Učitel matematiky

Lenka Lomtatidze

Geometrie a počítač aneb Nebojte se Cabri (4)

Učitel matematiky, Vol. 11 (2003), No. 3, 129–135

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150807`

GEOMETRIE A POČÍTAČ
ANEB NEBOJTE SE CABRI (4)

LENKA LOMTATIDZE

(Pokračování série příspěvků uveřejněných v Učiteli matematiky, ročník 10, čísla 2–4.)

V předchozích dílech této série příspěvků jsme zmínili nástroje, pomocí kterých je možno v Cabri Géomètre (dále jen Cabri)[1] efektivně generovat množiny bodů (i dalších geometrických objektů) daných vlastností. Slíbili jsme, že v tomto pokračování se budeme podrobněji věnovat cyklickým křivkám.

Část 4. Cyklické křivky

4.1. Cykloidy

Uvažujme v dané rovině kružnici k a bod A, který je s kružnicí k pevně spojen. Jestliže se kružnice k (tzv. hybná polodie) kotálí po přímce (tzv. pevná polodie), vytváří bod A křivku, kterou nazýváme

- cykloida – leží–li bod A na kružnici,
- zkrácená cykloida – leží–li bod A uvnitř kružnice,
- prodloužená cykloida – leží–li bod A vně kružnice.

---

[1] Informace o tomto výukovém programu včetně odkazu na volně šiřitelnou demoverzi lze najít např. na
`http://www.math.muni.cz/~mlc/geom/cabri.html`

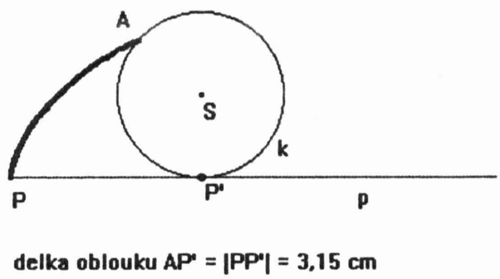
Příklad 11: Je dána polopřímka p s počátkem P a kružnice k se středem S, která se dotýká polopřímky p v bodě P. Sestrojte množinu bodů, kterou vytvoří bod $A \in k$, jestliže se kružnice k kotálí po polopřímce p. (Uvažujte výchozí polohu bodu A jako $A = P$.)

Nechte nejdříve studenty udělat náčrtek na papír a odhadnout, jak bude hledaná množina bodů vypadat. Situaci lze studentům přiblížit představou kola jedoucího po silnici a bodu na jeho plášti (viz. UM ročník 10, č.2, str. 75, obrázek 1). Teprve potom použijte Cabri.

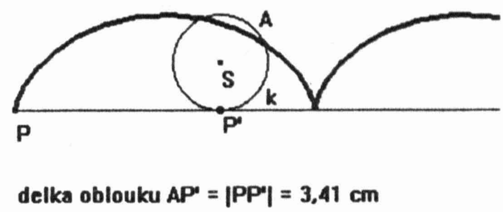
Sestrojte polopřímku p s počátkem P. Uvažujte, kružnici k odkotálenou do bodu P' (viz obr. 4.1), tj. sestrojte kružnici k se středem S, která se dotýká polopřímky p v bodě $P' \neq P$. (Sestrojte bod $P' \in p$. Zvolte *Kolmice* `C1`, klikněte na bod P' a na polopřímku p. Pomocí ikony *Kružnice* `B3` sestrojte kružnici k se středem S na kolmici, poloměr určete kliknutím na P'.) Uchopte bod P' a pohybujte jím po polopřímce p, bude se pohybovat celá kružnice k. Výchozí poloha kružnice je $P = P' = A$. Jestliže při kotálení kružnice po polopřímce p přejde bod P do bodu P', pak pro bod A platí: délka úsečky PP' je rovna délce oblouku AP'. Sestrojte takový bod A. (Zvolte ikonu *Vzdálenost a délka* `D2` a kliknutím na krajní body určete délku úsečky PP'. Nyní zvolte *Nanést délku* `C1`, klikněte na číslo udávající délku úsečky PP', potom na kružnici k a na bod P'. Odpovídající délka se nanesla na kružnici „proti směru hodinových ručiček“. Hledaný bod A je souměrně sdružený s tímto bodem podle osy SP', tj. zvolte *Osová souměrnost* `C2` a sestrojte bod A.)

