

## Matematická olympiáda

*Učitel matematiky*, Vol. 11 (2003), No. 4, 238–250

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150863>

### Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2003

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 30. 3. – 2. 4. 2003 se v Liberci uskutečnilo celostátní kolo 52. ročníku matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C, pro školní rok 2003–2004.

### Úlohy celostátního kola 52. ročníku matematické olympiády

Liberec 30. března – 2. dubna 2003

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x^2 - xy + y^2 &= 7, \\x^2y + xy^2 &= -2.\end{aligned}$$

(J. Földes)

**Řešení.** Protože druhou rovnicí můžeme upravit na tvar  $xy(x + y) = -2$ , upravme podobně i první rovnici:  $(x + y)^2 - 3xy = 7$ . Pro čísla  $s = x + y$ ,  $p = xy$  tak dostáváme ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned}s^2 - 3p &= 7, \\sp &= -2,\end{aligned}\tag{1}$$

která po vyjádření  $p = -2/s$  (zřejmě nemůže být  $s = 0$ ) z druhé rovnice vede na kubickou rovnici  $s^3 - 7s + 6 = 0$ . Ta má celočíselné kořeny  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 2$  a  $s_3 = -3$ . Nalezeným hodnotám  $s$  odpovídají tyto hodnoty součinu  $p = xy$ :  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = -1$ ,  $p_3 = \frac{2}{3}$ . Čísla  $x$ ,  $y$  tvoří dvojici kořenů kvadratické rovnice  $t^2 - st + p = 0$ , takže se jedná o jednu z rovnic

$$t^2 - t - 2 = 0, \quad t^2 - 2t - 1 = 0, \quad t^2 + 3t + \frac{2}{3} = 0.$$

Jejich řešením dostaneme (všech) šest řešení dané soustavy:

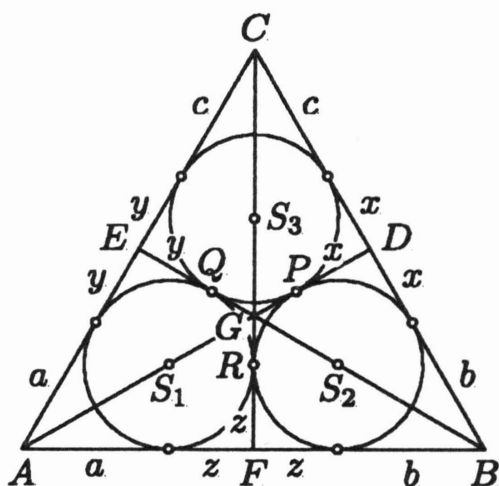
$$\{x, y\} = \{-1, 2\}, \{x, y\} = \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\},$$

$$\{x, y\} = \left\{ \frac{-9 + \sqrt{57}}{6}, \frac{-9 - \sqrt{57}}{6} \right\}.$$

2. Uvnitř stran  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  daného trojúhelníku  $ABC$  zvolíme po řadě body  $D$ ,  $E$ ,  $F$  tak, aby se úsečky  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  prořely v jednom bodě, který označíme  $G$ . Pokud lze čtyřúhelníkům  $AFGE$ ,  $BDGF$ ,  $CEGD$  vepsat kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk, pak je trojúhelník  $ABC$  rovnostranný. Dokažte.

(M. Tancer)

**Řešení.** Předpokládejme, že zmíněné čtyřúhelníky mají uvedenou vlastnost. Ze souměrnosti tečen z daného bodu k dané kružnici vyplývá, že strany trojúhelníku  $ABC$  jsou rozděleny body  $D$ ,  $E$ ,  $F$  a body dotyku kružnic vepsaných uvažovaným čtyřúhelníkům na úseky délek, jež označíme podle obr. 1. Jsou na něm rovněž vyznačeny body  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  vzájemného dotyku zmíněných kružnic. Naším cílem je dokázat rovnosti  $x = y = z$  a  $a = b = c$ .



