrolnú vzorku sme zvolili jednu triedu siedmeho ročníka Základnej školy sv. Cyrila a Metoda. V kontrolnej triede sa prieskum realizoval len na dvoch hodinách, hodina rozboru prvej úlohy bola cielene vylúčená.

Žiakov sme pred samotným riešením:

- poučili o spôsobe vyplnenia pracovného materiálu a vysvetlili sme im každú jeho súčasť,
- boli oboznámení s časovým limitom, ktorý mali k dispozícii (20 min na ZŠ a 10 min na SŠ),
- zakázali sme komunikáciu počas riešenia, prípadné otázky k úlohe či postrehy mali napísať do pracovného hárku,
- boli upozornení, že dôležitou súčasťou riešenia úlohy je popísanie myšlienkového postupu.

Keďže v ďalšom texte budeme analyzovať žiacke riešenia dvoch difúzných úloh, v stručnosti úlohy rozoberieme. Pri voľbe konkrétnych úloh sme sa zamýšľali i nad možnosťou zadať v každej triede úlohy zodpovedajúce úrovni vedomostí konkrétnej vekovej skupiny. Táto myšlienka narazila na závažný problém. Nie je jednoduché vymyslieť sedem dvojíc rôznych úloh siedmich úrovní náročnosti, ktoré by boli medzi sebou plne porovnateľné. Z tohto dôvodu sme zvolili len jednu dvojicu úloh pre všetky triedy. Sformulovať i dve rôzne, úplne porovnateľné matematické úlohy formulované slovne s určitou mierou nejednoznačnosti je veľmi zložité. Sme si vedomí veľkej vekovej variability vzorky a s ňou spojenými nedostatkami prieskumu. Uvedomujeme si, že nejednoznačnosť v úlohách je nemalá, no pre potreby prieskumu považujeme úlohy za primerané. V tomto prieskume sme neskúšali zmeniť poradie zadávaných úloh. Je možné, že by to malo vplyv na jeho závery. Táto myšlienka by mohla byť podnetom pre ďalšie skúmanie. Na

základe riešení sme sa pokúsili rekonštruovať riešiteľovu interpretáciu zadania. Interpretácia je v našom ponímaní preformulované pôvodné zadanie tak, aby už úloha nebola difúzna.

Prvá úloha znela: „Vytvorte z čísla 1245 tie čísla, ktoré sa dajú deliť šiestimi.“

Interpretácie prvej úlohy:

1. „Napíšte pomocou cifier 1, 2, 4 a 5 všetky rôzne dvojciferné prirodzené čísla deliteľné číslom 6, ak v každom čísle môžete každú z cifier použiť len raz.“
2. „Napíšte pomocou cifier 1, 2, 4 a 5 všetky rôzne štvorciferné prirodzené čísla deliteľné číslom 6, ak v každom čísle môžete každú z cifier použiť len raz.“
3. „Napíšte pomocou cifier 1, 2, 4 a 5 všetky rôzne prirodzené čísla deliteľné číslom 6, ak v každom čísle môžete každú z cifier použiť len raz.“
4. „Napíšte všetky rôzne prirodzené čísla deliteľné číslom 6, ktoré vzniknú rôznymi početovými operáciami pomocou čísiel 1, 2, 4 a 5.“
5. „Napíšte všetky rôzne prirodzené čísla z cifier 1, 2, 4 a 5, ktoré sa dajú deliť číslom 6, bez ohľadu na zvyšok.“

Druhá úloha bola použitá pre potreby klubu učiteľov matematiky, ktorý bol organizovaný v školskom roku 2005/2006 ÚMV UPJŠ v Košiciach [6]. Jej znenie je nasledovné: „Koľko kvádrov vieš poskladať z dvanástich rovnakých kociek?“

Interpretácie druhej úlohy:

1. „Koľko existuje rôznych kvádrov z práve dvanástich rovnakých kociek?“

2. „Koľko najviac rovnakých kvádrov sa dá poskladať z práve dvanástich rovnakých kociek?“
3. „Použitím práve dvanástich rovnakých kociek boli postavené rovnaké kvádre. Aké môžu byť tieto kvádre?“
4. „Koľko existuje rôznych kvádrov obsahujúcich maximálne dvanásť rovnakých kociek?“

Sme si vedomí, že slovo „rovnaké“ neexistuje v slovenskej matematickej terminológii. Ekvivalent tohto slova „zhodné“ by bol matematicky korektný, no mohol by spôsobiť u šiestakov problém v porozumení textu. Obe formulácie úloh sú prispôbené chápaniu a vyjadrovaniu šiestaka na ZŠ tak ako i tretiake gymnazistu. Rovnako sme si vedomí, že pôvodná formulácia zadania: „Koľko kvádrov vieš poskladať ...“ umožňuje i napríklad obhájitelnú odpoveď: „1“. Zadanie sa pýta riešiteľa na subjektívny stav. Ak vie riešiteľ poskladať len napr. kváder $1 \times 2 \times 6$, odpovedá správne. Zadanie by malo znieť: „Koľko kvádrov sa dá poskladať ...“