Uchopte znovu bod P' a pohybujte jím po polopřímce p. Kružnice k se kotálí po polopřímce a bod A opisuje hledanou množinu bodů — **cykloidu**. K postupnému vykreslování cykloidy na obrazovku použijte *Stopa ano/ne* `E1` (klikněte myší na bod A) a pohybujte bodem P', popř. aktivujte ikonu *Pohyb objektu* `E1` a natáhněte u bodu P' pružinku (Podrobný popis těchto nástrojů viz Příklad 7, UM ročník 10, č. 4). Cykloidu lze také vykreslit užitím nástroje *Množina objektů* `C1`.

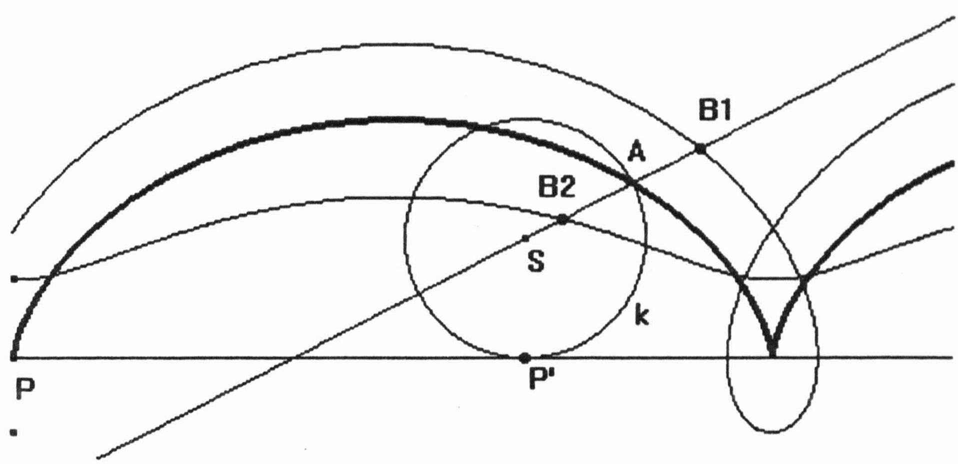
Tvar cykloidy závisí na poloměru kružnice k. Uchopte kružnici



Obrázek 4.1



Obrázek 4.2



Obrázek 4.3

k a změňte její poloměr. Sledujte změnu cykloidy — viz obrázek 4.2.

Příklad 12: Příklad 11 obměňte tak, že budete hledat množinu bodů, kterou vytvoří bod B ležící na přímce SA, přičemž $B \notin k$.

Konstrukci lze provést analogicky jako v předchozím případě. Pokud bude bod B ležet vně kružnice k, vykreslí se při kotálení kružnice k po polopřímce p tzv. prodloužená cykloida. Pokud bude bod B ležet uvnitř kružnice, vykreslí se tzv. zkrácená cykloida — viz obrázek 4.3.

4.2. Epicykloidy

Uvažujme v dané rovině kružnici l a bod A, který je s kružnicí k pevně spojen. Jestliže se kružnice k (tzv. hybná polodie) kotálí po vnějším obvodu jiné kružnice (tzv. pevná polodie), vytváří bod A křivku, kterou nazýváme epicykloida. Obdobně jako u cykloidy lze dále rozlišovat zkrácenou a prodlouženou epicykloidu podle polohy bodu A vzhledem ke kružnici l (leží-li bod A vně kružnice l, vykreslí se při kotálení kružnice l tzv. prodloužená epicykloida, pokud bude bod A ležet uvnitř kružnice, vykreslí se tzv. zkrácená epicykloida).

Příklad 13: Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r. Dále je dána kružnice l se středem L a poloměrem $r' = \frac{1}{2}r$, která se vně dotýká kružnice k v bodě P. Sestrojte množinu bodů, kterou vytvoří bod $B \in l$, jestliže se kružnice l kotálí po kružnici k. (Uvažujte výchozí polohu bodu B jako $B = P$.)