Obr. 1

Pro úseky tečen z bodu  $A$  ke kružnicím při straně  $BC$  platí rovnosti  $a + 2z = |AP| = a + 2y$ , odkud ihned plyne  $y = z$ ;

z důvodů symetrie tudíž skutečně platí  $x = y = z$ . (Všude dále budeme psát  $x$  namísto  $y$  a  $z$ .) Všimněme si nyní trojúhelníků  $AEG$  a  $AFG$ . Mají společnou stranu  $AG$  a shodné strany  $AF$  a  $AE$  (délky  $a+x$ ). Také jejich třetí strany  $EG$  a  $FG$  jsou shodné:

$$|EG| = |EQ| + |QG| = x + |RG| = |FR| + |RG| = |FG|.$$

Proto  $\triangle AEG \simeq \triangle AFG$  podle věty *sss*, tudíž úhly  $BAD$  a  $CAD$  jsou shodné a polopřímka  $AD$  je osou úhlu  $BAC$ . Jak víme, osa úhlu trojúhelníku protíná protější stranu v poměru délek přilehlých stran. V našem případě to znamená, že

$$\frac{a + 2x + b}{a + 2x + c} = \frac{b + x}{c + x}.$$

Snadnou úpravou dostaneme rovnost  $(b - c)(a + x) = 0$ , ze které vidíme, že  $b = c$ . Z důvodů symetrie tudíž platí  $a = b = c$  a celý důkaz je hotov.

**Jiné řešení.** Označme  $S_1, S_2, S_3$  středy vepsaných kružnic (obr. 1). Stejně jako v předchozím řešení si nejprve všimneme, že platí  $x = y = z$  a že trojúhelníky  $AEG$  a  $AFG$  jsou shodné. K tomu jsme využili rovnost  $|GQ| = |GR|$ , ze které plyne, že podle věty *sss* jsou shodné i trojúhelníky  $S_1QG$  a  $S_1RG$ . Jelikož  $R \in S_1S_2$  a  $Q \in S_1S_3$ , ze souměrnosti podle osy  $AD$  nyní plyne, že přímky  $AB$  a  $S_1S_2$  svírají stejný úhel jako přímky  $AC$  a  $S_1S_3$ , a protože kolmé průměty úseček  $S_1S_2$  a  $S_1S_3$  na odpovídající přímky  $AB$ , resp.  $AC$  jsou shodné (mají délku  $2x$ ), je  $|S_1S_2| = |S_1S_3|$ . Analogicky  $|S_1S_2| = |S_2S_3|$ , takže trojúhelník  $S_1S_2S_3$  je rovnostranný. Odtud pro poloměry  $r_1, r_2$  a  $r_3$  vepsaných kružnic plyne  $r_1 + r_2 = r_2 + r_3 = r_3 + r_1$ , neboli  $r_1 = r_2 = r_3$ . Kružnice jsou tedy shodné, takže je  $AB \parallel S_1S_2, BC \parallel S_2S_3$  a  $CA \parallel S_3S_1$  a trojúhelník  $ABC$  je rovnostranný.

*Poznámka.* K dokončení předchozího důkazu můžeme úvahu o délkách úseček  $S_iS_j$  nahradit úvahou o tzv. *orientovaných úhlech* mezi přímkami. Orientovaný úhel  $\langle p, q \rangle$  přímek  $p, q$  (v tomto pořadí) je úhel, o který musíme v kladném směru otočit přímku  $q$ , aby byla rovnoběžná s přímkou  $p$ . Přitom  $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$ , právě

když  $\langle p, q \rangle$  je násobek  $90^\circ$ . Ze souměrnosti podle os  $AD$ ,  $BE$  a  $CF$  tak postupně dostáváme  $\langle S_1S_3, AC \rangle = \langle AB, S_1S_2 \rangle = \langle S_2S_3, BC \rangle = \langle AC, S_1S_3 \rangle$ . Protože obě odpovídající kružnice se středy  $S_1, S_3$  mají společnou tečnu  $AC$  a leží v téže polorovině určené přímkou  $AC$ , znamená to, že  $S_1S_3$  a  $AC$  jsou rovnoběžné.

