Martina Němečková

Vývoj vyučování komplexním číslům na českých středních školách od Exner-Bonitzova programu

Učitel matematiky, Vol. 11 (2003), No. 4, 228–237

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150862

VÝVOJ VYUČOVÁNÍ KOMPLEXNÍM ČÍSLŮM NA ČESKÝCH STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH OD EXNER–BONITZOVA PROGRAMU

Martina Němečková

Téma *Komplexní čísla* se v učebních osnovách našich středních škol objevuje od roku 1849. Z pedagogického hlediska je významnou skutečností, že setkání s komplexními čísly je pro žáka situace, která se do té doby ve vyučování matematice ještě nevyskytla. Do té doby měl možnost vztáhnout nové matematické pojmy ke své předcházející smyslové zkušenosti. Představa komplexního čísla je kvalitativně nová: nenázorná, strukturální, a proto metodicky velmi náročná. Komplexní čísla nevznikla bezprostředním odrazem reality. Jsou výtvorem konstrukce rozšíření pole $\mathbb{R}$. Motivací jejich vzniku nebyla bezprostřední praktická činnost člověka, ale vnitřní potřeby matematiky. To je hlavní důvod, proč je pro žáky často velmi obtížné přijmout takové nové veličiny. Je však důležité tyto problémy překonat, protože pokud se žák s jejich existencí nevyrovná, zhoršuje si tím možnosti pro pochopení dalších abstraktních pojmů.

Podívejme se nyní, jak se vyvíjel a měnil způsob jejich výkladu během téměř sto padesáti let, od poloviny devatenáctého století do roku 1989. Nejprve si stručně připomeňme vývoj středoškolského systému v našich zemích. Jak již bylo řečeno, počátky moderního středního školství v českých zemích jsou spjaty s rokem 1849, kdy byl vydán Exner-Bonitzův *Nástin organizace gymnázií a reálek v Rakousku-Uhersku.* Tento program byl základním materiálem pro přebudování školského systému. Na jeho základě byla spojena existující šestiletá gymnázia s filozofickým kurzem. Nově vzniklá osmiletá gymnázia zakončená maturitou připravovala žáky pro univerzitní studium. Kromě gymnázií byl založen nový typ střední školy poskytující všeobecné vzdělání – reálka (nejprve šestiletá, od sedmdesátých let sedmiletá zakončená maturitou), která připravovala pro studium na technikách. Na základě zkušeností s uvedenými typy středních škol vznikly během druhé poloviny devatenáctého století další typy středních škol, které se v sobě snažily zkombinovat (s větším či menším úspěchem) výhody gymnázií a reálek.

Českou odpovědí na evropské modernizační hnutí byla tzv. Marchetova reforma, která přinesla nejen řadu změn v organizaci škol, ale i obsahové změny ve vyučování matematiky. K dalším změnám došlo až v roce 1933, kdy byl zaveden jednotný nižší stupeň střední školy, na který navazoval diferencovaný stupeň vyšší.

Rok 1948 přinesl řadu změn, které se nevyhnuly ani školství. Ze školského systému byla odstraněna dualita; existoval jediný druh všeobecně vzdělávací střední školy – čtyřleté gymnázium. Po vzoru Sovětského svazu byly od roku 1953 zavedeny jedenáctileté střední školy, jejichž poslední tři (výběrové) ročníky nahrazovaly střední školu. Nízká úroveň jejich absolventů byla hlavní příčinou zrušení „jedenáctiletek" a vzniku tříletých středních všeobecně vzdělávacích škol (SVVŠ).

Uvolnění politického napětí ve společnosti bylo (pravděpodobně) jednou z příčin návratu ke čtyřletým gymnáziím. V sedmdesátých letech na nich dochází ke vzniku prvních matematických tříd.