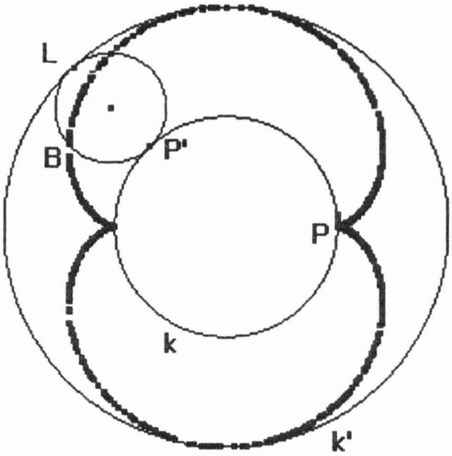
Opět nechte nejdříve studenty udělat náčrtek na papír a odhadnout, jak bude hledaná množina bodů vypadat. Teprve potom použijte Cabri.

Sestrojte kružnici k se středem S. Uvažujte, kružnici l odkotálenou do bodu P', tj. sestrojte nejdříve pomocnou kružnici k' se středem S, po které se bude pohybovat bod L při kotálení kružnice l. Dále sestrojte kružnici l se středem L a poloměrem $r' = \frac{1}{2}r$, která se dotýká kružnice k v bodě $P' \neq P$.

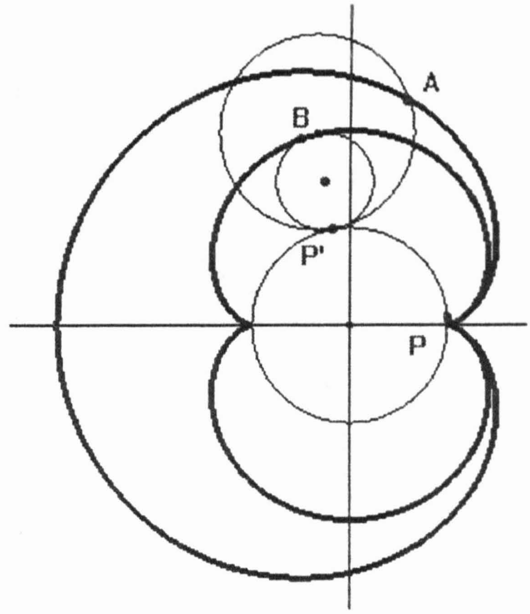
Uchopte bod L a pohybujte jím po kružnici k', bude se pohybovat celá kružnice l. Výchozí poloha kružnice l je $P = P' = B$. Jestliže při kotálení kružnice l po kružnici k přejde bod P do bodu P', pak pro bod B platí: délka oblouku PP' je rovna délce oblouku BP'. Sestrojte takový bod B. (Nejdříve je třeba určit délku oblouku PP'. Pomocí ikony *Oblouk* `B3` označte oblouk PP'.[2] Zvolte ikonu *Vzdálenost a délka* `D2` a kliknutím na oblouk PP' určete jeho délku. Nyní zvolte *Nanést délku* `C1` a analogicky jako v příkladě 11 naneste odpovídající délku na kružnici l.)

---

[2]Prostřední bod určující oblouk volte co možná nejblíže k bodu P.