3. Posloupnost  $(x_n)_{n=1}^\infty$  s prvním členem  $x_1 = 1$  splňuje pro každé  $n > 1$  podmínku

$$x_n = \pm(n-1)x_{n-1} \pm (n-2)x_{n-2} \pm \dots \pm 2x_2 \pm x_1$$

s vhodnou volbou znamének " + " a " - ". Rozhodněte, zda je možné, aby nerovnost  $x_n \neq 12$  platila pouze pro konečně mnoho indexů  $n$ .

(P. Černek)

**Řešení.** Pokud se nám podaří sestavit podle daného pravidla  $(k+3)$ -člennou posloupnost

$$x_1 = 1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = x_{k+3} = 12,$$

můžeme všechny následující členy  $x_{k+4}, x_{k+5}, x_{k+6}, \dots$  definovat tak, aby se rovněž rovnaly číslu 12. Skutečně, s ohledem na matematickou indukci stačí ukázat, jak s vytčeným cílem vybrat znaménka v rovnosti určující člen  $x_{k+4}$ . Položme

$$x_{k+4} = +12(k+3) - 12(k+2) - 12(k+1) + 12k \pm \\ \pm (k-1)x_{k-1} \pm (k-2)x_{k-2} \pm \dots \pm x_1,$$

přítom znaménka v druhém řádku vybereme přesně taková, jaká byla v součtu určujícím člen  $x_k = 12$ . Pak se součet v druhém řádku rovná 12, takže vychází

$$x_{k+4} = 12(k+3) - 12(k+2) - 12(k+1) + 12k + 12 = 12.$$

Vhodný příklad pro  $k = 8$  vypadá takto:  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ,

$$x_4 = 3 - 2 + 1 = 2,$$

$$x_5 = 4 \cdot 2 - 3 - 2 + 1 = 4,$$

$$x_6 = 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 3 - 2 - 1 = 6,$$

$$x_7 = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 3 - 2 + 1 = 10,$$

$$x_8 = 7 \cdot 10 - 6 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 3 + 2 + 1 = 12,$$

$$x_9 = 8 \cdot 12 - 7 \cdot 10 - 6 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 3 - 2 - 1 = 12,$$

$$x_{10} = 9 \cdot 12 - 8 \cdot 12 - 7 \cdot 10 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 3 + 2 + 1 = 12,$$

$$x_{11} = 10 \cdot 12 + 9 \cdot 12 - 8 \cdot 12 - 7 \cdot 10 - 6 \cdot 6 - 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 3 + 2 - 1 = 12.$$

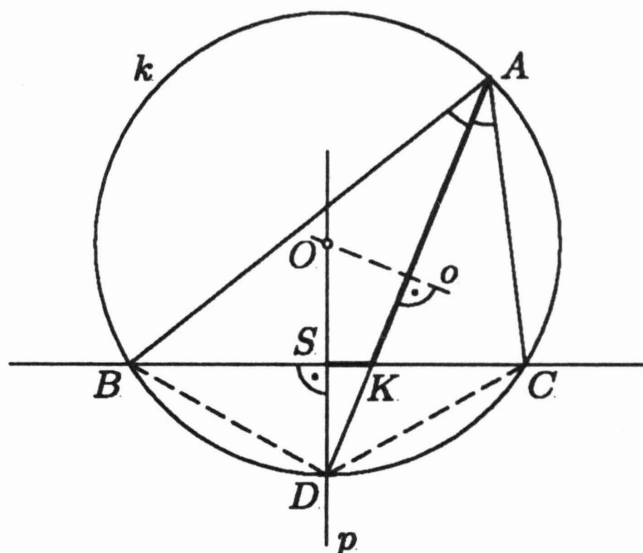
Dokázali jsme, že jedna z uvažovaných posloupností má pouze prvních sedm členů různých od čísla 12.