Až na jediný školní rok (1953/54) byla komplexní čísla součástí učiva matematiky na středních školách již od druhé poloviny 19. století. Objem poznatků zařazených do tématického celku komplexní čísla se s postupem času zvětšoval, jak bylo možné usoudit z porovnání osnov matematiky v dílčích etapách sledovaného období, a jak se potvrdilo rozborem používaných učebnic. Z analýzy středoškolských učebnic vyplynulo, že z hlediska metodiky komplexních čísel ve středoškolských učebnicích se vymezený časový úsek rozpadne na dvě hlavní etapy, které se odlišují celkovým pojetím komplexních čísel.

První období trvá přibližně do poloviny dvacátého století[16] se komplexní čísla definují pomocí pojmů imaginární jednotka i

[16] Je omezené vydáním učebnic [Fl] a [BT]; tedy roky 1862 a 1935.

a ryze imaginární číslo ai. Výklad musel tedy přirozeně začínat zavedením ryze imaginárních čísel. Motivace pro jejich zavedení byla v podstatě dvojí:

Zhruba do poloviny prvního období to byla snaha ošetřit všechny případy, které mohou nastat při odmocňování reálného čísla[17] (tj. sudá nebo lichá odmocnina z kladného (nezáporného) nebo záporného čísla). *Pomyslná* čísla byla zařazena v části učebnice věnované odmocňování. Při odmocňování byly probrány jednotlivé možnosti, bylo vysvětleno, kolik bude výsledků a jaká budou mít znaménka. V této souvislosti bych se měla podrobněji zmínit o sudé odmocnině z kladného čísla. Odmocnina totiž nebyla chápána jako inverzní funkce k funkci kvadratické – což je pochopitelné, když uvážíme, že funkce pronikají do středoškolských učebnic až ve druhém desetiletí 20. století, jako odpověď na tzv. meranský program. Odmocňování bylo často bráno jako „opačná“ operace k umocňování a úkol určit např. $\sqrt{16}$ znamenal najít číslo, jehož druhá mocnina je 16. Výsledky byly tedy dva: 4 a -4. Odtud bylo vidět, že neexistuje reálné číslo, jehož druhá mocnina by bylo číslo záporné. Tedy sudá odmocnina ze záporného čísla není číslo reálné. Proto musela být zavedena čísla ryze imaginární (*pomyslná, imaginární*).[18] Výše zmíněná úvaha sloužila jako zdůvodnění nutnosti zavést nová čísla.

Bohužel tento způsob vedl k chápání ryze imaginárních (a následně i komplexních) čísel jako formálních výrazů, kterým nebyl přiřazen žádný smysl. Autoři „definovali“ imaginární jednotku $i = \sqrt{-1}$ (popř. $i^2 = -1$) a výklad početních operací s ryze imaginárními čísly byl obvykle vysvětlen způsobem: platí $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} \cdot i$,[19] jinými slovy: při počítání musíme sudé odmocniny ze záporného čísla nejprve upravit na tvar $i\sqrt{a}$. To vedlo ke zkreslenému chápání ryze imaginárních čísel jako výrazů, se

[17] Stejně tomu bylo i v učebnicích, které lze považovat za inspiraci našich autorů: německy psané Appeltauerově, Dopplerově i Močnikově učebnici algebry i v českých *Počátcích arytmetyky* Stanislava Vydry.

[18] V některých učebnicích z tohoto období byla druhá odmocnina definována tak, jak ji známe: $\sqrt{a}$ je takové kladné číslo b, pro které $b^2 = a$.

[19] $a > 0$. Přidržela jsem se dobového zápisu, kdy u proměnné značené písmenem nebyl uváděn obor, do kterého patří.

kterými „počítáme stejně jako s čísly reálnými, pouze při umocňování imaginární jednotky musíme brát na zřetel její vlastnost $i^2 = -1$“ [Fl]. Správnému pochopení nepomáhalo ani vysvětlení, že ryze imaginární čísla získáme z čísel reálných, když číslici 1 (v součinu $a = a \cdot 1$) nahradíme písmenem i [Ho] a jemu podobná.