Cieľom prieskumu je zistiť vplyv, ktorý by pravidelné zadávanie týchto neštandardných úloh vo vyučovaní matematiky mohlo priniesť na rozvoj kľúčových kompetencií žiakov. Argumentácia či kritické čítanie textu nie sú vo vyučovaní matematiky cielene rozvíjané. Predpokladáme, že pravidelné zadávanie difúzných úloh a hlavne následná diskusia, by mohli byť jedným z prostriedkov, ako ich rozvíjať. Pre tieto účely sme skúmané materiály rozdelili do piatich skupín. Najskôr je však nutné vysvetliť, čo považujeme za „pracovať s porozumením“. Prácu s porozumením predstavuje riešenie, ktoré v sebe odhaľuje nejasnosti zadania. Žiaci napísali konkrétne otázky, alebo zo samotného riešenia je zjavné, že sa nad rôznymi možnosťami zamysleli. Ako ukážku „práce s porozumením“ sme zvolili konkrétne riešenia alebo ich časti (Riešenie 1, 2, 3, 4).

1. skupina – Riešitelia, ktorí v zadaniach úloh videli len štandardnú úlohu a riešili ju tradičným spôsobom, tvoria prvú skupinu

ČO SI MYSLÍTE O TEJTO ÚLOHE? Je zaujímavé, ak veľmi som jej
 nepochopila. Dúfam, že som možno mala aj desiatimi číslami. Dala
 som tam rôzne kombinácie, a niekedy vyjde výsledok desiatimi číslami

Riešenie 1

ČO SI MYSLÍTE O TEJTO ÚLOHE? dá sa chápať druhá. Označiť: na bratov
 musíme prísť vďaka kocky Označiť: nemusíme náhodou kocky
 prísť na bratov

Riešenie 2

ČO SI MYSLÍTE O TEJTO ÚLOHE? Podľa mňa bola táto úloha zadaná nejedno-
 značne, malo byť zadanie, či sa číslce opakovať môžu alebo nie, keďže
 evidentne má byť výsledok číslo... Neviem presne, čo sa touto úlohou vysklo-

Riešenie 3

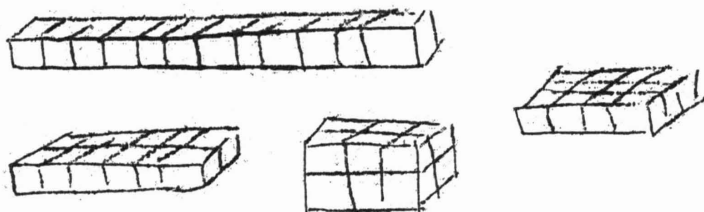
žiacov. Preplnené učebné osnovy nedávajú na hodinách matema-
 tiky učiteľom dostatok času žiakom predviesť viacero typov ne-
 štandardných úloh. Aj pri riešení štandardných úloh je učiteľ
 nútený zvoliť najefektívnejší spôsob riešenia danej úlohy (z po-
 hľadu učiteľa). Čas mu nedovoľuje žiakom predviesť viaceré spô-
 soby riešenia. Spôsob výučby matematiky na ZŠ a SŠ sa snaží
 žiakov pripraviť rýchlo a bezchybne použiť jeden z naučených al-
 goritmov. Týmto sa potláča prejav individuálnej tvorivosti či po-
 treba vyjadriť svoj vlastný názor.

2. skupina – Interpretácie číslo 4 a 5 oboch úloh považujeme za
 rozsiahlejšie. Žiaci, ktorí riešili obe úlohy v týchto interpretáciách,
 sa k riešeniu postavili neštandardne. V ich riešení ale nie je
 zrejmé, že by si boli vedomí nejasností v zadaní.

3. skupina – V tejto skupine sú žiaci, ktorí len v prvej úlohe
 „pracovali s porozumením“.

4. skupina – Žiaci, ktorí kriticky čítali len text druhej úlohy

Koľko kvádrov vieš poskladať z dvanástich rovnakých kociek?



- vo všeobecnosti je možné poskladať 4 základné typy, ak uvažujeme, že všetky kocky sú rovnaké.
- ak by záležalo na umiestnení jednotlivých kociek (napríklad: sú boli farebné), museli by sme vypočítať všetky kombinácie, akými môžu byť kocky usporiadané
- Solo by treba povedať aj to, či musíme považovať 4 kocky

Riešenie 4

tvoria skupinu kľúčovú pre prieskum. Práve u týchto žiakov by bolo možné uvažovať nad vplyvom rozboru difúznej úlohy.

5. skupina – Riešitelia, ktorí v zadaní oboch úloh postrehli nejasné miesta a rozpory a kriticky čítali už i zadanie prvej úlohy.