4. V rovině je dán tupý úhel  $AKS$ . Sestrojte trojúhelník  $ABC$  tak, aby jeho strana  $BC$  ležela na přímce  $KS$ , bod  $S$  byl jejím středem a bod  $K$  jejím průsečíkem s osou protilehlého úhlu  $BAC$ .

(P. Leischner)

**Řešení.** *Rozbor.* Předpokládejme, že trojúhelník  $ABC$  má všechny požadované vlastnosti a označme  $D$  průsečík kružnice  $k$  opsané trojúhelníku  $ABC$  s polopřímkou opačnou k rameni  $KA$  daného úhlu  $AKS$  (obr. 2). Polopřímka  $AD$  púlí úhel  $BAC$ , proto jsou úhly  $BAD$  a  $CAD$  shodné, tudíž jsou shodné i tětivy  $BD$  a  $CD$  kružnice  $k$ . Bod  $S$  je proto středem základny  $BC$  rovnoramenného trojúhelníku  $BCD$ , takže úhel  $BSD$  je pravý. To znamená, že bod  $D$  leží na přímce  $p$ , která prochází bodem  $S$  kolmo k danému rameni  $KS$ . Střed  $O$  kružnice  $k$  leží jednak na přímce  $p$  (ose tětivy  $BC$ ), jednak na přímce  $o$ , která je osou tětivy  $AD$ .

*Konstrukce.* Pro daný úhel  $AKS$  nejprve proložíme bodem  $S$  přímku  $p$  kolmou k rameni  $KS$ . Pak sestrojíme průsečík  $D$  přímky  $p$  s polopřímkou opačnou k rameni  $KA$ . Dále sestrojíme



Obr. 2

osu  $o$  úsečky  $AD$  a její průsečík s přímkou  $p$  označíme  $O$ . Konečně sestrojíme kružnici  $k$  se středem  $O$  a poloměrem  $r = |OA|$  ( $= |OD|$ ) a její průsečíky s přímkou  $KS$  označíme  $B$  a  $C$ .

*Důkaz konstrukce.* Ukážeme, že sestrojený trojúhelník  $ABC$  má všechny požadované vlastnosti. Z posledního kroku konstrukce plyne, že body  $B, C$  leží na přímce  $KS$  a že bod  $S$  je středem úsečky  $BC$ . Protože na přímce  $p$ , ose úsečky  $BC$ , leží i bod  $D$ , platí  $|BD| = |CD|$ , a proto  $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAD|$  (neboť všechny body  $A, B, C, D$  leží na kružnici  $k$ .) Polopřímka  $AD$  je tedy osou úhlu  $BAC$  a bod  $K$  je její průsečík s úsečkou  $BC$ .

*Diskuse.* Vysvětlíme, proč pro daný tupý úhel  $AKS$  je hledaný trojúhelník  $ABC$  jediný (nepřihlížíme-li k možnosti zaměnit označení vrcholů  $B$  a  $C$ ). Protože je úhel  $AKS$  tupý, bod  $D$  z naší konstrukce zřejmě existuje a přímky  $p$  a  $o$  jsou různoběžné, takže i bod  $O$  je určen jednoznačně. Zbývá zdůvodnit, proč kružnice  $k$  protne přímku  $KS$  ve dvou bodech. Protože bod  $K$  je vnitřním bodem základny  $AD$  rovnoramenného trojúhelníku  $ADO$ , platí  $|OK| < |OA| = |OD| = r$ , tudíž bod  $K$  leží ve vnitřní oblasti kružnice  $k$  a přímka  $KS$  je nutně její sečnou.

5. Ukažte, že v číselné soustavě s libovolným základem  $z \geq 3$  existují dvojmístná čísla  $A$  a  $B$ , která se liší jen pořadím svých číslic a mají tuto vlastnost: kvadratická rovnice  $x^2 - Ax + B = 0$  má v oboru reálných čísel dvojnásobný kořen. Dokažte rovněž, že pro daný základ  $z$  je taková dvojice  $A, B$  jediná. Například v desítkové soustavě ( $z = 10$ ) to jsou jediné čísla  $A = 18$  a  $B = 81$ .

