Pavel Řehák

Regulární variace: od škálové invariance ke konvergenčním testům

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 68 (2023), No. 1, 1–28

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151598`

Regulární variace: od škálové invariance ke konvergenčním testům

Pavel Řehák

Abstrakt. Článek se snaží přiblížit některé aspekty teorie regulární variace. Jde o pojem z klasické analýzy, který má bohatou historii a četné aplikace v teorii pravděpodobnosti, teorii čísel, integrálních transformacích, komplexní analýze, diferenciálních rovnicích, teorii her či teorii grafů. Regulárně měnící se funkce mají souvislost s mnoha matematickými pojmy, včetně škálové invariance, kterou náš výklad začíná, či konvergenčními testy pro nekonečné řady, kterými náš výklad končí. V průběhu výkladu se zastavujeme u některých zásadních momentů vývoje teorie a u vybraných aplikací ve čtyřech z výše jmenovaných oblastí.

1. (Asymptoticky) škálová invariance a (zobecněný) mocninný zákon

Kladná funkce f je *škálově invariantní*, jestliže

$$f(\lambda t) = g(\lambda) f(t), \tag{1}$$

$t \in (0, \infty)$, pro všechna $\lambda > 0$, kde g je nějaká funkce. To znamená, že přenásobíme-li nezávisle proměnnou, pak tvar grafu funkce f zůstane prakticky nezměněn, viz obr. 1 a obr. 2. Přenásobení lze interpretovat jako změnu škály pro případně uvažované jednotky. Není-li f příliš „patologická“ (stačí, aby byla měřitelná na uvažovaném intervalu – zejména tedy postačuje její spojitost), pak existuje $\varrho \in \mathbb{R}$ tak, že

$$g(\lambda) = \lambda^{\varrho} \quad \text{a} \quad f(t) = Ct^{\varrho},$$

kde C je kladná konstanta. Platí i opačný směr. Škálově invariantní funkce jsou tedy právě ty funkce, které jsou *mocninnými zákony*. Ty se velmi často objevují při modelování reálných jevů, viz např. [36]. Poznamenejme, že tvar funkce g lze odvodit pomocí Cauchyovy funkcionální rovnice. Skutečně, díky škálové invarianci (1) platí $f(uvt) = g(uv)f(t)$, kde $u, v > 0$. Zároveň však – opět díky (1) – lze psát $f(uvt) = g(u)f(vt) = g(u)g(v)f(t)$. Funkce g tedy splňuje rovnici $g(uv) = g(u)g(v)$, přičemž je měřitelná. Prostřednictvím substituce $h(x) = \ln g(\mathrm{e}^x)$ obdržíme Cauchyovu funkcionální rovnici $h(x + y) = h(x) + h(y)$. Je známo, že (jediným měřitelným) řešením této rovnice je funkce $h(x) = cx$ pro nějakou konstantu c. Odtud dostáváme, že $g(\lambda) = \lambda^{\varrho}$ pro nějaké $\varrho \in \mathbb{R}$.

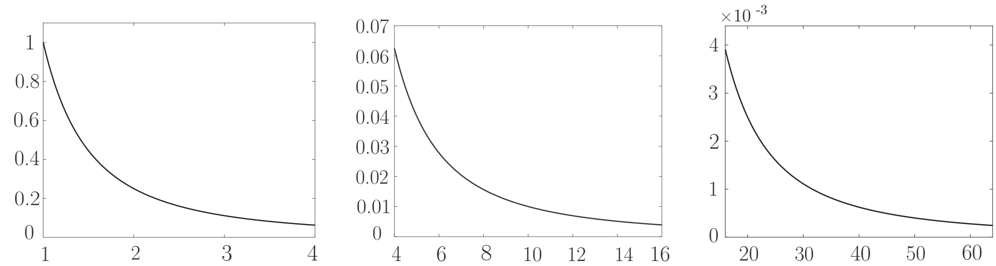
Škálová invariance je však poměrně křehká vlastnost. Např. je neobvyklé, aby distribuční funkce F (přesněji řečeno tzv. funkce přežití $\overline{F} := 1 - F$) sledované veličiny přesně splňovala mocninný zákon a byla tedy škálově invariantní. Spíš je typické, že centrální část distribuce nesplňuje mocninný zákon, přičemž její tzv. chvost splňuje

prof. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D., Ústav matematiky FSI VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, e-mail: `rehak.pavel@fme.vutbr.cz`

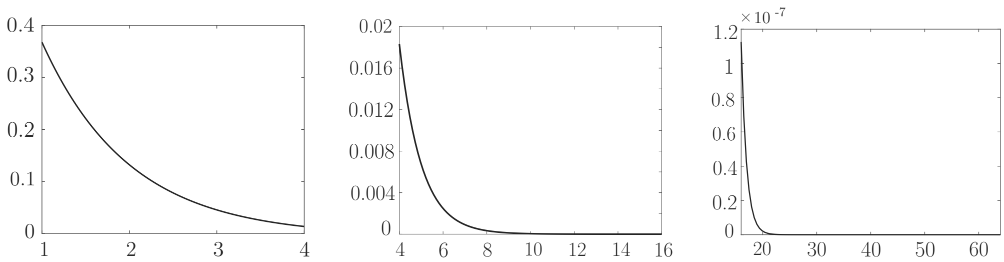
mocninný zákon pouze přibližně. Dostáváme se tímto k následujícímu zobecnění škálové invariance. Kladná funkce f je *asymptoticky škálově invariantní*, jestliže

$$f(\lambda t) \sim g(\lambda) f(t) \tag{2}$$

pro $t \to \infty$ a pro všechna $\lambda > 0$, kde g je nějaká funkce. Zápis $h(t) \sim k(t)$ pro $t \to \infty$ znamená, že $\lim_{t\to\infty} h(t)/k(t) = 1$. O významu asymptoticky škálové invariance se budeme v široké míře zmiňovat níže. Upozorněme však již na tomto místě např. na článek [48]. V něm asymptoticky škálová invariance hraje důležitou roli v tzv. problému hierarchie, což je problém z teoretické fyziky týkající se velkého rozporu mezi aspekty slabé síly a gravitace.



Obr. 1. Funkce $\overline{F}(t) = t^{-2}$ (funkce přežití Paretova rozdělení) je škálově invariantní, neboť $\overline{F}(\lambda t) = \lambda^{-2}\overline{F}(t)$. Škálová invariance je zde ilustrována vykreslením grafu funkce $\overline{F}$ pro tři různá měřítka



Obr. 2. Funkce $\overline{F}(t) = \mathrm{e}^{-t}$ (funkce přežití exponenciálního rozdělení) není škálově invariantní, neboť $\overline{F}(\lambda t) = \mathrm{e}^{(1-\lambda)t}\overline{F}(t)$ a neexistuje tedy funkce g nezávislá na t tak, aby $\overline{F}(\lambda t) = g(\lambda)\overline{F}(t)$. Z rovnosti $\overline{F}(\lambda t) = \mathrm{e}^{(1-\lambda)t}\overline{F}(t)$ je zřejmé, že $\overline{F}$ není ani asymptoticky škálově invariantní

Je-li f asymptoticky škálově invariantní a měřitelná, pak existuje $\varrho \in \mathbb{R}$ tak, že

$$g(\lambda) = \lambda^{\varrho} \quad \text{a} \quad f(t) = L(t)t^{\varrho}, \tag{3}$$

kde L je měřitelná a splňuje $L(\lambda t) \sim L(t)$ pro $t \to \infty$ a pro všechna $\lambda > 0$; jde o tzv. *pomalu měnící se funkci.* Toto tvrzení prezentoval (pro spojité funkce) už Jovan Karamata (významný srbský matematik, o kterém bude ještě řeč) v článku [25] v r. 1933 avšak s ne zcela korektním důkazem. Správný důkaz, založený na Cauchyově rovnici, přinesl Feller v 60. letech 20. století v [13], viz také [17]. Poznamenejme, že ve skutečnosti stačí předpokládat, aby vztah (2) platil pro všechna λ z nějaké množiny kladné míry.

Všimněme si, že funkce f, které jsou ve tvaru (3), zobecňují (a to podstatně!) nejen mocninný zákon, ale též funkce $f(t) \sim Ct^{\varrho}$ pro $t \to \infty$. Jde o tzv. *regulárně měnící se funkce* a jak uvidíme, mají zajímavou historii a zaujímají významné místo v mnoha oblastech matematiky.

Jakousi „biblí regulární variace" je (poměrně hutná) monografie [3], jejímiž autory jsou Bingham, Goldie a Teugels. Jako další (klasické) základní zdroje doporučujeme monografie [16], [47]. Pro přehledové a/nebo historické práce viz např. [4], [5], [6], [7], [22], [30], [31], [38], [42], [49]. Níže v textu zmiňujeme další důležité práce, a to především v souvislosti s aplikacemi regulární variace.

Celý text je rozčleněn do šestnácti kapitol. V příští kapitole zavedeme ústřední pojmy (zejména definujeme regulárně měnící se funkci) a uvedeme některá základní fakta. V kapitolách 3–7 prezentujeme vybrané vlastnosti regulárně měnících se funkcí (větu o stejnoměrné konvergenci, reprezentační větu, uzavřenost vzhledem k některým operacím a další elementární vlastnosti, Karamatovu integrační větu a tauberovskou větu). Kapitola 8 představuje rychlou variaci a regulární ohraničenost a hned v další kapitole hovoříme o některých jiných příbuzných třídách. Regulární variace dalších typů zobrazení je stručně diskutována v kapitole 10. Kapitoly 11–13 popisují aplikace teorie regulární variace ve třech oblastech (teorii pravděpodobnosti, teorii čísel a diferenciálních rovnicích). Pojem regulárně měnící se posloupnosti je rozebírán v kapitole 14, po níž následuje kapitola o zobecnění tohoto pojmu ve smyslu časových škál. Poslední kapitola je věnována popisu některých vztahů mezi regulární variací a konvergenčními kritérii pro nekonečné řady.

2. Definice regulární variace a základní informace

Vzhledem k úvahám týkajícím se vztahu (2) je přirozené, že nejběžnější definice regulární variace v moderní literatuře má následující podobu.

Definice. Měřitelná funkce $f\colon [a,\infty) \to (0,\infty)$ se nazývá *regulárně měnící se (v nekonečnu) s indexem* ϱ, jestliže

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \lambda^{\varrho} \tag{4}$$

pro každé $\lambda > 0$; píšeme $f \in \mathcal{RV}(\varrho)$. Třídu všech regulárně měnících se funkcí značíme $\mathcal{RV} := \bigcup_{\varrho\in\mathbb{R}} \mathcal{RV}(\varrho)$. Je-li limita v (4) rovna 1 pro každé $\lambda > 0$, pak f se nazývá *pomalu měnící se*; píšeme $f \in \mathcal{SV}$.

Tedy zejména platí, že každá kladná měřitelná funkce je škálově invariantní, právě když je regulárně měnící se.

Pro stručnost budeme místo regulárně měnící se funkce, resp. pomalu měnící se funkce občas psát $\mathcal{RV}$ funkce, resp. $\mathcal{SV}$ funkce.

Přestože se částečné úvahy související s pojmem regulární variace objevovaly již dříve či nezávisle, za průkopníka této teorie je považován srbský matematik Jovan Karamata (1902–1967), viz [24], [25]. Karamatovou motivací byly problémy z teorie integrálních transformací (viz kapitolu 7), přičemž původní definice regulárně měnící se funkce byla pro spojité funkce zavedena prostřednictvím vztahu

$$\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s \sim \frac{tf(t)}{\varrho+1} \tag{5}$$

pro $t \to \infty$, kde $\varrho > -1$, viz též větu 3. Karamata však ihned uvažoval i souvislost se vztahem (4). Další historické poznámky jsou rozprostřeny v textu.