Údaje získané z prieskumu rozdelené podľa predchádzajúcich skupín sme zhrnuli v Tabuľke 1. Zaznačili sme tu i kontrolnú triedu VII. C no v popisovaní tabuľky o nej reč nebude. Je dôležité si všimnúť súčty jednotlivých stĺpcov. Dominantné sú 1. a 4. skupina, pre prieskum podstatné sú 3. a 4. skupina. V 3. skupine sú žiaci, ktorí v prvej úlohe objavili nejednoznačnosť (13), v 4. skupine sú žiaci, ktorí v druhej úlohe odhalili nejednoznačnosť (52). Výsledky z kontrolnej triedy nás podporujú v názore, že ak by sa vynechala diskusia, počty riešiteľov v týchto dvoch skupinách by sa významne nelíšili. Ich rozdiel je 39, čo je zo vzorky 166 nezanedbateľné množstvo (23%). Môžeme sa zamyslieť nad tým, či je to len náhoda alebo je to práve skúmaný efekt.

	1. sk.	2. sk.	3. sk.	4. sk.	5. sk.	spolu
6.B	13	2	2	2	1	20
7.C	7	1	0	15	1	24
8.C	10	1	3	3	2	19
9.C	7	0	3	10	3	23
1.C	10	2	2	11	4	29
2.C	20	3	2	2	2	29
3.B	11	0	1	9	1	22
spolu	78	9	13	52	14	166
VII.C	22	0	0	1	0	23

Tabuľka 1

Ďalšou súčasťou prieskumu bolo porovnanie výsledkov experimentálnej (arabské označenie 7.C) a kontrolnej (rímske označenie VII.C) triedy. Za tradičné (štandardné) považujeme interpretácie 1, 2 a 3 prvej úlohy a interpretácie 2 a 3 druhej úlohy. Ako vidno z Tabuľky 2, prvú úlohu riešili žiaci oboch tried v tradičných pochopeniach. Rozdiely medzi triedami sú zanedbateľné. V experimentálnej triede nasledovala diskusia, zatiaľ čo v kontrolnej triede nie. Výsledky druhej úlohy zhrnuté v Tabuľke 3 jasne naznačujú, že experimentálna trieda sa diferencovala z hľadiska rôznych interpretácií, zatiaľ čo v kontrolnej triede žiaci opäť objavili len „tradičné“ interpretácie. Znova sa môžeme zamyslieť nad tým, či je to len náhoda, alebo či práve týmto spôsobom difúzne úlohy vplyvajú na žiakov.

	1. int.	2. int.	3. int.	4. int.	5. int.
7.C	0	12	12	0	0
VII.C	5	14	4	0	0

Tabuľka 2

	1. int.	2. int.	3. int.	4. int.	nezatriedené
7.C	3	8	6	5	2
VII.C	1	13	7	0	2

Tabuľka 3

4. Záver

Škola má žiaka pripraviť aj na riešenie štandardných úloh naučeným algoritmom. Toto ale v bežnom živote človeku nestačí. Je potrebné, aby vedeli aplikovať matematiku v každodennom živote. Jedným z hlavných cieľov dobrého učiteľa je naučiť svojich žiakov logicky myslieť, čoho súčasťou je i schopnosť kriticky čítať text. Matematika nás má učiť presnosti. Je zaužívané, že i zadania úloh sú presne formulované. Ak by sa do zbierky používaných úloh pridali napríklad aj difúzne úlohy, možnosti využitia poznatkov nadobudnutých na hodinách matematiky sa len rozšíria. Treba sa zamyslieť, kedy zaradíme takúto úlohu z hľadiska časovo tematického plánu daného tematického celku ako aj uvážiť fázu vyučovacej hodiny.

Chceli by sme sa poďakovať všetkým riaditeľom a učiteľom zúčastnených škôl za ich podporu v tomto prieskume a tiež účastníkom 38. konferencie slovenských matematikov za cenné pripomienky.

Literatúra

- [1] OECD Programme for International Student Assessment (online) dostupné z:
http://www.oecd.org/pages/0,2966,en_32252351_32235731_1_1_1_1_1,00.html
 (citované 19. 2. 2007)

- [2] Kuřina, F., Matematika je řešení úloh, *Matematika – fyzika – informatika* **13**(2003–2004) 129–142
- [3] Sekerák, J., Klíčové kompetencie v matematickom vzdelávaní, *Matematika–Informatika–Fyzika* **29**(2006) (v tlači)
- [4] Turek, I., *Klíčové kompetencie*, Metodicko – pedagogické centrum v Prešove, Prešov, 2003 (ISBN 80-8045-301-2)
- [5] Hejný, M., *Rozmanitost řešení žáků jako diagnostický nástroj edukačního stylu*, Letná škola z teórie vyučovania matematiky Pytagoras 2005, (ISBN 80-969414-3-7), str. 19–31
- [6] Kovárová, I., *Analýza žiackych interpretácií a riešení difúznej úlohy o kockách*, Zborník príspevkov konferencie Matematika v škole dnes a zajtra, Ružomberok, 2006 (v tlači)

Mgr. Ivana Kovárová

Ústav matematických vied

Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika

Jesenná 5, 041 54 Košice

e-mail: ivana.kovarova@upjs.sk

Mgr. Jana Mihalčová

Ústav matematických vied

Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika

Jesenná 5, 041 54 Košice

e-mail: jana.mihalcova@upjs.sk