(J. Šimša)

**Řešení.** Hledaná dvojmístná čísla  $A, B$  mají tvar  $A = az + b$  a  $B = bz + a$ , kde  $a, b$  jsou jejich (nenulové!) číslice, takže  $a, b \in \{1, 2, \dots, z-1\}$ . Kvadratická rovnice z textu úlohy má dvojnásobný kořen  $x_0$ , právě když platí  $2x_0 = A$  a  $x_0^2 = B$ . Z těchto rovností plyne, že číslo  $x_0$  je kladné a celé. Vzhledem k nerovnosti  $x_0^2 = B < z^2$  ( $B$  je totiž dvojmístné, zatímco  $z^2$  je trojmístné) navíc platí  $x_0 < z$ , odkud  $A = 2x_0 < 2z$ , takže číslo  $A$  má jako první číslici jedničku. Platí tedy  $a = 1$  a z rovností  $2x_0 = z + b$  a  $x_0^2 = bz + 1$  vyloučením  $x_0$  dostaneme pro číslici  $b$  kvadratickou rovnici  $(b - z)^2 = 4$  s dvěma kořeny  $b_1 = z - 2$  a  $b_2 = z + 2$ . Za číslici  $b$  lze ovšem vzít pouze první z nich, takže nutně  $b = z - 2$ .

Dokázali jsme, že čísla  $A, B$  musejí být tvaru  $A = z + (z - 2) = 2z - 2$  a  $B = (z - 2)z + 1 = (z - 1)^2$ ; v soustavě o základě  $z$  tedy mají zápisy  $A = 1(z - 2)$  a  $B = (z - 2)1$ . Provedeme ještě *zkoušku*: kvadratická rovnice  $x^2 - (2z - 2)x + (z - 1)^2 = 0$  má skutečně dvojnásobný kořen  $x_0 = z - 1$ , neboť její levá strana je rovna  $(x - z + 1)^2$ .

*Poznámka.* Klíčovou rovnost  $a = 1$  lze odvodit i bez úvahy o dvojnásobném kořenu  $x_0$  zkoumané rovnice, když zapíšeme podmínku, že její diskriminant  $A^2 - 4B$  je roven nule:

$$0 = A^2 - 4B = (az + b)^2 - 4(bz + a) = b^2 + 2z(a - 2)b + a(az^2 - 4).$$

Poslední výraz může mít nulovou hodnotu, jen když je činitel  $a - 2$  záporný, neboť  $b \geq 1$ ,  $a \geq 1$ ,  $z \geq 3$  a  $az^2 - 4 \geq 3^2 - 4 = 5$ . Z nerovnosti  $a - 2 < 0$  již ovšem plyne  $a = 1$ . Pro takové  $a$  dostáváme rovnici  $0 = b^2 - 2zb + (z^2 - 4)$  a závěr je stejný jako v uvedeném řešení.



6. Je-li součin kladných čísel  $a, b, c$  roven 1, pak platí

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

Dokažte.

(P. Kaňovský)

**Řešení.** K daným kladným číslům  $a, b, c$  splňujícím podmínku  $abc = 1$  zapíšeme AG-nerovnost pro trojici čísel  $a/b, a/b$  a  $b/c$ :

$$\frac{1}{3} \left( \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = a.$$

Platí tedy odhad

$$\frac{2a}{3b} + \frac{b}{3c} \geq a.$$

Ze stejného důvodu platí i odhady

$$\frac{2b}{3c} + \frac{c}{3a} \geq b \quad \text{a} \quad \frac{2c}{3a} + \frac{a}{3b} \geq c.$$

Sečtením těchto tří odhadů dostaneme dokazovanou nerovnost.