Druhý způsob, jak žáky připravit na existenci jiných než reálných čísel, bylo připomenutí skutečnosti, že se při řešení kvadratických rovnic setkali s rovnicemi, které neměly řešení. Další výklad se potom odvíjel od požadavku vyřešit kvadratickou rovnici se záporným diskriminantem.[20]

Vycházelo se obvykle z nejjednodušší kvadratické rovnice se záporným diskriminantem $x^2 + 1 = 0$. Ta bohužel byla (až do [Ba]) upravena na tvar $x^2 = -1$ a odtud $x = \pm\sqrt{-1}$. Tím se opět nabízelo „definovat“ imaginární jednotku označením $\sqrt{-1} = i$. V [Ba] se autoři striktně drželi tvaru $x^2 + 1 = 0$, ale definice imaginární jednotky jako čísla, které je řešením této rovnice, byla také nicneříkající.[21] Alespoň se však žáci vyhnuli nesprávnému používání symbolu $\sqrt{a}$, který je definován jen pro nezáporná a.

Ryze imaginární čísla byla definována jako výrazy typu ai, kde i je imaginární jednotka. Komplexní čísla byla potom definována jako výrazy ve tvaru $a + bi$, tedy dvojčleny složené z čísla reálného a ryze imaginárního.

Z takové definice však bylo obtížné vyčíst způsob, jak by komplexní čísla mohla být graficky zobrazena. Proto autoři museli při úvahách o geometrické interpretaci komplexních čísel vycházet, stejně jako v definici, z geometrické interpretace čísel ryze imaginárních. K odvození polohy imaginární osy používali buď Argandův způsob (pomocí otáčení zvoleného bodu na reálné ose kolem počátku soustavy souřadnic) nebo brali imaginární jednotku jako střední geometrickou úměrnou čísel 1 a -1.[22] Početní operace

---

[20]Někdy byli žáci k tomuto požadavku dovedeni pouze faktem, že umějí řešit kvadratické rovnice s kladným i nulovým diskriminantem, zatímco ty se záporným ne; někdy se autoři odvolávali na základní větu algebry a chtěli dát platnost větě: Každá kvadratická rovnice má dva kořeny. [By]

[21]V dalším výkladu je však imaginární jednotka definována korektně $i = [0, 1]$.

[22]Jedinou výjimkou byl Machovec, který, aby se vyhnul odvozování zob-

s komplexními (ale i ryze imaginárními) čísly často nebyly definovány, ale byly pouze předvedeny na několika ukázkových příkladech. Obecně je možno říci, že se tak dělo hlavně na počátku tohoto období, ale i ve druhé polovině 19. století obsahovaly některé učebnice obecné definice početních výkonů s komplexními čísly ([St]). Častými nedostatky vyskytujícími se v učebnicích tohoto období bylo, že výsledek definovaných operací nepatřil do oboru, např. při násobení $0 \cdot i = 0$, když ryze imaginární číslo bylo definováno předpisem ai, $a \neq 0$ a také uvádění rovnosti komplexních čísel jako věty (někdy s důkazem) namísto jejího definování.

Od Studničkovy učebnice byl (až na několik výjimek) do výkladu zařazen i goniometrický tvar komplexního čísla, jeho odvození, definice násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru a Moivreova věta.

Aplikace komplexních čísel nebyla příliš rozsáhlá. Lze konstatovat, že pokud byla v učebnici probírána Moivreova věta a pokud byly do učebnice zařazeny binomické rovnice, bylo komplexních čísel užito právě k řešení binomických rovnic. Ne vždy byla součástí výkladu geometrická interpretace komplexních odmocnin.

Zcela zvláštní postavení má v představené řadě učebnic učebnice *Matematika pro II. třídu gymnasií* ([Ba]). Označila bych ji za *přechod* mezi oběma obdobími. Úvodní motivace se sice neliší od učebnic, které ji přímo předcházely, tedy najít kořen rovnice $x^2 + 1 = 0$. Ještě před tím je však řečeno, že se v matematice vyskytují situace, kdy nevystačíme s reálnými čísly, a že proto byla zavedena čísla obecnější, čísla komplexní. V celém výkladu se prolínají přístup z prvního s přístupem z druhého období. Hned zpočátku je řečeno, že řešením výše uvedené rovnice je nějaké číslo i (které nepatří do množiny čísel reálných) a že množina komplexních čísel musí kromě něj obsahovat ještě i množinu čísel reálných. Stejně jako v prvním období jsou definována čísla ryze imaginární (0 mezi ně nepatřila), ale narozdíl od prvního období jsou potom komplexní čísla definována jako uspořádaná dvojice

razení imaginární jednotky pomocí úměry $i : 1 = -1 : i$, odvodil nejprve z algebraického tvaru komplexního čísla tvar goniometrický, na jehož základě potom ukázal, že osa ryze imaginárních čísel je kolmá na osu reálnou.