Je zřejmé, že $\mathcal{SV} = \mathcal{RV}(0)$. Množina $\mathcal{SV}$ funkcí by se tedy dala chápat jako podmnožina množiny $\mathcal{RV}$ funkcí. To je však trochu zavádějící pohled, neboť právě třída $\mathcal{SV}$ funkcí se ukázala – vzhledem k šíři zajímavých vlastností – jako to hlavní novum v klasické analýze a jejích aplikacích. Vlastně při studiu regulární variace občas stačí – do určité míry – studovat pouze vlastnosti $\mathcal{SV}$ funkcí. Někdy se regulární variací má na mysli, že index je nenulový. Poznamenejme, že levý krajní bod intervalu, na kterém uvažujeme $\mathcal{RV}$ funkce, není příliš podstatný, a je-li funkce f zadána např. na intervalu $[b, \infty) \subset [a, \infty)$, pak ji lze dodefinovat na větší interval třeba volbou $f(t) = f(b)$ pro $t \in [a, b)$. Lze ukázat, že je-li $f \in \mathcal{RV}$, pak vždy existuje $t_0 \geqq a$ tak, že f a $1/f$ jsou lokálně ohraničené a lokálně integrovatelné na $[t_0, \infty)$. Je celkem zřejmé, že regulární variace nemusí být studována jen v nekonečnu, ale i třeba v nule, či v jiném bodě. Místo vztahu (4) lze tedy vzít např. $\lim_{t\to 0+} f(\lambda t)/f(t) = \lambda^\varrho$ a dostáváme regulární variaci v nule. Vlastnosti takových funkcí mohou pak být snadno odvozeny z vlastností $\mathcal{RV}$ funkcí v nekonečnu, neboť regulární variace v nule s indexem ϱ pro funkci $f(\cdot)$ znamená regulární variaci v nekonečnu s indexem $-\varrho$ pro funkci $f(1/\cdot)$.

Přímo z definice je snadné odvodit, že

$$f \in \mathcal{RV}(\varrho) \Longleftrightarrow f(t) = t^\varrho L(t), \text{ kde } L \in \mathcal{SV}. \tag{6}$$

Pomalu měnící se funkce jsou často označovány písmenem L, což je první písmeno francouzského slova „lentement“, tedy „pomalu“. Karamatovy první zásadní články byly ve francouzštině. Vzhledem k důležitosti $\mathcal{SV}$ funkcí uveďme nyní několik jejich příkladů:

$$\begin{aligned}
L(t) &= \varphi(t), \text{ kde } \varphi(t) \equiv c \in (0, \infty), \text{ nebo } \varphi(t) \sim c \in (0, \infty) \text{ pro } t \to \infty,\\
L(t) &= \prod_{i=1}^{n} (\ln_i t)^{\mu_i}, \text{ kde } \ln_i t = \ln \ln_{i-1} t, \ \ln_0 = \mathrm{id} \text{ a } \mu_i \in \mathbb{R},\\
L(t) &= \exp\left\{\prod_{i=1}^{n} (\ln_i t)^{\nu_i}\right\}, \text{ kde } 0 < \nu_i < 1,\\
L(t) &= 2 + \sin(\ln_2 t),\\
L(t) &= (\ln \Gamma(t))/t,\\
L(t) &= \frac{1}{t}\int_a^t \frac{1}{\ln s}\,\mathrm{d}s,\\
L(t) &= \exp\left\{(\ln t)^{\frac{1}{3}} \cos(\ln t)^{\frac{1}{3}}\right\}.
\end{aligned}$$

Poslední příklad ukazuje $\mathcal{SV}$ funkci vykazující „nekonečnou oscilaci“, přesněji platí $\liminf_{t\to\infty} L(t) = 0$, $\limsup_{t\to\infty} L(t) = \infty$. Toto chování může být poněkud v kontrastu s intuitivní představou „pomalé změny“ a odhaluje, že třída $\mathcal{RV}$ zahrnuje rozmanitou paletu funkcí, což je patrné zejména při srovnání s funkcemi asymptoticky ekvivalentními mocninné funkci ($f(t) \sim Ct^{\varrho}$ pro $t \to \infty$). Zejména tedy nemusejí být $\mathcal{SV}$ funkce monotónní ani v okolí nekonečna. Je zřejmé, že mocninná funkce t^{ϱ} je triviálním příkladem regulárně měnící se funkce (s indexem ϱ), přičemž však pro $\varrho \neq 0$ máme $t^{\varrho} \notin \mathcal{SV}$. Exponenciální funkce $\exp t$, $\exp(-t)$ pak nejsou vůbec regulárně měnící se. Avšak např. $1 + \exp(-t)$ je pomalu měnící se. Netlumené oscilující funkce jako např. $2 + \sin t$ nejsou pomalu ani regulárně měnící se. Je však zajímavé, že zatímco $2 + \sin(\ln t)$ není pomalu měnící se, funkce $2 + \sin(\ln_2 t)$ je pomalu měnící se.

Definiční podmínku v multiplikativní formě

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = g(\lambda) \in (0, \infty) \tag{7}$$

pro každé $\lambda > 0$ lze pomocí vztahů $h(x) = \ln f(\mathrm{e}^x)$, $k(\mu) = g(\mathrm{e}^{\mu})$ přepsat do aditivního tvaru

$$\lim_{x\to\infty} (h(x+\mu) - h(x)) = k(\mu) \in \mathbb{R} \tag{8}$$

pro každé $\mu \in \mathbb{R}$. Aditivní tvar je pro některé úvahy (zejména v důkazech) často výhodnější.

Dvojí výskyt funkce f v definičním vztahu (7) není vždy žádoucí, a to zejména v zobecněních, kde nelze dělit. Tzv. *Kendallova věta* nabízí alternativní přístup, který je v mnoha situacích užitečný. Vezměme posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$ a $\limsup_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n = 1$. Jestliže pro spojité funkce f, g platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n f(\lambda x_n) = g(\lambda)$$

pro každé $\lambda \in (a, b)$, nějakou posloupnost $\{a_n\}$ a interval (a, b), potom f je regulárně měnící se.

Viděli jsme, že pojem regulární variace může být motivován zeslabením podmínky pro škálovou invarianci. Vzhledem k reprezentační formuli (6) lze na $\mathcal{RV}$ funkce nahlížet také jako na zobecnění funkcí tvaru $f(t) \sim Ct^{\varrho}$ pro $t \to \infty$, kde $C > 0$ a $\varrho \in \mathbb{R}$. K tomu poznamenejme, že má-li funkce L tvar $L(t) \sim C$ pro $t \to \infty$, pak je triviálně pomalu měnící se. Jak uvidíme, jde o zobecnění významné. Jiný pohled může vést k odhalení vztahu regulární variace s „derivací v nekonečnu“. Skutečně, pro měřitelnou funkci h uvažujme výraz

$$\frac{h(x+\mu) - h(x)}{\mu},$$

kde $\mu \neq 0$. Nyní namísto toho, abychom jako obvykle vzali limitu pro $\mu \to 0$ při pevném x, vezměme limitu pro $x \to \infty$ při pevném μ. Jestliže tato limita existuje pro všechna $\mu \neq 0$, pak lze ukázat, že nezávisí na μ a navíc lze psát $h(x) = h_0(x) + o(1)$ ($x \to \infty$), kde h_0 je diferencovatelná a platí

$$\lim_{x\to\infty} h_0'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{h(x+\mu) - h(x)}{\mu}. \tag{9}$$

(Význam vymbolu $o(\cdot)$ je: $u(x) = o(v(x))$ pro $x \to \infty$, jestliže $\lim_{x\to\infty} u(x)/v(x) = 0$.) S ohledem na vztah mezi (7) a (8) vidíme, že existence limity v (9) je ekvivalentní regulární variaci funkce f dané vztahem $f(t) = \exp(h(\ln t))$. Některé další náhledy na regulární variaci budou zmíněny níže.

3. Věta o stejnoměrné konvergenci

Jedním z nejdůležitějších výsledků základní teorie je tzv. *věta o stejnoměrné konvergenci*, která slouží při odvozování mnoha dalších tvrzení. Její verzi pro spojitý případ odvodil Karamata (1930) v [24], důkaz pro měřitelný případ pak podali Korevaar a kol. (1949) v [28]. Existuje hned několik (přinejmenším sedm) odlišných důkazů této věty, jeden z nich má na svědomí i známý matematik P. Erdös (1964), viz např. [3], Chapter 1. Poznamenejme, že ve většině z nich se multiplikativní tvar (7) nejdříve přepíše na aditivní tvar (8). Pro důkazy viz např. [3], [16], [47].

Věta 1. *Jestliže $f \in \mathcal{RV}(\varrho)$, potom konvergence ve vztahu (4) je stejnoměrná vzhledem k λ na každé kompaktní podmnožině intervalu* $(0, \infty)$.

4. Reprezentační věta

Předchozí tvrzení hraje zásadní roli v důkazu např. hned následující tzv. *reprezentační věty*, která je dalším fundamentálním výsledkem prezentované teorie, viz např. [3], [16], [47].

Věta 2. *Funkce L je pomalu měnící se, právě když je tvaru*

$$L(t) = \varphi(t) \exp\left\{\int_a^t \frac{\psi(s)}{s}\,\mathrm{d}s\right\}, \tag{10}$$

$t \geqq a$, pro nějaké $a > 0$, kde φ, ψ jsou měřitelné, přičemž $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = C \in (0, \infty)$ *a* $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$.

Poněvadž L, φ, ψ mohou být libovolně upraveny na intervalech konečné délky, není hodnota a podstatná. Zejména je-li $a = 0$, lze vzít $\psi \equiv 0$ v okolí nuly, abychom se vyhnuli divergenci integrálu v počátku. S ohledem na (6) lze každou funkci $f \in \mathcal{RV}(\varrho)$ psát jako

$$f(t) = t^{\vartheta}\varphi(t) \exp\left\{\int_a^t \frac{\psi(s)}{s}\,\mathrm{d}s\right\} = \varphi(t) \exp\left\{\int_a^t \frac{\delta(s)}{s}\,\mathrm{d}s\right\}, \tag{11}$$

kde φ a ψ jsou jako ve větě 2 a δ je měřitelná funkce s $\lim_{t\to\infty} \delta(t) = \varrho$. Všimněme si, jak právě posledně uvedená reprezentace koresponduje se vzorci odvozenými elementárními způsoby ve speciálních situacích. Skutečně, za jistých dodatečných předpokladů na funkci $f \in \mathcal{RV}(\varrho)$ platí $f'(t) \sim \varrho f(t)/t$ pro $t \to \infty$; viz větu 4. Tuto asymptotickou relaci lze psát jako $f'(t) = (\delta(t)/t)f(t)$, kde $\delta(t) \to \varrho$ pro $t \to \infty$. Chápeme-li tento vztah jako diferenciální rovnici, jejím řešením obdržíme druhou z reprezentací v (11), kde navíc $\varphi(t) \equiv C$. Jiný elementární postup při velmi speciální volbě je založen na vztazích $t^{\varrho} = \exp\{\varrho \ln t\} = \exp\left\{\int_1^t \varrho/s\,\mathrm{d}s\right\}$.

Karamatova reprezentace (10) je evidentně nejednoznačná. Při zachování limitních vlastností lze jednu z funkcí φ, ψ upravit nějakým požadovaným způsobem, přičemž tato úprava je kompenzována vhodnou změnou druhé z funkcí. Ukazuje se, že funkce ψ může být libovolně hladká, avšak hladkostní podmínky dostupné pro φ jsou limitovány vlastnostmi funkce L. Nicméně, nahradíme-li funkci φ její limitou $C \in (0, \infty)$, získáme $\mathcal{SV}$ funkci asymptoticky ekvivalentní té původní, avšak mající řadu příjemných vlastností. S tím souvisí tzv. *normalizované pomalu měnící se funkce*. To jsou funkce tvaru (10), kde $\varphi(t) \equiv C$, označme tuto třídu $\mathcal{NSV}$. Lze ukázat, že $\mathcal{NSV}$ splývá s tzv. Zygmundovou třídou (viz [51]), která je definovaná následujícím způsobem. Kladná měřitelná funkce f patří do *Zygmundovy třídy*, jestliže pro každé $\varrho > 0$ je $t^\varrho f(t)$ rostoucí a $t^{-\varrho} f(t)$ klesající pro velká t.