**Jiné řešení.** Platí-li pro kladná čísla  $a, b, c$  rovnost  $abc = 1$ , pak  $\max\{a, b, c\} \geq 1$  a  $\min\{a, b, c\} \leq 1$ . Protože dokazovaná nerovnost se nezmění, zaměníme-li trojici  $(a, b, c)$  trojicí  $(b, c, a)$  nebo trojicí  $(c, a, b)$ , budeme předpokládat, že čísla  $a$  a  $c$  jsou z trojice  $(a, b, c)$  nejmenší a největší (v některém pořadí), takže platí

$$(a - 1)(1 - c) \geq 0. \tag{1}$$

Do dokazované nerovnosti dosadíme  $c = a^{-1}b^{-1}$  a provedeme několik ekvivalentních úprav:

$$ab^{-1} + ab^2 + a^{-2}b^{-1} \geq a + b + a^{-1}b^{-1},$$

$$\quad \quad \quad / \cdot a^2b$$

$$a^3 + a^3b^3 + 1 \geq a^3b + a^2b^2 + a,$$

$$a^3b^3 - a^2b^2 - a^3b + a^3 - a + 1 \geq 0,$$

$$a^3(b^3 - b^2 - b + 1) + (a^3 - a^2)b^2 - (a - 1) \geq 0,$$

$$a^3(b - 1)^2(b + 1) + (a - 1)(ab - 1)(ab + 1) \geq 0.$$

Poslední nerovnost platí, neboť  $(a - 1)(ab - 1) = (a - 1)(ab - abc) = ab(a - 1)(1 - c)$  a takový součin je podle (1) nezáporný.

**Jiné řešení.** Pro libovolná kladná čísla  $A, B, C$  jsou trojice  $(A^2, B^2, C^2)$  a  $(A, B, C)$  takzvaně *souhlasně uspořádané*, tudíž platí nerovnost

$$A^2 \cdot A + B^2 \cdot B + C^2 \cdot C \geq A^2 \cdot B + B^2 \cdot C + C^2 \cdot A. \quad (2)$$

Dokažme (2) bezprostředně: úpravou dostáváme nerovnost

$$(A - C)^2(A + C) + (B - C)(B^2 - A^2) \geq 0,$$

která zřejmě platí, pokud  $B = \max\{A, B, C\}$ , čehož lze vždy dosáhnout cyklickou permutací dané trojice čísel.

Zvolíme-li v dokázané nerovnosti (2) hodnoty  $A = \sqrt[3]{a/b}$ ,  $B = \sqrt[3]{b/c}$  a  $C = \sqrt[3]{c/a}$ , obdržíme nerovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}} + \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}},$$

ze které za předpokladu  $abc = 1$  již plyne dokazovaná nerovnost.

## Výsledková listina celostátního kola 52. ročníku MO kategorie A

### *Vítězové:*

1.	Pavel Čížek	8/8	G Kralupy n. Vltavou	<b>37</b>
2.	Marek Krčál	4/4	G Brno, kpt. Jaroše	<b>36</b>
3.	Petr Pošta	6/6	G Pardubice, Dašická	<b>29</b>
4.	Jaromír Kuben	1/4	G Brno, kpt. Jaroše	<b>28</b>
5.-6.	Václav Cviček	6/6	G Frýdek – Místek, ČSA	<b>27</b>
	Pavel Kocourek	2/4	SPŠ Praha 1, Panská	<b>27</b>
7.-8.	Tomáš Gavenčiak	3/4	G Bílovec, 17. listopadu	<b>26</b>
	Martin Káldy	4/4	G Praha 5, Zborovská	<b>26</b>
9.	Vítězslav Kala	3/4	G Brno, kpt. Jaroše	<b>25</b>
10.	Miroslav Hejna	8/8	G Rychnov n. Kněžnou	<b>24</b>
11.	Jan Moláček	3/4	G Hradec Králové, Tylovo nábřeží	<b>23</b>