Obrázek 4.4

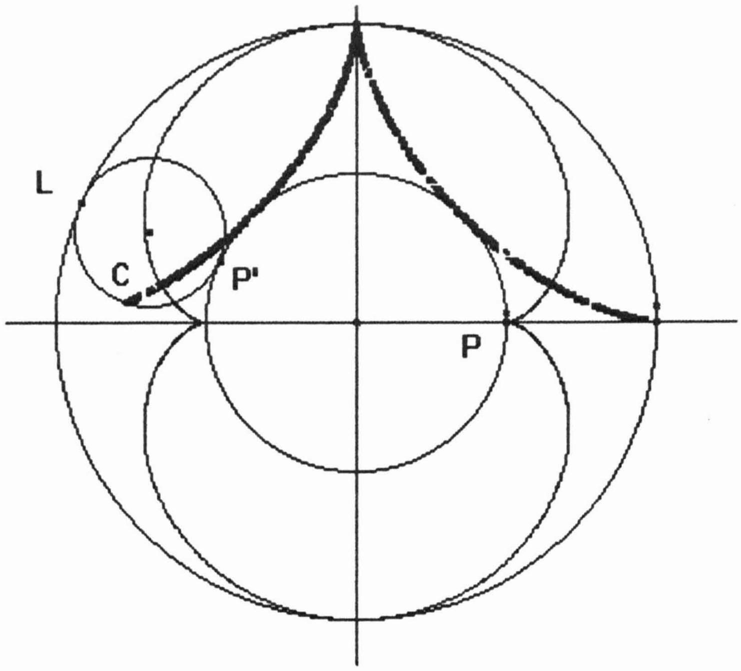


Obrázek 4.5

Uchopte znovu bod L a pohybujte jím po kružnici k'. Kružnice l se kotálí po kružnici k a bod B opisuje hledanou množinu bodů — **epicykloidu** (viz obrázek 4.4). K postupnému vykreslování epicykloidy na obrazovku použijte *Stopa ano/ne* E1 (klikněte myší na bod B) a pohybujte bodem L, popř. aktivujte ikonu *Pohyb objektu* E1).

Tvar epicykloidy závisí na poloměrech pevné a hybné polodie. Sestrojte nyní (např. do stejného obrázku) epicykloidu, kterou vytvoří bod A ležící na kružnici l' kotálející se po kružnici k. Kružnice l' má poloměr $q = r$. Postupujte analogicky jako v předchozím případě.

Výsledná křivka (viz obrázek 4.5) se nazývá **kardioida**, tj. kardioida je speciálním typem epicikloidy — opisuje ji bod pevně spjatý s kružnicí, která se kotálí po vnějším obvodu jiné kružnice, přičemž musí mít obě kružnice - pevná i kotálející se - stejný poloměr.



Obrázek 4.6

4.3. Hypocykloidy

Uvažujme v dané rovině kružnici l a bod A, který je s kružnicí k pevně spojen. Jestliže se kružnice k (tzv. hybná polodie) kotálí po vnitřním obvodu jiné kružnice (tzv. pevná polodie), vytváří bod A křivku, kterou nazýváme **hypocykloida**. Obdobně jako u cykloidy a epicykloidy lze dále rozlišovat zkrácenou a prodlouženou hypocykloidu podle polohy bodu A vzhledem ke kružnici l (leží-li bod A vně kružnice l, vykreslí se při kotálení kružnice l tzv. prodloužená hypocykloida, pokud bude bod A ležet uvnitř kružnice, vykreslí se tzv. zkrácená hypocykloida).

Vyzkoušejte:

Sestrojte hypocykloidu. Postupujte analogicky jako při konstrukci epicykloidy (viz obrázek 4.6).

4.4. Historická poznámka

Existují domněnky, že cykloida byla známá už ve starověku, ale s jistotou se to nepodařilo ověřit. V knize G. Loria [5] je udáno, že první zmínku o cykloidě lze najít v knize, kterou vydal Ch. de Bouvelles v roce 1501 v Paříži. Teprve v roce 1599 se k cykloidě vrací G. Galilei. Velké pozornosti se pak cykloidě a od ní ovozeným křivkám dostalo v 17. století, kdy se jimi zabývali M. Mersenne, G. de Roberval, bratři Bernouliové a další.

Literatura

[1] Čechová, L.: *Kam se nám zaběhla deskriptivní geometrie*, Učitel matematiky, ročník 8, č. 3, 2000

[2] Vaníček, J.: *Metodika použití dynamické geometrie při SŠ a ZŠ*
`http://www.pf.jcu.cz/cabri/`

[3] Čechová, L.: *Software pro výuku geometrie*
`http://www.math.muni.cz/~mlc/geom/`

[4] Ed. Fuchs E., Bečvář J.: *Matematika v 16. a 17. století*, Praha 1999 (Dějiny matematiky, svazek 12).

[5] Loria, G.:*Spezielle algebraische und transcendente eb Curven*, I. a II. díl, 2. vydání, Leipzig und Berlin 1910.

Mgr. Lenka Lomtatidze
Katedra matematiky PřF MU
Janáčkovo nám. 2a, 662 95 Brno
e-mail: mlc@math.muni.cz