5. Elementární vlastnosti

Uveďme nyní několik spíše elementárních vlastností $\mathcal{RV}$ funkcí, pro důkazy viz např. [3], [16], [47]; poznamenejme, že mnohé z uvedených vlastností vyplývají z reprezentační formule (11). Nejprve se podívejme na uzavřenost vzhledem k některým operacím:

- Jestliže $f \in \mathcal{RV}(\varrho)$, potom $f^\alpha \in \mathcal{RV}(\alpha\varrho)$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Jestliže $f_i \in \mathcal{RV}(\varrho_i)$, $i = 1, 2$, $f_2(t) \to \infty$ pro $t \to \infty$, potom $f_1 \circ f_2 \in \mathcal{RV}(\varrho_1\varrho_2)$.
- Jestliže $f_i \in \mathcal{RV}(\varrho_i)$, $i = 1, 2$, potom $f_1 + f_2 \in \mathcal{RV}(\max\{\varrho_1, \varrho_2\})$.
- Jestliže $f_i \in \mathcal{RV}(\varrho_i)$, $i = 1, 2$, potom $f_1 f_2 \in \mathcal{RV}(\varrho_1 + \varrho_2)$.
- Jestliže $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{RV}$, $n \in \mathbb{N}$, a $R(x_1, \ldots, x_n)$ je racionální funkce s kladnými koeficienty, potom $R(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{RV}$.

Přidejme pár dalších asymptotických vlastností, které ještě více přiblíží chování pomalu či regulárně měnících se funkcí:

- Jestliže $f \in \mathcal{RV}(\varrho)$, potom $\ln f(t)/\ln t \to \varrho$ pro $t \to \infty$. Odtud zřejmě platí $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ je-li $\varrho < 0$, a $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$, je-li $\varrho > 0$.
- Jestliže $L \in \mathcal{SV}$ a $\varrho > 0$, potom $t^\varrho L(t) \to \infty$, $t^{-\varrho} L(t) \to 0$ pro $t \to \infty$.
- Nechť f je kladná, diferencovatelná a platí $\lim_{t\to\infty} tf'(t)/f(t) = \varrho$. Potom $f(t) = t^\varrho L(t)$, kde $L \in \mathcal{NSV}$.
- Jestliže $f \in \mathcal{RV}(\varrho)$, $\varrho > 0$, potom existuje $g \in \mathcal{RV}(1/\varrho)$ tak, že
  $$f(g(t)) \sim g(f(t)) \sim t \quad \text{pro } t \to \infty.$$
  Funkce g (která je „asymptotickou inverzí“ funkce f) je určena jednoznačně až na asymptotickou ekvivalenci. Jednou z možností pro funkci g je *zobecněná inverze* $f^{\leftarrow}(t) := \inf\{s \in [a, \infty) \colon f(s) > t\}$.

6. Integrály a derivace $\mathcal{RV}$ funkcí, Karamatova integrační věta

Tzv. *Karamatova integrační věta*, která popisuje chování $\mathcal{RV}$ funkcí vzhledem k integraci, je velmi užitečným tvrzením v mnoha oblastech. Důkaz pro spojité funkce podal už Karamata v r. 1930 [24], verzi pro měřitelné funkce odvodil de Haan v r. 1970 [17]. Připomeňme, že Karamatova původní definice spojité $\mathcal{RV}$ funkce byla zavedena právě prostřednictvím vztahu (5) pro $\varrho > -1$, přičemž však byla ukázána i souvislost s podmínkou (4).

Začněme jednoduchou úvahou, kde připomeneme, jaký vliv má integrování na mocninné funkce. Nechť $f(t) = t^\varrho$. Potom

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{tf(t)}{\varrho+1}, \quad \text{je-li } \varrho > -1, \text{ a } \int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{tf(t)}{-\varrho-1}, \text{ je-li } \varrho < -1.$$

Jeden ze směrů (tzv. *direct half*) Karamatovy integrační věty říká, že podobně se vůči integrování chovají regulárně měnící se funkce, ovšem rovnost je nahrazena asymptotickou ekvivalencí. Přesněji platí následující tvrzení.

Věta 3. *Nechť $f \in \mathcal{RV}(\varrho)$. Potom pro $t \to \infty$ platí*

$$\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s \sim \frac{tf(t)}{\varrho+1}, \text{ je-li } \varrho > -1, \text{ a } \int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s \sim \frac{tf(t)}{-\varrho-1}, \text{ je-li } \varrho < -1. \tag{12}$$

Jistě stojí za zmínku, že chování uvedené v (12) nastává pouze pro regulárně měnící se funkce, jak o tom hovoří opačný směr (tzv. *converse half*) Karamatovy integrační věty. Konkrétně platí, že

pokud nastává jedna z relací v (12), potom $f \in \mathcal{RV}(\varrho)$.

Dále si všimněme, že vztahy v (12) mohou být přepsány pomocí pomalu měnící se funkce $L \in \mathcal{SV}$ do tvaru

$$\int_a^t L(s)s^\varrho\,\mathrm{d}s \sim \frac{1}{\varrho+1}L(t)t^{\varrho+1} \text{ a } \int_t^\infty L(s)s^\varrho\,\mathrm{d}s \sim \frac{1}{-\varrho-1}L(t)t^{\varrho+1}$$

pro $t \to \infty$, kde v prvním případě předpokládáme $\varrho > -1$ a ve druhém $\varrho < -1$. Odtud vidíme, že pomalu měnící se složka se vzhledem k integraci chová podobně jako konstanta. Tedy ji lze předřadit před integrál, spokojíme-li se s asymptotickou ekvivalencí místo rovnosti. Případ $\varrho = -1$ je v jistém smyslu kritický (později jej ještě zmíníme i v souvislosti s de Haanovou teorií). Platí však alespoň vztahy

$$\frac{1}{L(t)}\int_a^t \frac{L(s)}{s}\,\mathrm{d}s \to \infty, \text{ resp. } \frac{1}{L(t)}\int_t^\infty \frac{L(s)}{s}\,\mathrm{d}s \to \infty$$

pro $t \to \infty$, kde předpokládáme, že integrál diverguje, resp. konverguje a $L \in \mathcal{SV}$. V obou případech je příslušný integrál novou $\mathcal{SV}$ funkcí.

Podívejme se nyní, jak se $\mathcal{RV}$ funkce chovají při derivování. Je-li $f(t) = t^\varrho$, potom $f'(t) = \varrho f(t)/t$ a očekáváme proto jakousi asymptotickou obdobu tohoto vztahu. Jak je však známo, zachování asymptotických relací při derivování je – na rozdíl od integrování – velmi citlivé. Skutečně, např. víme-li, že $f'(t) \sim t$ pro $t \to \infty$, potom zřejmě

$f(t) \sim t^2/2$ pro $t \to \infty$. Naopak, máme-li však např. $f(t) = t^2/2 + \sin(t^4)$ (a tedy platí $f(t) \sim t^2/2$ pro $t \to \infty$), potom $f'(t) = t + 4t^3 \cos(t^4)$ (a tedy zcela jistě neplatí $f'(t) \sim t$). Nepřekvapí nás proto potřeba dodatečné podmínky. Platí např. toto tvrzení zvané *věta o monotónní hustotě*:

Věta 4. *Nechť f je absolutně spojitá a $f'(t)$ je monotónní pro velká t. Jestliže $f \in \mathcal{RV}(\varrho)$, potom*

$$f'(t) \sim \varrho \frac{f(t)}{t} \tag{13}$$

pro $t \to \infty$. Je-li navíc $\varrho \neq 0$, potom $|f'| \in \mathcal{RV}(\varrho - 1)$.

Právě prezentované úvahy se blízce dotýkají i obsahu následující kapitoly.

7. Integrální transformace $\mathcal{RV}$ funkcí, tauberovské věty

Problematika tzv. tauberovských vět byla vlastně hlavní Karamatovou motivací pro zavedení a následnou analýzu $\mathcal{RV}$ a $\mathcal{SV}$ funkcí. V obecné rovině jde o – velmi zruba řečeno – vztahy mezi asymptotikou funkcí a asymptotikou jejich integrálních transformací. Výsledky popisující přechod od funkcí k transformacím se nazývají *abelovské*. Výsledky týkající se opačného směru pak nazýváme *tauberovské*; tento směr je typicky mnohem obtížnější a vyžaduje dodatečné podmínky. Tauberovskou větu lze v určitých situacích popsat též jako tvrzení, jež vyvozuje konvergenci řady na základě vlastností funkce, kterou řada definuje. Přidejme ještě Hardyho charakteristiku: „*A tauberian theorem may be defined as the corrected form of the false converse of an abelian theorem. An abelian theorem asserts that, if a sequence or function behaves regularly, then some average of it behaves regularly.*“ Této problematice, která má původ v Tauberově práci z r. 1897, se věnují celé monografie či jejich podstatné části, zmiňme např. [3], kapitoly 4, 5, [16] nebo [27], viz též [20]. Tauberovské věty mají množství aplikací v různých oblastech. Za všechny uveďme teorii čísel, která rozvoji tauberovské teorie dala důležitý impuls, dále teorii pravděpodobnosti či diferenciální rovnice. Krátce se o aplikacích v těchto oblastech zmíníme i níže.

Konkrétně Karamata podal velmi elegantní a stručný důkaz tauberovské věty uvažované Hardym a Littlewoodem, kterou následně ještě zobecnil [23], [24]. Varianta obsahující $\mathcal{SV}$ funkce je vlastně nejobecnější možný tvar věty daného typu. Karamatův důkaz způsobil senzaci. R. Schmidt jej nazýval „*important discovery*“, K. Knopp hovořil o „*surprising proof*“, N. Wiener a E. C. Titchmarsh jej označili jako „*extremely elegant*“. Prvotní reakce samotného Hardyho zněla takto: „*I just received a letter from a young man in Belgrade who claims he can prove Hardy–Littlewood theorem in just two pages. This is simply impossible.*“ V souvislosti s větou 5 Seneta hovořil o „*the most famous and very widely useful theorem in probability theory*“ a Bingham dokonce o „*one of the major analytic results in the 20th century*“.

Než uvedeme Karamatovu tauberovskou větu, proveďme několik konkrétnějších pozorování, která nás ještě o něco více uvedou do problému. Pro funkci $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (která je nulová na intervalu $(-\infty, 0)$) definujme její Laplaceovu–Stieltjesovu transformaci vztahem

$$\mathcal{T}_G(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\, \mathrm{d}G(x), \tag{14}$$

kde předpokládáme, že integrál existuje. Pro čtenáře neobeznámeného s teorií Stieltjesova integrálu poznamenejme, že za určitých předpokladů platí vztah s běžným integrálem (máme na mysli integrál Lebesgueův): $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}G(x) = \int_a^b f(x)G'(x)\,\mathrm{d}x$. Vezměme nyní G takové, že $G(x) = x^\varrho$ pro $x \geqq 0$ a $G(x) = 0$ pro $x < 0$, kde $\varrho > 0$. Potom

$$\mathcal{T}_G(s) = \varrho \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx} x^{\varrho-1}\,\mathrm{d}s = \varrho s^{-\varrho} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}(sx)^{\varrho-1}\,\mathrm{d}(sx) = \varrho s^{-\varrho}\Gamma(\varrho) = s^{-\varrho}\Gamma(\varrho+1),$$

kde Γ je funkce gama. Tento výpočet naznačuje, že chová-li se G jako mocninný zákon (pro $x \to \infty$), pak také Laplaceova–Stieltjesova transformace se chová jako mocninný zákon (pro $s \to 0+$); jde o abelovský směr. Poznamenejme dále, že je-li $G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ a platí-li např. $g(x) \sim x^{\varrho-1}L(x)$ pro $x \to \infty$, kde $\varrho > 0$ a $L \in \mathcal{SV}$, pak lze ukázat, že $\mathcal{T}_G(s) \sim CL(1/s)s^{-\varrho}$ pro $s \to 0+$, kde C je jistá kladná konstanta. Tento výsledek plyne z Karamatovy integrační věty (Věta 3), tedy z tvrzení o „integraci asymptotických relací"; jde opět o abelovský směr. Opačný směr – o „derivaci asymptotických relací" – je tauberovský. Těchto pozorování se evidentně týkají i úvahy z předchozí kapitoly. Nyní následuje slíbená Karamatova tauberovská věta (která obsahuje i abelovský směr) pro obecný případ, viz např. [3]. (Podobně platí i její verze pro $x \to 0+$ a $s \to \infty$.)