### *Další úspěšní řešitelé:*

12.-13.	František Konopecký	6/8	G Holešov, Palackého	<b>22</b>
	Jan Prachař	8/8	G Rychnov n. Kněžnou	<b>22</b>
14.-16.	Marek Pechal	5/8	G Zlín, Lesní čtvrť	<b>21</b>
	Milan Straka	4/4	G Strakonice, Máchova	<b>21</b>
	Veronika Trnková	4/4	G Brno, kpt. Jaroše	<b>21</b>
17.	Pavel Kubas	8/8	G Jindřichův Hradec, Husova	<b>19</b>
18.	Jiří Ajgl	8/8	G Plzeň, Mikulášské nám.	<b>18</b>
19.-20.	Pavel Ludvík	4/4	G Bílovec, 17. listopadu	<b>17</b>
	Václav Potoček	3/4	SPŠ Praha 1, Panská	<b>17</b>
21.	Jiří Danihelka	4/4	SPŠ Písek, Čapkova	<b>16</b>
22.	Pavel Dvořák	4/4	G Brno, kpt. Jaroše	<b>15</b>

## ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 2003–2004

## Kategorie A

**A-I-1.** Určete všechny dvojice  $(p, q)$  reálných čísel takové, že rovnice  $x^2 + px + q = 0$  má řešení v oboru reálných čísel, přičemž platí: Je-li  $t$  kořenem této rovnice, je  $|2t - 15|$  rovněž jejím kořenem.  
(P. Černek)

**A-I-2.** V rovině daného čtverce  $KLMN$  určete množinu všech bodů  $P$ , pro něž jsou úhly  $NPK$ ,  $KPL$  a  $LPM$  shodné.  
(J. Švrček)

**A-I-3.** Pro libovolné přirozené číslo  $n$  sestavme z písmen  $A, B$  všechna možná „slova“ délky  $n$ . Rozděleme je dvou skupin  $S_n$  a  $L_n$  podle toho, zda je v daném slově sudý, resp. lichý počet „slabik“  $BA$  (za sudý považujeme i počet 0). Například slova  $BABBBBA$  a  $AAAAAAB$  patří obě do skupiny  $S_7$ , slova  $AABBABB$  a  $BA BAABA$  patří obě do skupiny  $L_7$ . Určete, pro která  $n$  mají skupiny  $S_n$  a  $L_n$  stejný počet prvků.  
(J. Šimša)

**A-I-4.** Určete nejmenší reálné číslo  $p$  takové, že nerovnost

$$\sqrt{1^2 + 1} + \sqrt{2^2 + 1} + \sqrt{3^2 + 1} + \cdots + \sqrt{n^2 + 1} \leq \frac{1}{2}n(n + p)$$

platí pro každé přirozené číslo  $n$ .  
(S. Trávníček)

**A-I-5.** Nechť  $ABCD$  je tětivový čtyřúhelník, jehož vnitřní úhel při vrcholu  $B$  má velikost  $60^\circ$ .

a) Jestliže  $|BC| = |CD|$ , pak platí  $|CD| + |DA| = |AB|$ . Dokažte.

b) Rozhodněte, zda platí opačná implikace.  
(E. Kováč)

**A-I-6.** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad y^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}, \quad z^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

(J. Šimša)

**Kategorie B**

**B-I-1.** Každou z hvězdiček na místě jednotek čísel ve výrazu

$$\left| \frac{777\ 777\ 777\ 77*}{777\ 777\ 777\ 77*} - \frac{555\ 555\ 555\ 554}{555\ 555\ 555\ 559} \right|$$

nahraďte nějakou číslicí tak, aby výraz nabyl co nejmenší hodnoty.