– avšak ne dvou reálných čísel, nýbrž čísla reálného a čísla ryze imaginárního, resp. nuly. Po vysvětlení geometrické interpretace komplexních čísel se komplexní čísla začnou chápat jako (značit, ne definovat) uspořádané dvojice reálných čísel a dalším výkladu se pracuje již jen s uspořádanými dvojicemi čísel reálných.

V učebnici [Ma] se objevuje nová motivace pro zavedení komplexních čísel: Reálná čísla je možno zobrazit na číselné ose. Každému reálnému číslu je přiřazen právě jeden bod přímky a naopak, každému bodu přímky je přiřazeno právě jedno reálné číslo. Nabízí se otázka, zda i bodům roviny je možno jednoznačně přiřadit nějaká čísla, neboli, zda existují čísla, jejichž obrazy jsou body roviny. Tímto způsobem jsou žáci připraveni na zavedení komplexních čísel jako uspořádaných dvojic čísel reálných.

A tím se dostávám ke *druhému období*,[23] kdy již byla komplexní čísla definována v souladu s moderními matematickými poznatky.

Aby byl výčet způsobů, kterými se autoři snažili přiblížit žákům nezbytnost zavedení nového druhu čísel, úplný, musím zde ještě připomenout učebnici [Ka], kde se v úvodu autoři zcela obešli bez řešení kvadratické rovnice se záporným diskriminantem. Partie o komplexních číslech plynule navazuje na výklad o vektorech, a proto se jako naprostá samozřejmost jeví „další využití" vektorů. Aby mohly být matematicky popsány některé fyzikální jevy, je vhodné přiřadit vektoru v rovině nějaký matematický popis, nějaké číslo. Vektor v rovině může být určen dvojicí reálných čísel. Proto se nabízí myšlenka definovat množinu nových čísel tak, že každý její prvek je uspořádaná dvojice reálných čísel.

Kromě již zmíněného způsobu zavedení množiny komplexních čísel jako množiny, jejíž prvky jsou uspořádané dvojice reálných čísel (užitého v [Ma], [Ka], [Sy]), se v [Ri] sestrojí množina komplexních čísel adjunkcí prvku i, pro který platí $i^2 = -1$, k množině čísel reálných.

Při definování komplexních čísel pomocí uspořádaných dvojic reálných čísel byly definovány operace s těmito novými čísly, tj. jejich rovnost, sčítání a násobení tak, abychom pro komplexní čísla

[23](1956 – 1987).

s imaginární částí rovnou nule získali výsledky, které bychom obdrželi při počítání s reálnými čísly. Protože jsou početní operace s komplexními čísly definovány pomocí početních výkonů s čísly reálnými, je snadné dokázat jejich vlastnosti.

Při tomto přístupu je postup při budování oboru komplexních čísel opačný než v předcházejícím období (i když používat v souvislosti s ním termín budování oboru je poněkud nadnesené): Nejprve jsou definována nová čísla a početní operace s nimi, a teprve potom jsou žáci případně upozorněni na „zvláštní" případy těchto čísel, čísla ryze imaginární a čísla reálná.

Tento přístup také umožňuje definovat imaginární jednotku exaktně ($i = [0,\ 1]$). Teprve až po jejím definování je ukázáno, že právě číslo i je jedním řešením kvadratické rovnice $x^2 + 1 = 0$.