Věta 5. *Nechť G je nezáporná zprava spojitá rostoucí funkce taková, že $G(x) = 0$ pro $x < 0$. Jestliže $L \in \mathcal{SV}$ a $\varrho \geqq 0$, potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

$$G(x) \sim L(x)x^\varrho \text{ pro } x \to \infty,$$
$$\mathcal{T}_G(s) \sim \Gamma(\varrho+1)L(1/s)s^{-\varrho} \text{ pro } s \to 0+.$$

Tvrzení věty je skutečně silné. Je-li chování Laplaceovy–Stieltjesovy transformace asymptoticky škálově invariantní (pro $s \to 0+$), je chování transformované funkce asymptoticky škálově invariantní (pro $x \to \infty$). Z jiného úhlu pohledu věta říká, že regulárně měnící se (v nekonečnu) funkce jsou přesně ty, které mají regulárně měnící se (v nule) Laplaceovu–Stieltjesovu transformaci. Jako důsledek není obtížné odvodit např. tauberovskou větu Karamatova typu pro mocninné řady. Níže zmíníme i jednu z verzí pro distribuční funkce.

8. Rychlá variace a regulární ohraničenost

Vraťme se nyní k podmínce (4) z definice regulární variace. Požadujeme v ní existenci limity, která má být navíc vlastní a různá od nuly, což znamená jisté omezení Karamatovy teorie. Problémem, který odtud přirozeně vyvstává, je analýza případu, kdy limita je nulová, či nevlastní, příp. neexistuje.

První dva případy vedou na tzv. rychlou variaci, kterou začal systematičtěji studovat de Haan [17]. Níže uvedený definiční vztah uvažoval ovšem B. András už v r. 1957. Rychlou variaci uvažoval dokonce i Karamata už v r. 1932, avšak v odlišné formě. Měřitelná funkce $f\colon [a,\infty) \to (0,\infty)$ se nazývá *rychle měnící se (v nekonečnu) s indexem* ∞, jestliže

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 < \lambda < 1, \\ \infty & \text{pro } \lambda > 1, \end{cases} \tag{15}$$

píšeme $f \in \mathcal{RPV}(\infty)$. Povšimněme, že hodnota limity v (15) je vlastně λ^{ϱ}, kde $\varrho \to \infty$. Podobně se definuje rychlá variace s indexem $-\infty$ (ozn. $\mathcal{RPV}(-\infty)$), v podmínce (15) se prohodí hodnoty limity 0 a ∞. Zatímco $\mathcal{RV}$ funkce se chovaly jako mocninné funkce (až na faktor měnící se „pomaleji“), chování $\mathcal{RPV}$ funkcí je blízké chování exponenciál. Zejména platí, že $\exp t \in \mathcal{RPV}(\infty)$ a $\exp(-t) \in \mathcal{RPV}(-\infty)$. Podobně jako pro $\mathcal{RV}$ funkce, i pro $\mathcal{RPV}$ funkce lze odvodit řadu vlastností. Zmiňme alespoň platnost analogie věty o stejnoměrné konvergenci. Dále stojí za zmínku následující vztah mezi $\mathcal{RPV}$ a $\mathcal{SV}$ funkcemi. Nechť f je kladná, lokálně ohraničená a (globálně) neohraničená funkce na $[0, \infty)$. Jestliže $f \in \mathcal{SV}$, potom $f^{\leftarrow} \in \mathcal{RPV}(\infty)$, kde $f^{\leftarrow}$ je zobecněná inverze zavedená v kapitole o elementárních vlastnostech $\mathcal{RV}$ funkcí. Jestliže $f \in \mathcal{RPV}(\infty)$, potom $f^{\leftarrow} \in \mathcal{SV}$.

Nyní se věnujme případu, kdy limita v (4) neexistuje. Aby bylo možno provádět alespoň nějakou analýzu, je zřejmé, že přestože existence limity není vyžadována, tak výraz $f(\lambda t)/f(t)$ by se měl chovat jaksi „umravněně“. Avakumović v r. 1936 zavedl následující přirozené a užitečné zobecnění regulární variace. Měřitelná funkce $f\colon [a, \infty) \to (0, \infty)$ se nazývá *regulárně ohraničená*, jestliže

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} \leqq \limsup_{t\to\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} < \infty \tag{16}$$

pro každé $\lambda \geqq 1$; píšeme $f \in \mathcal{RB}$. Poznamenejme, že výraz regulární ohraničenost se objevuje až v moderní literatuře, původní označení bylo O-regulárně měnící se funkce, příp. R-O třída. Podmínku z definice lze ekvivalentně nahradit podmínkou $\limsup_{t\to\infty} f(\lambda t)/f(t) < \infty$ pro každé $\lambda > 0$. Povšimněme si dále, že podmínku (16) lze zapsat také ve tvaru

$$f(\lambda t) \asymp f(t)$$

pro $t \to \infty$ a pro každé $\lambda > 0$, což je další přirozené zobecnění (asymptoticky) škálové invariance. Připomeňme, že zápis $h(t) \asymp k(t)$ pro $t \to \infty$ znamená existenci kladných konstant M_1, M_2 takových, že $M_1 k(t) \leqq h(t) \leqq M_2 k(t)$ pro velká t, kde funkce h, k jsou kladné. Je zřejmé, že každá $\mathcal{RV}$ funkce je $\mathcal{RB}$. Naopak existuje množství funkcí, které jsou $\mathcal{RB}$, avšak nejsou $\mathcal{RV}$, např. $2 + \sin t$. Funkce $\exp t$ však $\mathcal{RB}$ není. Z různých vlastností $\mathcal{RB}$ funkcí zde vyberme následující. Opět platí analogie věty o stejnoměrné konvergenci, kde je-li $f \in \mathcal{RB}$, pak pro každé $\Lambda > 1$ vztah (16) platí stejnoměrně vzhledem k $\lambda \in [1, \Lambda]$. Dále lze ukázat, že $f \in \mathcal{RB}$, právě když existuje $\delta \in \mathbb{R}$ tak, že $\int_a^t s^{\delta-1} f(s)\,\mathrm{d}s \asymp t^{\delta} f(t)$ pro $t \to \infty$; integrál $\int_a^t$ může být zaměněn za $\int_t^{\infty}$.

9. Další příbuzné třídy

Existuje velké množství dalších různých tříd, které jsou nějakým způsobem propojeny s regulární variací v jejim širším pojetí. Zmiňme zde alespoň některé elementy de Haanovy teorie, která v jakémsi smyslu vylepšuje Karamatovu teorii. Tak jako lze Karamatovu teorii charakterizovat jako studium relací typu

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = g(\lambda) \in (0, \infty) \tag{17}$$

pro všechna $\lambda > 0$ spolu s četnými důsledky, lze de Haanovu teorii charakterizovat vztahem

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h(\lambda t) - h(t)}{w(t)} = k(\lambda) \in \mathbb{R} \tag{18}$$

pro všechna $\lambda > 0$. Ve skutečnosti bylo studium těchto relací iniciováno Bojanićem a Karamatou už v r. 1963. V r. 1970 však došlo ke „znovuobjevení“ a zejména započalo systematické studium, iniciované především de Haanovou dizertací [17]. Pokud položíme $h = \ln f$ a $k = \ln g$, pak (17) nabývá tvaru $\lim_{t\to\infty}(h(\lambda t) - h(t)) = k(\lambda)$. Zobecněním této relace ve smyslu zavedení tzv. *pomocné funkce* w dostáváme (18). Důležitým kontextem, ve kterém relace (18) přirozeně vzniká, je „kritický případ“ (tj. $\varrho = -1$) v Karamatově integrační větě, viz kapitolu 6. Zde směr „converse half“ nedává žádnou informaci a směr „direct half“ říká pouze, že je-li $L \in \mathcal{SV}$ a $h(t) :=$ $:= \int_a^t L(s)/s \,\mathrm{d}s$, pak $\lim_{t\to\infty} h(t)/L(t) = \infty$. Existuje však mnohem preciznější popis vztahu mezi h a L, kdy z věty o stejnoměrné konvergenci plyne

$$\frac{h(\lambda t) - h(t)}{L(t)} = \int_1^\lambda \frac{L(tu)}{L(t)u}\,\mathrm{d}u \to \int_1^\lambda \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln \lambda$$

pro $t \to \infty$. Jmenovatel w v (18) musí být při obecných předpokladech vzat ze třídy $\mathcal{RV}$. Dále lze ukázat, že je-li $w \in \mathcal{RV}(\vartheta)$, potom limita $k(\lambda)$, existuje-li konečná, musí být tvaru $k(\lambda) = \ln \lambda$ pro $\vartheta = 0$ a $k(\lambda) = (\lambda^\vartheta - 1)/\vartheta$ pro $\vartheta \neq 0$. Je-li $\vartheta \neq 0$, pak nedostaneme nic nového (přesněji, obdržíme starou dobrou regulární variaci). Je-li však $\vartheta = 0$, pak obdržíme novou, velmi užitečnou třídu, kterou označujeme symbolem $\Pi = \Pi(w)$ (hovoříme též o Π-*variaci*, příp. o Π-*měnících se funkcích*). Uvažujeme-li funkce v absolutní hodnotě, pak třída Π tvoří vlastní podmnožinu třídy $\mathcal{SV}$. Např. $\ln^\alpha t \ln_2^\beta t + o(\ln^{\alpha-1} t)$, kde $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, náleží do Π, kdežto $2\ln t + \sin \ln t \in \mathcal{SV} \setminus \Pi$. De Haanova teorie je tedy jednak přímým zobecněním Karamatovy teorie a také prostředkem, který umožňuje „zacelit mezery“ v Karamatově větě; někdy se hovoří o tzv. *teorii druhého řádu*. De Haanova motivace však byla zejména pravděpodobnostní, viz též kapitolu 11. Z mnoha zajímavých vlastností funkcí z třídy Π uveďme např. tyto. Platí rozšíření věty o stejnoměrné konvergenci. Dále, $f \in \Pi$, právě když existuje $L \in \mathcal{SV}$ tak, že

$$f(t) = L(t) + \int_a^t \frac{L(s)}{s}\,\mathrm{d}s.$$

Je-li $f \in \Pi(w)$, pak

$$w(t) \sim f(t) - \frac{1}{t}\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

pro $t \to \infty$.