(*J. Šimša*)

**B-I-2.** V rovnoramenném lichoběžníku  $ABCD$  platí  $|BC| = |CD| = |DA|$  a  $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36^\circ$ . Na základně  $AB$  je dán bod  $K$  tak, že  $|AK| = |AD|$ . Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům  $AKD$  a  $KBC$  mají vnější dotyk. (*J. Zhouf*)

**B-I-3.** V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$x[x] - 5x + 7 = 0,$$

kde  $[x]$  znamená dolní celou část čísla  $x$ , tedy největší celé číslo  $k$ , pro něž platí  $k \leq x$ . (Například  $[\sqrt{2}] = 1$  a  $[-3,1] = -4$ .) (*E. Kováč*)

**B-I-4.** Číslo  $a_n$  vznikne tak, že za sebe napíšeme prvních  $n$  po sobě jdoucích přirozených čísel, například  $a_{13} = 12\ 345\ 678\ 910\ 111\ 213$ . Určete, kolik čísel dělitelných číslem 24 se nachází mezi čísly  $a_1, a_2, \dots, a_{10\ 000}$ . (*P. Černek*)

**B-I-5.** Je dána přímka  $p$  a bod  $A$ , který na ní neleží. Sestrojte lichoběžník  $ABCD$  s minimálním obsahem a ramenem  $BC$  na přímce  $p$  tak, aby byly splněny rovnosti  $|BC| = |AC|$  a  $|BE| = 3|DE|$ , kde  $E$  je průsečík úhlopříček lichoběžníku.

(*P. Leischner*)

**B-I-6.** Určete všechna přirozená čísla  $M$  dělitelná 240, pro která má rovnice  $M = \text{NSN}(x, y)$  s neznámými  $x$  a  $y$  právě 1001 řešení v oboru přirozených čísel. (Symbol  $\text{NSN}(x, y)$  značí nejmenší společný násobek čísel  $x$  a  $y$ .) (*P. Černek*)

## Kategorie C

**C-I-1.** Dokažte, že pro každé přirozené číslo  $n$ , které je větší než 3 a není dělitelné třemi, platí: Šachovnici  $n \times n$  lze rozřezat na jeden čtverec  $1 \times 1$  a obdélníky  $3 \times 1$ . (J. Zhouf)

**C-I-2.** Je dán obdélník  $ABCD$ . Nechť přímky  $p$  a  $q$ , které procházejí vrcholem  $A$ , protínají polokružnice vně připsané stranám  $BC$  a  $CD$  daného obdélníku po řadě v bodech  $K$  a  $L$  ( $B \neq K \neq C \neq L \neq D$ ) a rovněž strany  $BC$  a  $CD$  po řadě v bodech  $P$  a  $Q$  tak, že trojúhelník  $ABP$  má stejný obsah jako trojúhelník  $KCP$  a zároveň trojúhelník  $AQD$  má stejný obsah jako trojúhelník  $CLQ$ . Dokažte, že body  $K, L, C$  leží na téže přímce. (J. Švrček)

**C-I-3.** Žák měl vypočítat příklad  $X \cdot Y : Z$ , kde  $X$  je dvojmístné číslo,  $Y$  trojmístné číslo a  $Z$  trojmístné číslo s číslicí 2 na místě jednotek. Výsledkem příkladu mělo být přirozené číslo. Žák však tečku přehlédl a součin  $X \cdot Y$  chápal jako pětímístné číslo. Získal tak sedmkrát větší výsledek, než měl vyjít. Jaký příklad měl žák počítat? (P. Černek)

**C-I-4.** Nechť  $P$  je libovolný vnitřní bod rovnostranného trojúhelníku  $ABC$ . Uvažujme obrazy  $K, L$  a  $M$  bodu  $P$  v osových souměrnostech s osami  $AB, BC$  a  $CA$ . Určete množinu všech bodů  $P$  takových, že trojúhelník  $KLM$  je rovnoramenný. (J. Zhouf)

**C-I-5.** Přirozené číslo nazveme *magickým*, právě když je lze rozložit na součet dvou trojmístných čísel zapsaných stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí. Například číslo 1413 je magické, neboť platí  $1413 = 756 + 657$ ; nejmenší magické číslo je 202.

a) Určete počet všech magických čísel.

b) Ukažte, že součet všech magických čísel je roven 187 000.

(J. Šimša)

**C-I-6.** Ze všech čtyřúhelníků, jež lze vepsat do kružnice o daném poloměru  $r$  a které mají dvě strany dané délky  $m$ , určete ten, který má největší obsah. (P. Leischner)