Tento způsob zavádění komplexních čísel byl (a je)[24] pro žáky velice názorný a srozumitelný. Žák si mohl nová čísla snadno vizualizovat a to dvojím způsobem: komplexnímu číslu $[a_1,\ a_2]$ odpovídá bod $A = [a_1,\ a_2]$ v Gaussově rovině, nebo může být určeno vektorem $\overrightarrow{OA}$, kde O je počátek soustavy souřadnic a A je obraz komplexního čísla. Zobrazování komplexních čísel jako vektorů dovoluje žákům užít znalosti, které měli z nižších ročníků, popřípadě z fyziky (např. skládání vektorů, které odpovídá grafickému sčítání komplexních čísel).

Ve druhém období se v učebnicích také poprvé setkáváme s řešením kvadratických rovnic s komplexními koeficienty. Kvadratické rovnice byly, v případě, že učebnice obsahovala výklad o komplexních (nebo alespoň ryze imaginárních) číslech, řešeny na množině komplexních čísel. Ovšem jen třikrát se v probrané řadě učebnic objevilo řešení kvadratických rovnic s komplexními koeficienty. Poprvé to bylo v učebnici [Ba], kde bylo rozebíráno především řešení ryze kvadratické rovnice $x^2 = a,\ a \in \mathbb{C}$; dále jsou komplexní koeficienty u kvadratické rovnice uvažovány v [Sy] a [Ri].

[24]Tvrzení vyjadřuje můj subjektivní názor. O tom, že někteří učitelé a didaktici matematiky mohou mít názor opačný, svědčí i diskuse, která se rozproudila na stránkách časopisu *Matematika ve škole* v 50. letech, kdy tento přístup k zavádění komplexních čísel začal pronikat do školské matematiky nebo skutečnost, že v „porevoluční" učebnici E. Calda: *Komplexní čísla*, 1994 bylo od tohoto postupu upuštěno.

Velké rozdíly mezi jednotlivými obdobími jsou také v užití komplexních čísel. V prvním období byla problematika komplexních čísel probrána v jedné kapitole (případně byla probírána čísla ryze imaginární a čísla komplexní zvlášť s možným časovým odstupem) a poté se jejich využití, pokud nějaké bylo, omezilo na řešení binomických rovnic pomocí Moivreovy věty. Výčet aplikací ve druhém období je podstatně širší. Komplexní čísla získala širší uplatnění především v geometrii, např. definování amplitudy pomocí orientovaného úhlu umožnilo využít komplexních čísel k definici goniometrických funkcí (poprvé v [Ba]), byl zdůrazněn geometrický význam součinu komplexních čísel (poprvé v [Ba]), komplexní čísla byla užita k zavedení polárních souřadnic bodu ([Sy]) atd.

Zatímco v učebnicích z prvního období byly jednotlivé celky učiva odděleny a souvislosti mezi jednotlivými partiemi byly, v lepším případě, jen naznačeny, pro druhé období je charakteristické vzájemné propojení jednotlivých celků s důrazem na vyzdvižení vzájemných souvislostí. V případě komplexních čísel je spojení algebry a geometrie patrné v „obou" směrech: při zavádění komplexních čísel (užití vektorů k jejich definici ([Ka]), geometrická motivace zavedení komplexních čísel jako uspořádaných dvojic čísel reálných ([Ma])) i při jejich aplikaci (jejich užití k definici goniometrických funkcí, k definici otáčení kolem počátku soustavy souřadnic, ke konstrukci pravidelných n-úhelníků (poprvé v [Hb]) atd.).

Ukázali jsme si, že přístup ke komplexním číslům byl ve školské matematice v podstatě dvojí: první, který bych nazvala formální, kopíruje historické počátky komplexních čísel (dá-li se v souvislosti se 16. stoletím hovořit o komplexních číslech) od jejich uvedení do matematiky Cardanem přes období intuitivního počítání, hledání pravidel pro výpočty s nimi a objevování jejich vlastností a tím i dokazování jejich „užitečnosti" a „práva na existenci". Druhý přístup („vědecký"), který časově následoval po prvním, chápe komplexní čísla jako plnoprávné matematické objekty, exaktně je definuje a dokazuje jejich vlastnosti. Jeho základem je Hamiltonova definici komplexních čísel pomocí uspořádaných dvojic čísel reálných. Přestože v průběhu času docházelo ke změnám v obsahu osnovy sledovaného tématu a někdy i k redukci učiva, jakmile začal být ve školské matematice používán druhý jmenovaný přístup, nikdy (ve sledovaném období) úroveň výkladu neklesla zpět k formálnímu zpracování problematiky komplexních čísel.