Zmiňme se ještě o další důležité de Haanově třídě, totiž třídě Γ. Pro $\mathcal{RV}$ funkce jejich (zobecněné) inverze dávají opět $\mathcal{RV}$ funkce. Funkce ve třídě Γ, kterou budeme níže definovat precizněji, lze chápat jako inverze neklesajících neohraničených funkcí z třídy Π. Dostaneme tak užitečnou podmnožinu rychle měnících se funkcí. Jiný způsob náhledu je založen na rozšíření definičního vztahu (4) ve smyslu existence kladné funkce g a $\varrho \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f\left(t\lambda^{g(t)}\right)}{f(t)} = \lambda^\varrho \tag{19}$$

pro každé $\lambda \in (0, \infty)$. Bez újmy na obecnosti lze vzít $\varrho = 1$ (tuto volbu lze totiž realizovat triviální změnou funkce g). Z praktických důvodů ještě provedeme vhodnou transformaci ve vztahu (19), což pak vede na následující definici. Řekneme, že neklesající funkce $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ patří do třídy Γ, jestliže existuje (tzv. pomocná) funkce $v\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ taková, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t + \lambda v(t))}{f(t)} = \mathrm{e}^{\lambda}$$

pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$; píšeme $f \in \Gamma = \Gamma(v)$ (hovoříme též o Γ-*variaci*, příp. o Γ-*měnících se funkcích*). Platí např. ekvivalence $f \in \Gamma$, právě když

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t) \int_a^t \int_a^s f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s}{\left(\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2} = 1 \tag{20}$$

a řada dalších zajímavých vlastností funkcí z třídy Γ. Jistě stojí za zmínku, že je-li limita v (20) různá od 1, pak dostáváme regulární variaci. Také si povšimněme, že je-li $h(t) = \int_a^t \int_a^s f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s$, potom zlomek z (20) nabývá tvaru $h''(t)h(t)/(h'(t))^2$, čehož lze využít např. při studiu diferenciálních rovnic.

Jak již bylo řečeno, existuje řada dalších tříd a pojmů spadajících do teorie regulární variace. Zájemce odkazujeme zejména na monografii [3]. My zde nyní pro zasazení do širšího kontextu zmíníme dva typy funkcí, které sice přímo s regulární variací nesouvisejí, avšak nějakým způsobem se jí dotýkají.

V aplikacích se často objevuje pojem *subexponenciální funkce*. Z definice, kterou zde nebudeme podrobněji uvádět, plyne, že je-li f subexponenciální, potom pro každé $\varepsilon > 0$ platí $\lim_{t\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t} = \infty$. Lze ukázat, že třída $\mathcal{RV}$ funkcí je vlastní podmnožinou třídy subexponenciálních funkcí, přičemž však díky propracované teorii regulární variace lze obecné $\mathcal{RV}$ funkce studovat opravdu důkladně (na rozdíl od subexponenciálních funkcí). Subexponenciální funkce krátce zmíníme i v souvislosti s distribučními funkcemi v kapitole 11.

Kapitolu zakončeme poznámkou o tzv. Hardyho poli. Viděli jsme, že $\mathcal{RV}$ funkce (a různé jejich modifikace) byly zaváděny pomocí vlastností, které mají tyto funkce splňovat. Je možno zvolit i jiný přístup, totiž „vyrábět“ třídy funkcí z vhodně zvolených základních funkcí pomocí předepsaných operací. Například tzv. *logaritmicko-exponenciální funkce* je definována jako reálná funkce na intervalu $[a, \infty)$ vytvořená pomocí konečné kombinace obyčejných symbolů $+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\sqrt[n]{\ }$ a funkcionálních symbolů $\ln(\cdot)$, $\exp(\cdot)$ operujících na proměnné x a reálných konstantách, viz [20]. Obecněji, tzv. *Hardyho pole* (dle Bourbakiho) je množina germů (jistých tříd ekvivalence) reálných funkcí na $[a, \infty)$, která je uzavřená na derivování a tvoří pole vzhledem ke sčítání a násobení. Volně řečeno, Hardyho pole jsou jakýmisi přirozenými obory asymptotické analýzy, kde všechna pravidla platí bez vymezujících podmínek. Ocitujme v této souvislosti Hardyho: „*No function has yet presented itself in analysis the laws of whose increase, in so far as they can be stated at all, cannot be stated, so to stay, in logarithmico-exponential terms.*“ Toto jeho tvrzení bylo v podstatě ovlivněno faktem, že aritmetické funkce (s často velmi komplikovanou strukturou) vyskytující se v teorii čísel, od kterých očekával, že dají vzniknout nějakým skutečně novým způsobům růstu, splňovaly vlastně logaritmicko-exponenciální zákony růstu. To ovšem ukazuje na značný význam teorie, kterou se zabývá náš článek. Skutečně, pro jakoukoliv logaritmicko-exponenciální funkci f a její derivace (či jakýkoliv prvek Hardyho pole) dostáváme (v okolí nekonečna) jejich spojitost a monotonii, přičemž existuje (vlastní či nevlastní) limita $\lim_{t\to\infty} f(t)$. Na druhé straně – jak jsme mohli vidět výše – $\mathcal{SV}$ funkce mohou oscilovat, dokonce i „nekonečně“. Např. řešení některých i vcelku jednoduchých diferenciálních rovnic se mohou chovat jako $\mathcal{SV}$ funkce a tedy pak vykazují onen „skutečně nový způsob růstu“. Zdůrazněme, že tento závěr může platit i za předpokladů, které v podstatě nesouvisí s regulární variací; příklad takového výsledku uvedeme později.

10. Regulární variace dalších typů zobrazení

Všimněme si, že dosud jsme hovořili prakticky jen o reálných funkcích jedné reálné proměnné. Tato poznámka přirozeně evokuje otázku, jestli lze pojem regulární variace rozšířit i na jiné typy zobrazení.

Taková rozšíření skutečně existují. Celkem bez problémů si lze představit regulární variaci pro funkce $f\colon (0,\infty)\to\mathbb{C}$. Např. důležitá věta o stejnoměrné konvergenci platí beze změny, dokonce i některé její důkazy lze převzít z reálného případu pouze s drobnými modifikacemi. Zřejmě též lze uvažovat funkce komplexní proměnné, zde hraje důležitou roli teorie analytických funkcí. Existují rovněž teorie s různými variantami regulární variace funkcí více proměnných, či pro vektorový případ. Regulární variace se uvažuje např. i pro zobrazení $f\colon G\to H$, kde G, H jsou topologické grupy. I v tomto případě lze za docela rozumných podmínek obdržet větu o stejnoměrné konvergenci a tedy je možno vybudovat netriviální teorii regulární variace.

11. Regulární variace a teorie pravděpodobnosti

Zatímco Karamatova práce o tauberovských větách okamžitě zajistila jeho proslulost v matematickém světě, jeho články [24], [25] nezaznamenaly (patřičný) větší ohlas. Tak tomu bylo po téměř dalších 30 let. Karamatovy práce, kde se systematicky věnoval regulární variaci, byly skoro zapomenuty a teprve později si matematici uvědomili význam jeho myšlenek a jejich potenciál pro aplikace v různých odvětvích matematiky.

Asi nejvýraznější prací, která znovuobjevila pojem regulární variace a zároveň jej ve velké míře využila, je známá Fellerova kniha [13] z 60. let věnující se teorii pravděpodobnosti. Možnosti regulární variace byly pak ještě více patrné v de Haanově dizertaci [17] z r. 1970. De Haanova práce byla jedním z výstupů tehdejšího zvýšeného zájmu holandské vědy o teorii extrémních hodnot. Tato priorita souvisela s prevencí a snahou o lepší porozumění příčinám tragédií, jako byly silné povodně v r. 1953 v Severním moři. De Haanovy úvahy vedly mj. k teorii, která jakýmsi způsobem vylepšuje Karamatovu teorii, viz kapitolu 9. Teorie pravděpodobnosti dnes patří k oblastem, kde je regulární variace využívána nejvíce. Kuriózním faktem je, že Karamata prakticky neměl znalosti z této oblasti.

Pro ilustraci zde uvedeme několik vybraných základních výsledků. Pro mnohé další viz monografie [3], [13], [16], [17], [18], [35], [41]. Doporučujeme též přehledové články [4], [5], [6], [7], [22].

Začněme s teorií extrémních hodnot. Pro $\xi > 0$ uvažujme distribuční funkce

$$\Phi_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leqq 0, \\ \exp\{-x^{-\xi}\} & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$
$$\Psi_\xi(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{-\xi}\} & \text{pro } x \leqq 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$
$$\Lambda(x) = \exp\{\mathrm{e}^{-x}\}$$

Fréchetova, resp. Weibullova, resp. Gumbelova rozdělení. Tato rozdělení jsou ve skutečnosti speciálními případy tzv. GEV (generalized extreme value) rozdělení; jde o rozdělení typu I, resp. typu II, resp. typu III. Zmíněné Weibullovo rozdělení není klasické, nýbrž tzv. extremální či obrácené (jak bývá někdy v literatuře označováno). Nechť F je distribuční funkce, označme $\overline{F} = 1 - F$ (tj. komplementární distribuční funkce či funkce přežití) a $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, kde $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí F. Jestliže existuje centrující posloupnost a_n a normující posloupnost $b_n > 0$ tak, že

$$P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leqq x\right) \to G(x) \quad (n \to \infty) \tag{21}$$

pro nějakou distribuční funkci G, pak říkáme, že F náleží do *oboru přitažlivosti* distribuční funkce G, píšeme $F \in D_M(G)$. Konvergencí v (21) máme na mysli tzv. *konvergenci v distribuci*, která znamená konvergenci v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, kde limitní distribuční funkce je spojitá. Platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned} &F \in D_M(\Phi_\xi), \text{ právě když } \overline{F} \in \mathcal{RV}(-\xi); \\ &F \in D_M(\Psi_\xi), \text{ právě když } \overline{F}(x_+ - 1/x) \in \mathcal{RV}(-\xi); \\ &F \in D_M(\Lambda), \text{ právě když } \overline{F}^{\,-1} \in \Pi, \end{aligned}$$

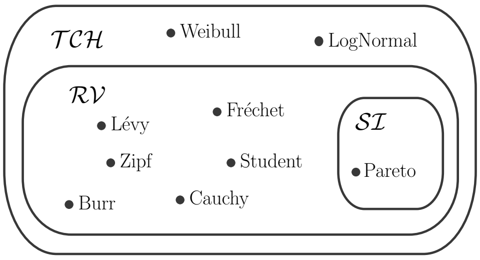
kde $x_+ := \sup\{x\colon \overline{F}(x) > 0\}$ a Π je de Haanova třída definovaná v kapitole 9. Pro důkazy viz např. [3]; uvedená tvrzení pro jednotlivá rozdělení jsou však spojena s různými autory a byla dokázána o dost dříve.

Dalším důležitým objektem v teorii pravděpodobnosti je suma nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $S_n := X_1 + \ldots + X_n$; zmiňme v této souvislosti např. náhodnou procházku. Opět se zajímejme o podmínky náležitosti do oboru přitažlivosti, který definujeme stejně jako (21), pouze místo M_n uvažujeme S_n, označme tento obor D_S. Limitními zákony jsou zde nutně zákony *stabilní*, jejichž nejdůležitějším parametrem je tzv. *index* $\alpha \in (0, 2]$, viz např. [3]. Nebudeme zde tyto pojmy upřesňovat, pouze poznamenejme, že případ $\alpha = 2$ koresponduje s Gaussovým rozdělením Φ. Platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned} &F \in D_S(\Phi), \text{ právě když } \int_{-x}^{x} t^2 \mathrm{d}F(t) \in \mathcal{SV}; \\ &F \in D_S(G), \text{ právě když } 1 - F(x) + F(-x) \in \mathcal{RV}(-\alpha), \end{aligned}$$

kde G je nějaký negaussovský stabilní limitní zákon, přičemž ve druhém případě figuruje ještě jistá balanční podmínka, viz např. [3, 35], kde lze nalézt i důkazy. Podobně jako u předchozího výsledku, i zde je historie bohatší. Např. první ze vztahů byl odvozen nezávisle přinejmenším třemi různými autory (Lévy, Feller, Khintchine). Uvažovali jsme jednodimenzionální případ. Z hlediska aplikací je velmi důležitý případ vícedimenzionální, který je pochopitelně komplikovanější. I ten je z hlediska regulární variace studován.