V následujícím seznamu středoškolských učebnic uvádím pouze jedno vydání (obvykle první), i když jsem porovnávala nejen jednotlivé tituly, ale i jejich různá vydání. Některé z učebnic navíc vycházely ve dvou verzích – pro reálky a pro gymnázia.

Literatura

[Fl] Fleischer, Josef, *Mathematika. Učební kniha pro vyšší realní školy a gymnasia*, 1. díl, Algebra, Winiker, Brno, 1862

[Ši] Šimerka, Václav, *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia*, 1. vydání, Grégr, Praha, 1863

[Sm] Smolík, Josef, *Algebra pro střední školy*, 1. vydání, Kober, Praha, 1870

[Mo] Močnik, František, *Arithmetika i algebra pro vyšší třídy škol středních*, Tempský, Praha, 1875

[St] Studnička, František Josef, *Algebra pro vyšší třídy škol středních*, 1. vydání, Grégr, vl. nákladem, Praha, 1877

[Ta] Taftl, Emanuel, *Algebra vyšším třídám středních škol českých*, 1. vydání, Čermák, Klatovy, 1883

[Ma] Machovec, František, *Algebra pro vyšší třídy škol středních*, vydání pro gymnasia, 1. vydání, Tempský, Praha, 1886

[Ho] Hoza, František, *Algebra pro vyšší reálky*, 1. vydání, Kober, Praha, 1892

[By] Bydžovský, Bohumil, *Aritmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií*, JČM, Praha, 1911

[BV] Bydžovský, Bohumil – Vojtěch, Jan, *Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií*, JČM, Praha, 1912

[Mu] Muk, Jindřich, *Aritmetika pro 6. třídu gymnasií a reálných gymnasií*, Profesorské nakl. a knihkup., Praha, 1925

[BT] Bydžovský, Bohumil – Teplý, Stanislav – Vyčichlo, František, *Aritmetika pro V. – VII. třídu středních škol*, 6. přepr. vydání, přepr. podle učebních osnov z r. 1933, JČMF, Praha, 1935

[Ba] Balada, František – Čech, Eduard – Holubář, Josef, *Matematika*, Učebnice pro 2. třídu gymnasií, 1. vydání, St. nakl. učebnic, Praha, 1951

[Ma] Mastný, Emil – Šimek, Peter – Uhlík, Peter, *Trigonometrie pro 10. a 11. postupný ročník*, 1. vydání, SPN, Praha, 1954

[Hb] Holubář, Josef – Hradecký, František – Hruša, Karel, *Algebra pro IX. – XI. postupný ročník*, 1. vydání, SPN, Praha, 1954

[Ka] Kabele, Jiří – Mikulčák, Jiří – Bartoš, Pavel, *Matematika pro II. ročník SVVŠ*, 1. vydání, SPN, Praha, 1964

[Kr] Kraemer, Emil – Bartoš, Pavel – Hustá, Anna, *Matematika pro II. ročník SVVŠ, doplněk k základní učebnici*,

[Sy] Sýkora, Václav – Odvárko, Oldřich – Smida, Jozef, *Matematika pro gymnázia*, Sešit 6, 1. vydání, SPN, Praha, 1979

[Še] Šedivý, Jaroslav – Medek, Václav – Odvárko, Oldřich, *Matematika pro gymnázia*, Sešit 8, 1. vydání, SPN, Praha, 1980

[Ri] Riečan, Beloslav – Šedivý, Jaroslav, *Matematika pro IV. ročník gymnázií*, 1. vydání, SPN, Praha, 1987

Mgr. Martina Němečková
doktorandka MFF UK Praha
Sokolovská 83
186 00 Praha 8
e-mail: martinanemeckova@yahoo.com