Komplementární distribuční funkce v negaussovském oboru přitažlivosti vykazují $\mathcal{RV}$ pokles, který je velmi pomalý ve srovnání s poklesem v gaussovském případě. Tím se dostáváme k pojmu těžký chvost, kde regulární variace hraje velmi významnou roli. Skutečně, regulárně měnící se distribuční funkce lze analyzovat mnohem snáze a důkladněji než obecné distribuční funkce s těžkým chvostem. Připomeňme též motivační úvahu z kapitoly 1, že je neobvyklé, aby distribuční funkce F sledovaného jevu přesně splňovala mocninný zákon a byla tedy škálově invariantní. Říkáme, že distribuční funkce F má *těžký chvost*, jestliže $\limsup_{t\to\infty} \overline{F}(t)\mathrm{e}^{\mu t} = \infty$ pro každé $\mu > 0$. V některých aplikacích je tento pojem potřebný i pro levý konec, zavede se prakticky stejně. Přístupnou formou je téma distribučních funkcí s těžkým chvostem diskutováno v [35]. Na obrázku 3 ilustrujeme vybrané konkrétní distribuce ve vztahu s obecnými distribucemi z tříd diskutovaných v této kapitole. K tomu dodejme, že již dříve zmíněná třída subexponenciálních funkcí (zde navíc ve smyslu funkcí přežití) je nadmnožinou $\mathcal{RV}$ a podmnožinou $\mathcal{TCH}$.



Obr. 3. $\mathcal{TCH}$ = distribuční funkce s těžkým chvostem, $\mathcal{RV}$ = distribuční funkce s regulárně měnící se funkcí přežití, $\mathcal{SI}$ = distribuční funkce se škálově invariantní funkcí přežití

Již zmíněné tauberovské věty mají velký význam i v teorii pravděpodobnosti. Uvedli jsme Karamatovu tauberovskou větu (věta 5), která je sice velmi silná, avšak předpokládá nezápornost indexu regulární variace a nelze ji tedy přímo aplikovat na distribuce. Tento nedostatek lze napravit, jak ukazuje např. následující tvrzení, jehož důkaz využívá právě větu 5, viz např. [35]. Symbolem $\mathbb{E}[X]$ označujeme střední hodnotu náhodné veličiny X.

Věta 6. *Nechť X je náhodná proměnná s distribuční funkcí F, přičemž předpokládáme $\mathbb{E}[X^n] < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jestliže $L \in \mathcal{SV}$ a $\alpha = n + \beta$, kde $\beta \in (0, 1)$, potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

$$\overline{F}(x) \sim \frac{(-1)^n}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} L(x) \text{ pro } x \to \infty,$$

$$(-1)^{n+1} \left(\mathcal{T}_F(s) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{E}[X^k](-1)^k}{k!}\, s^k \right) \sim s^\alpha L(1/s) \text{ pro } s \to 0+,$$

kde Laplaceova–Stieltjesova transformace $\mathcal{T}_F$ je definována v (14).

Větu lze interpretovat následujícím způsobem. Máme-li Laplaceovu–Stieltjesovu transformaci náhodné proměnné vyjádřenu pomocí Taylorova rozvoje s použitím momentů, pak abelovský směr říká, že za uvedené podmínky pro distribuci (tedy zejména $|\overline{F}| \in \mathcal{RV}(-\alpha)$) platí pro korekční člen $o(s^n)$, že je řádu s^α. Tauberovská část pak popisuje opačný směr.

12. Regulární variace a teorie čísel

Začněme historickou poznámkou. Je doloženo, že Karamata byl značně ovlivněn pracemi E. Landaua a G. Pólyi, kteří studovali monotónní pomalu měnící se funkce nazývané *langsam wachsende* a *langsam abnehmende*. Ovšem celé toto jejich studium bylo motivováno teorií čísel, kdežto Karamatovou motivací pro úvahy o regulární variaci byla problematika tauberovských vět. V souvislosti s terminologií poznamenejme, že původním názvem pro *regular variation* byl termín *regular growth*. Karamata se inspiroval Borelem, který pojem regular growth užíval nikoliv v Karamatově smyslu, ale při studiu integrálních funkcí, viz [20].

Landauův článek [29] z r. 1911 je jednou z nejranějších prací, kde se objevuje regulární variace. Landau při studiu problémů z teorie čísel pracoval s monotónními funkcemi a ukázal, že je-li L kladná monotónní funkce na intervalu $(0, \infty)$ splňující $\lim_{t\to\infty} L(\lambda t)/L(t) = 1$ pro jedno $\lambda \neq 1$, potom tento limitní vztah platí pro každé $\lambda > 0$, tedy L je pomalu měnící se funkce (v moderní terminologii).

Pólya v článku [39] z r. 1917 ukázal, že pro funkci f riemannovsky integrovatelnou na $[0, 1]$ a prvočísla p platí

$$\frac{\ln x}{x} \sum_{p \leqq x} f(p/x) \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

pro $x \to \infty$. Dále odvodil obdobný vztah, kde prvočísla p jsou nahrazena posloupnostmi q, jejichž čítací funkce splňuje podmínku $\sum_{q\leqq x} 1 \sim x/L(x)$ pro $x \to \infty$, přičemž předpokládal, že funkce L je kladná a platí pro ni rovnost $\lim_{t\to\infty} L(2t)/L(t) = 1$. Pólyův důkaz je pozoruhodný ve smyslu využití důmyslných metod, které byly později dále rozpracovány. Poznamenejme, že odvodil – v moderní terminologii – abelovskou větu pro Mellinovu konvoluci Stieltjesova tvaru.

Uveďme nyní již pouze v náznacích, jak regulárně měnící se funkce nacházejí uplatnění v některých dalších výsledcích teorie čísel. Zajímavou větu dokázal např. Kohlbecker v r. 1958 v článku [26]. Odvodil velmi obecné a přitom silné asymptotické vztahy (v řeči regulární variace) pro počet rozkladů přirozeného čísla na součet přirozených čísel.

Další významná aplikace se týká známé věty o asymptotickém rozmístění prvočísel mezi přirozenými čísly, přesněji jde o vztah

$$\sum_{p \leqq n} 1 \sim \frac{n}{\ln n} \text{ pro } n \to \infty,$$

kde výraz nalevo znamená počet prvočísel, která nepřevyšují číslo n. Je známo mnoho důkazů této věty, které lze ve smyslu metod rozdělit zhruba do třech kategorií, a to 1. užití komplexní analýzy, 2. užití wienerovské–tauberovské teorie a 3. užití elementárních metod (tedy metod nikoliv z prvních dvou kategorií). Důkaz, na který chceme upozornit v souvislosti s naším tématem, je založen na jisté pokročilé tauberovské větě pro rozdíl funkcí, kde se využívá ve velké míře právě teorie regulární variace (autorem je Delange [11]).

Jako poslední aplikaci z teorie čísel, kde nacházejí uplatnění regulárně se měnící funkce, zmiňme výsledky o asymptotických formulích pro sumy multiplikativní funkce g, kde $g(mn) = g(m)g(n)$, m, n jsou nesoudělná přirozená čísla. Tyto výsledky jsou svázány zejména s matematikem de Bruijnem [10], viz též [16].

13. Regulární variace a diferenciální rovnice

Regulární variace má četné aplikace i v kvalitativní teorii diferenciálních rovnic. Tato skutečnost není překvapivá vzhledem přirozenému výskytu objektů souvisejících s regulární variací u rovnic či vzhledem k dostupnosti nástrojů jako je třeba Karamatova integrální věta. Aplikace lze nalézt nejen u diferenciálních rovnic obyčejných, ale též funkcionálních, parciálních, stochastických, či volterrovských.

Při analýze diferenciálních rovnic se často objevuje potřeba studovat limitní chování výrazů jako např. $ty'(t)/y(t)$, $y(t)y''(t)/(y'(t))^2$, $y(\lambda t)/y(t)$, $y(t+h)-y(t)$, $y(\lambda t)-y(t)$, či obecněji, asymptotické chování jistých diferenciálních, diferenčních, funkcionálních, nebo integrálních operátorů. Všechny uvedené konkrétní výrazy mají svým způsobem blízko k teorii regulární variace, která nabízí velmi efektivní nástroje pro jejich zkoumání. V této souvislosti je nutno zdůraznit jeden fakt. Totiž že v mnohých článcích věnujících se problémům asymptotické analýzy diferenciálních rovnic a nezmiňujících regulární variaci (neboť si autoři patrně nebyli vědomi existence takové teorie) lze celkem často objevit celkem těžkopádné postupy prováděné za značně omezujících předpokladů. Přitom se však ukazuje, že zasazení do rámce regulární variace by umožnilo tyto problémy řešit mnohem elegantněji a za obecnějších podmínek. Na druhé straně se třeba objevují články odborníků na pravděpodobnost (kteří jsou často experty právě na regulární variaci) pokoušející se tu více, tu méně úspěšně i o analýzu diferenciálních rovnic.

První seriózní využití Karamatovy teorie v kvalitativní analýze diferenciálních rovnic se objevuje v článku [2] z r. 1947. Avakumovič v tomto článku studuje nelineární Thomasovu–Fermiho rovnici a odvozuje podmínky, za kterých jsou všechna kladná řešení jdoucí do nuly ve třídě $\mathcal{RV}$.

Poté nastala celkem dlouhá odmlka a až v 70. letech se hned několik autorů začalo zajímat o systematickou analýzu diferenciálních rovnic v rámci regulární variace, přičemž tento zájem trvá až dodnes. Mezi všemi autory je potřeba zdůraznit zejména jméno V. Marića. Mezi množstvím jiných prací je ceněna především jeho monografie [30], která shrnuje vývoj do r. 2000. O zachycení pokroků v této oblasti po r. 2000 se pokouší text [42] z r. 2014. Shrnutí této problematiky v historickém světle se věnuje článek [38] z r. 2018. Jako typické práce reprezentující některé různé přístupy v analýze diferenciálních rovnic v rámci regulární variace zmiňme [1], [12], [21], [32], [33], [40].

Regulární variace se může objevovat přímo u koeficientů či nelinearit rovnic, u jejich řešení, a také v asymptotickém popisu, ať už se jedná o formule pro řešení, či např. formule pro rozložení nulových bodů. Dále je též mnohdy skryta v důkazech, aniž by tvrzení byla formulována v této řeči.

Pro ilustraci zde stručně popišme některé výsledky odvozené pro důležitou, a tedy hojně studovanou lineární diferenciální rovnici

$$y'' + p(t)y = 0, \tag{22}$$

kde p je spojitá funkce na intervalu $[a, \infty)$. (Profesor F. Neuman nazýval tuto rovnici „nejjednodušší z těch složitých".) Zajímejme se třeba o regulární variaci jejího řešení. Důkaz věty lze najít např. v [30].

Věta 7. *Nechť $A \in (-\infty, 1/4)$ a ϑ_1, ϑ_2 jsou kořeny rovnice $\vartheta^2 - \vartheta + A = 0$. Rovnice (22) má fundamentální systém řešení $y_i(t) \in \mathcal{RV}(\vartheta_i)$, $i = 1, 2$, právě když*

$$\lim_{t\to\infty} t \int_t^\infty p(s)\,\mathrm{d}s = A.$$

Navíc platí, že každé netriviální řešení vzaté v absolutní hodnotě patří do $\mathcal{RV}(\vartheta_1)$ nebo $\mathcal{RV}(\vartheta_2)$, přičemž regulární variace je zde vždy normalizovaná.

Stojí za povšimnutí, že podmínka garantující regulární variaci neobsahuje požadavek, aby samotný koeficient byl regulárně měnící se; viz též komentář k Hardyho třídě v kapitole 9. Výraz z této podmínky je dobře znám z oscilační teorie. Pro hodnoty limity větší než 1/4 rovnice osciluje (nemá kladná řešení a tím spíše nemá tedy $\mathcal{RV}$ řešení). Je-li $A = 1/4$, pak může rovnice oscilovat či neoscilovat, přičemž v případě neoscilace jsou všechna kladná řešení ve třídě $\mathcal{RV}(\vartheta)$, kde $\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_2 = 1/2$. Je-li $A = -\infty$, pak rovnice (22) je sice neoscilatorická, avšak neexistují $\mathcal{RV}$ řešení. Za (nepříliš restriktivních) dodatečných podmínek lze v tomto případě prokázat rychlou variaci řešení, příp. jejich náležitost do třídy Γ. Kromě mnoha jiných důsledků a zobecnění našla věta 7 uplatnění i při studiu Friedmannových kosmologických rovnic, kde přítomnost pomalu měnící se komponenty v řešení vysvětluje některé jevy ve standardním modelu vývoje vesmíru, viz [34].

Často se kvalitativní výsledky pro diferenciální rovnice odvozují za předpokladu, že koeficienty jsou mocninné funkce či asymptoticky mocninné funkce. Ukazuje se, že v mnoha případech je možné tuto analýzu zobecnit ve smyslu regulární variace. Takovéto zobecnění má velký význam mj. i z hlediska pokrytí větší šíře kvalitativně různých situací, a to především v kritických (obtížnějších) případech. Demonstrujme tento fakt opět na příkladu rovnice $y'' + p(t)y = 0$, uvažujme nyní $p < 0$. Z obecné teorie je známo, že divergence resp. konvergence integrálu $J := \int_a^\infty t|p(t)|\,\mathrm{d}t$ garantuje existenci resp. neexistenci řešení y s vlastností $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. V této souvislosti se nyní zajímejme o perturbace rovnice Eulerova typu. Nejprve vezměme $|p(t)| \sim C/t^2$ pro $t \to \infty$, kde $C > 0$. Potom zřejmě $J = \infty$ a tedy existuje řešení jdoucí do nuly. Nyní uvažujme obecnější (větší) perturbaci ve smyslu $|p(t)| = L_p(t)/t^2$, kde $L_p \in \mathcal{SV}$. Potom v závislosti na vlastnostech perturbace L_p lze uvažovat jak $J = \infty$ (je-li např. $L_p = \ln^\gamma t$, $\gamma \geqq -1$) , tak i $J < \infty$ (je-li např. $L_p = \ln^\gamma t$, $\gamma < -1$), a tedy máme zahrnuty obě varianty, které mohou nastat. Tento fakt je velmi důležitý i při analýze struktury prostoru řešení komplikovanějších rovnic, kdy je prostor nenulových řešení rozložen na různé asymptotické třídy. Zasazení do rámce regulární variace pak často stačí k tomu, abychom pokryli všechny možné typy chování, přičemž je navíc možné dosáhnout docela jemných výsledků. Poznamenejme například, že v případě výše uvažované rovnice, kde $|p(t)| = L_p(t)/t^2$, $L_p \in \mathcal{SV}$ a $\lim_{t\to\infty} L_p(t) = 0$, lze odvodit následující asymptotické formule, viz [15, 42]. Jestliže $J = \infty$, potom každé kladné klesající řešení y je pomalu měnící se a má tvar

$$y(t) = \exp\left\{-\int_a^t (1+o(1))sp(s)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

Jestliže $J < \infty$, potom každé kladné klesající řešení y je pomalu měnící se a má tvar

$$y(t) = y(\infty)\exp\left\{\int_t^\infty (1+o(1))sp(s)\,\mathrm{d}s\right\},$$

kde $y(\infty) := \lim_{t\to\infty} y(t) \in (0,\infty)$. Dodejme, že v obou případech jsou řešení v de Haanově třídě Π.

Není potřeba uvažovat pouze situace, kde koeficienty a/nebo řešení jsou $\mathcal{RV}$. Díky vhodným transformacím je prostřednictvím regulární variace možno zkoumat např. exponenciální chování, které je případně porušeno regulárně ohraničenými členy. Anebo je možno použít teorie rychlé variace, či propracované de Haanovy teorie. Zajímavé možnosti se též nabízejí při zobecnění mocninných (ne)linearit na $\mathcal{RV}$ (ne)linearity. Ukazuje se, že v některých případech lze vysledovat nové typy chování. V tomto smyslu jsou zajímavé např. výsledky pro *skorolineární* rovnici tvaru $y'' + p(t)f(y) = 0$, kde $f \in \mathcal{RV}(1)$, viz [42]. Rovnice vykazující sublinearitu či superlinearitu lze takto studovat i v „choulostivých případech“ a navíc důkladně.

Naznačené využití regulární variace k zachycení celkem široké škály chování se ještě více projevuje u tzv. zlomkových diferenciálních rovnic (celočíselné diferenciální operátory jsou nahrazeny zlomkovými operátory), kde prostor řešení má typicky mnohem komplikovanější strukturu než u klasických diferenciálních rovnic. Existuje též zlomková verze Karamatovy integrační věty, kde dochází v určitých případech k zajímavým efektům nevyskytujícím se v celočíselném kalkulu. Analýza zlomkových operátorů s využitím tauberovských vět také vypadá slibně. Tyto skutečnosti nás mohou naplňovat optimismem, že se ještě dočkáme silných výsledků týkajících se asymptotického popisu zlomkových rovnic za pomocí regulární variace.

V souvislosti s diferenciálními rovnicemi v rámci Karamatovy a de Haanovy teorie zmiňme, že teorie regulární variace se užívá např. i při studiu problému n těles [46], či Ostwaldova zrání (jde o jev vysledovaný v jistých typech roztoků, který popisuje změny v nehomogenních strukturách, např. růst větších částic na úkor těch menších), viz [37]. Rozsah a zaměření našeho článku nedovolují popsat detaily nezbytné k pochopení. Tedy pouze uveďme, že regulární variace se při popisu těchto reálných jevů objevuje velmi přirozeným způsobem, dokonce v některých případech vyvstává jako nutnost.

14. Diskrétní regulární variace

V kapitole 9 jsme uvedli hned několik různých rozšíření regulární variace. Neuvažovali jsme však jedno, které se vzhledem ke dlouhodobým snahám analýzy o hledání diskrétních protějšků ke spojitým teoriím přirozeně nabízí. Je jím rozšíření ve smyslu regulárně měnící se posloupnosti. Přitom Karamata tento pojem uvažoval již ve svém článku z r. 1930. Prvotní definice regulárně měnící se (kladné) posloupnosti $y = \{y_k\}$ jím byla zavedena pro prostřednictvím vztahu

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{ky_k} \sum_{j=1}^{k} y_j = \frac{1}{\varrho + 1},$$

který má platit pro nějaké $\varrho \in (-1, \infty)$. Není náhoda, že tento výraz je diskrétní obdobou výrazu z věty 3. V téže práci byla uvažována i podmínka $\lim_{k\to\infty} y_{[\lambda k]}/y_k = g(\lambda)$ ($[\cdot]$ znamená celou část), v níž rozpoznáme analogii relace (2). Tvrzení o vzájemném vztahu mezi těmito analogiemi však Karamata ponechal bez důkazu. V r. 1973 Galambos a Seneta v článku [14] zavedli následující čistě sekvenciální definici. Řekneme, že kladná posloupnost y je regulárně měnící se s indexem ϱ, jestliže existuje kladná posloupnost α taková, že

$$y_k \sim \alpha_k \text{ pro } k \to \infty \text{ a } \lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right) = \varrho, \tag{23}$$

kde C je kladná konstanta; píšeme $y \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}(\varrho)$. Ještě v témže roce vyšel Bojanićův a Senetův článek [9], kteří teorii unifikovali a ukázali, že definice založená na vztahu (23) je ekvivalentní definici založené na podmínce

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{[\lambda k]}}{y_k} = \lambda^{\varrho}$$

pro každé $\lambda > 0$. Dále odvodili diskrétní Karamatovu integrační větu a řadu jiných vlastností $\mathcal{RV}$ posloupností. Důležitou roli přitom hrála tzv. *věta o vnoření* dokázaná v [9] i [14]: Jestliže $y \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}(\varrho)$, potom pro funkci f (reálné proměnné) definovanou na $[0, \infty)$ vztahem $f(t) = y_{[t]}$ platí $f \in \mathcal{RV}(\varrho)$. (Opačná implikace platí rovněž.) Tento výsledek umožňuje aplikovat spojitou teorii i v diskrétním případě. Jakkoliv je možno takovým způsobem odvodit množství výsledků, tento přístup není všespásný. Přímo v článku [9] je poznamenáno a demonstrováno, že: „*. . . however, the development of a discrete theory, analogous to the continuous one, is not generally close, and sometimes far from a simple imitation of arguments for regularly varying functions. . .* “ Např. ani důkaz diskrétní Karamatovy integrační věty nevyužívá věty o vnoření. Z mnoha vlastností $\mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}$ posloupností zmiňme pouze analogii věty o stejnoměrné konvergenci. Dále uveďme, že posloupnost $L \in \mathcal{SV}_{\mathbb{Z}} := \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}(0)$ má reprezentace

$$L_k = \varphi_k \exp\left\{\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\psi_j}{j}\right\} = \widehat{\varphi}_k \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 + \frac{\widehat{\psi}_j}{j}\right)$$

kde φ_k, $\widehat{\varphi}_k$ konvergují k nějakým kladným konstantám a ψ_k, $\widehat{\psi}_k$ konvergují k nule. Konečně poznamenejme, že je-li $y \in \bigcup_{\varrho\in\mathbb{R}} \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}(\varrho)$, potom $\lim_{k\to\infty} y_{k+1}/y_k = 1$, přičemž opačný směr neplatí. I při popisu aplikací (které jsou četné), se omezme pouze na konstatování, že teorie regulárně měnících se posloupností nalézá využití v teorii pravděpodobnosti, teorii grafů, v diskrétních transformacích, dále v teorii diferenčních rovnic (resp. rekurentních relací), či v teorii her.

Téma diskrétní regulární variace se objeví i v dalších kapitolách. Tuto kapitolu uzavřeme jednoduchým pozorováním, které se později bude hodit. Není obtížné ukázat, že vztah (23) lze (ekvivalentním způsobem) přepsat do tvaru

$$y_k \sim \alpha_k \text{ pro } k \to \infty \text{ a } \lim_{k\to\infty} \frac{k\Delta\alpha_k}{\alpha_k} = \varrho, \tag{24}$$

kde Δ je běžný dopředný diferenční operátor definovaný jako $\Delta\alpha_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$. V případě posloupností splňujících přímo druhou podmínku v (23) či (24) hovoříme o normalizované regulární variaci; píšeme $\alpha \in \mathcal{NRV}_{\mathbb{Z}}(\varrho)$.

15. Regulární variace na časových škálách

Jedním z našich cílů je dojít k obecnému konvergenčnímu kritériu pro nekonečné řady. Pro tento (ale nejen pro tento) účel se nyní zastavme u regulární variace na tzv. časových škálách. *Časovou škálou* (ozn. $\mathbb{T}$) máme na mysli libovolnou neprázdnou podmnožinu reálné osy. Základní princip je jednoduchý. Místo funkcí typu $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (zkoumaných v klasické analýze) uvažujeme funkce typu $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Pro takové funkce pak zavádíme rozšíření základních objektů klasického kalkulu (jako je derivace, integrál, diferenciální rovnice atd.) takovým způsobem, že se v případě speciálních voleb škály $\mathbb{T}$ redukují zpět na tyto objekty. Počátky kalkulu na časových škálách se datují ke konci 80. let minulého století a jsou spojeny se jmény Hilger a Aulbach. Pro základní informace doporučujeme monografii [8]. Je hned několik aspektů teorie časových škál, které stojí za zmínku: sjednocení (diskrétní a spojité analýzy), rozšíření kalkulu na nové situace, souběžná analýza modelu a různých jeho diskretizací, odhalení či lepší porozumění rozdílů ve smyslu spojitý vs. diskrétní a konečně (docela opomíjený) aspekt využití teorie na nějaké škále v teorii na jiné škále prostřednictvím vhodné transformace. Přestože budeme níže pracovat s časově škálovými rozšířeními derivace a integrálu, vzhledem k povaze článku nepovažujeme za vhodné tyto objekty zavádět se všemi detaily. Raději se podívejme, jakým způsobem se redukují v případě speciálních voleb $\mathbb{T}$. Tzv. *delta* (či *Hilgerova*) *derivace* f^Δ funkce $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ má tyto vlastnosti:

$$f^\Delta = f', \text{ resp. } f^\Delta = \Delta f, \text{ resp. } f^\Delta = D_q f,$$

je-li $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, resp. $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0} := \{q^k : k \in \mathbb{N}_0\}$, $q > 1$. Symbolem D_q značíme tzv. *Jacksonovu derivaci* známou z q-kalkulu, kterou v případě množiny $q^{\mathbb{N}_0}$ lze definovat jako $D_q f(t) = (f(qt) - f(t))/((q-1)t)$. Tzv. *delta integrál* $\int_a^b f(t)\,\Delta t$ funkce $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ má tyto vlastnosti:

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ resp. } \int_a^b f(t)\,\Delta t = \sum_{t=a}^{b-1} f(t),$$

$$\text{resp. } \int_a^b f(t)\,\Delta t = \sum_{t\in[a,b)\cap q^{\mathbb{N}_0}} (q-1)tf(t),$$

je-li $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, resp. $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$. Neobejdeme se však bez upřesnění následujících dvou pojmů z kalkulu na časových škálách. Tzv. *skokový operátor* σ, který – zhruba řečeno – říká, jakého bezprostředního souseda napravo má daný bod z $\mathbb{T}$, se definuje jako $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$. Tzv. *zrnitost* μ časové škály $\mathbb{T}$ popisuje „díry" v $\mathbb{T}$ a definuje se vztahem $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Je zřejmé, že $\sigma(t) = t$ a $\mu(t) \equiv 0$, resp. $\sigma(t) = t + 1$ a $\mu(t) \equiv 1$, resp. $\sigma(t) = qt$ a $\mu(t) = (q-1)t$, je-li $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, resp. $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$.

Následující definice je motivována diskrétním případem (24), viz [45]. Nechť $\mu(t) = o(t)$ pro $t \to \infty$. Řekneme, že měřitelná funkce $f : \mathbb{T} \to (0, \infty)$ je *regulárně měnící se s indexem* ϱ, jestliže existuje kladná (dostatečně hladká) funkce α taková, že

$$f(t) \sim \alpha(t) \text{ pro } t \to \infty \text{ a } \lim_{t\to\infty} \frac{t\alpha^{\Delta}(t)}{\alpha(t)} = \varrho, \tag{25}$$

kde C je kladná konstanta; píšeme $f \in \mathcal{RV}_{\mathbb{T}}(\varrho)$. V případě funkcí splňujících přímo druhou podmínku v (25) hovoříme o normalizované regulární variaci; píšeme $\alpha \in \mathcal{NRV}_{\mathbb{T}}(\varrho)$. V rámci teorie regulární variace na časových škálách byla odvozena řada základních tvrzení, jako je např. věta o vnoření, ekvivalence definice (25) s příslušnou časově-škálovou modifikací definice (4) či integrační věta Karamatova typu.

Čtenář patrně zaznamenal přítomnost podmínky $\mu(t) = o(t)$ pro $t \to \infty$, která říká, že zrnitost nemůže být příliš velká. Pro nezbytnost této podmínky je více důvodů. Asi ten nejjednodušší je, že požadujeme platnost vztahu $t^{\varrho} \in \mathcal{RV}_{\mathbb{T}}(\varrho)$. Na druhou stranu je přirozená otázka, jak je to s jinými zrnitostmi. Ukazuje se, že chceme-li vybudovat teorii na základě uvedené definiční podmínky (přičemž jistě je možno uvažovat i zcela jiné postupy), pak je rozumné rozlišit tři případy. Prvním případem je již zmíněný předpoklad $\mu(t) = o(t)$ pro $t \to \infty$, který vede na teorii obdobnou jako ve výše diskutovaném spojitém či diskrétním případě. Druhým případem je podmínka $\mu(t) = (q-1)t$, $q > 1$, což je vlastně q-kalkulus (případně lze uvažovat i $\mu(t) \sim (q-1)t$ pro $t \to \infty$). Třetí případ zahrnuje zbylé zrnitosti. A to zejména ty „velké", či „kombinace velké s malou". V tomto případě nelze přirozeným způsobem obdržet rozumnou teorii, chceme-li vycházet z uvedeného přístupu. Zastavme se ještě u druhého případu, tj. podmínky $\mu(t) = (q-1)t$, $q > 1$. Zde je potřeba modifikovat definiční vztah (25) v následujícím smyslu:

$$f(t) \sim \alpha(t) \text{ pro } t \to \infty \text{ a } \lim_{t\to\infty} \frac{tD_q\alpha(t)}{\alpha(t)} = [\varrho]_q,$$

kde $[\cdot]_q$ je tzv. *q-číslo* definované vztahem $[\cdot]_q = ((\cdot)^q - 1)/(q-1)$; píšeme $f \in \mathcal{RV}_q(\varrho)$ a hovoříme o tzv. *q-regulární variaci*. Tento případ je velmi výjimečný. Skutečně, díky tomu, že definiční obor $q^{\mathbb{N}_0}$ má specifickou strukturu, která „vychází vstříc" multiplikativnímu vyjádření regulární variace, dochází ke značnému zjednodušení. Vždy je zaručena normalizovanost. Především však je podmínka $f \in \mathcal{RV}_q(\varrho)$ ekvivalentní podmínce $\lim_{t\to\infty} f(qt)/f(t) = q^{\varrho}$, tedy ústřední vztah (4) z Karamatovy teorie vlastně stačí ověřit pro jedinou hodnotu parametru $\lambda = q$. To má za důsledek řadu zjednodušujících modifikací tvrzení Karamatovy teorie. Jak regulární variace s podmínkou $\mu(t) = o(t)$ pro $t \to \infty$, tak i q-regulace našla uplatnění při studiu dynamických rovnic, resp. q-diferenčních rovnic.

Vraťme se nyní k diskrétní regulární variaci ve smyslu definice (24). Uvažujme následující zobecnění, které bylo zavedeno v článku [43]. Nechť Ω označuje množinu posloupností τ, které jsou rostoucí, neomezené a splňují vztah $\tau_k \sim \tau_{k+1}$ pro $k \to \infty$. Řekneme, že kladná posloupnost y *je regulárně měnící se s indexem* ϱ *vzhledem k* $\tau \in \Omega$, jestliže existuje kladná posloupnost α taková, že

$$y_k \sim \alpha_k \text{ pro } k \to \infty \text{ a } \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{k+1}/\alpha_k - 1}{\tau_{k+1}/\tau_k - 1} = \varrho, \tag{26}$$

píšeme $y \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\varrho)$. V případě posloupností splňujících přímo druhou podmínku v (26) hovoříme o normalizované regulární variaci vzhledem k τ; píšeme $\alpha \in \mathcal{NRV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\varrho)$. Je zřejmé, že vezmeme-li za τ identitu, dostaneme zpět klasickou diskrétní regulární variaci. Na druhé straně je $\bigcup_{\tau\in\Omega} \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}$ nadmnožinou třídy $\mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}$. Např. je-li $\tau_k = \Pi_{j=1}^{k-1}(1 + \ln j/j)$ a $y_k = \exp \sum_{j=1}^{k-1}(\varrho \ln j)/j$, pak $\tau \in \Omega$, $y \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\varrho)$, avšak $\lim_{k\to\infty} y_{2k}/y_k = \infty$, a tedy y není regulárně měnící se. Pro třídu $\mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}$ lze odvodit řadu analogií tvrzení z diskrétní Karamatovy teorie. Uveďme si např. následující verzi Karamatovy integrační věty, později ji využijeme.

Věta 8. *Nechť $y \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\varrho)$, $\varrho \in \mathbb{R}$, kde $\tau \in \Omega$. Potom platí:*

- *Jestliže $\varrho < -1$, potom $\sum_{j=k}^{\infty} y_j \Delta\tau_j \sim \tau_k y_k/(-\varrho - 1)$ pro $k \to \infty$; řada je konvergentní.*
- *Jestliže $\varrho > -1$, potom $\sum_{j=1}^{k-1} y_j \Delta\tau_j \sim \tau_k y_k/(\varrho + 1)$ pro $k \to \infty$; řada je divergentní.*

Je důležité poznamenat, jak jsou analogie pro zobecněnou diskrétní variaci odvozeny. Jsou založeny na odpovídajících tvrzeních teorie regulární variace na časových škálách za podmínky $\mu(t) = o(t)$ pro $t \to \infty$, a to prostřednictvím následujícího vztahu. Nechť $\tau \in \Omega$ a $\mathbb{T} = \tau(\mathbb{N})$. Potom platí

$$y \in (\mathcal{N})\mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\varrho), \text{ právě když } y \circ \tau^{-1} \in (\mathcal{N})\mathcal{RV}_{\mathbb{T}}(\varrho), \tag{27}$$

kde τ^{-1} je inverze k τ. Poznamenejme, že podmínka definující množinu Ω, tj. $\tau_k \sim \tau_{k+1}$ pro $k \to \infty$, přesně odpovídá podmínce $\mu(t) = o(t)$ pro $t \to \infty$.

Zobecněná diskrétní regulární variace byla zavedena primárně pro účely vyšetřování asymptotiky diferenčních rovnic v různých obecných či nějakým způsobem kritických situacích. Všimněme si, jak zde pomáhá teorie obecných časových škál. Totiž „nepříjemná“ situace v klasickém diferenčním případě je přetransformována na jinou časovou škálu, kde lze pohodlně využít již existujících výsledků. My zde však ukážeme souvislost s jiným tématem než s rovnicemi, diskutujeme ji v následující kapitole.

16. Konvergenční testy pro nekonečné řady

Pozorný čtenář si možná povšiml, že výraz z definice diskrétní regulární variace

$$\lim_{k\to\infty} k \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} - 1 \right)$$

je přesně výrazem známým z *Raabeho kritéria* (které lze použít v případě, kdy selhává podílové kritérium). Lze tedy na diskrétní regulární variaci nahlížet i optikou konvergenčních kritérií nekonečných řad. Diskrétní Karamatova věta nám (jako vedlejší produkt) udává podmínku na konvergenci, resp. divergenci řady sestavené z posloupnosti

$u \in \mathcal{NRV}_{\mathbb{Z}}(\varrho)$. Pro $\varrho > -1$ řada konverguje, pro $\varrho < -1$ řada konverguje. Karamatova věta navíc říká, jak lze „asymptoticky zjednodušit“ řady splňující Raabeho kritérium. Reprezentační věta zase říká, jak vypadají posloupnosti splňující Raabeho kritérium. Viz též [19] pro diskuzi o variantách Raabeho kritéria v kontextu regulární variace.

Existují mnohá vylepšení Raabeho testu, která dokážou detekovat konvergenci řad s kladnými členy v případě, kdy předchozí kritérium selhává. Např. *Bertrandovo kritérium* má tuto podobu

$$\lim_{k\to\infty} \ln k \left[1 - k\left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\right]. \tag{28}$$

Nejobecnějším testem v tomto smyslu je tzv. *Kummerovo kritérium*, viz např. [50], jehož limitní verze vypadá takto: Nechť existuje kladná posloupnost $\{\beta_k\}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} \beta_k = \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\beta_k$ diverguje a limita

$$\vartheta := \lim_{k\to\infty} \left(\beta_k - \frac{u_{k+1}}{u_k}\beta_{k+1}\right) \tag{29}$$

existuje. Jestliže $\varrho > 0$ [$\varrho < 0$], potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konverguje [diverguje]. V případě $\varrho = 0$ může řada konvergovat i divergovat.

Nyní se vraťme ke zobecněné diskrétní regulární variaci z předchozí kapitoly. Z věty 8 plyne následující kritérium. Nechť $\tau \in \Omega$ a

$$u/\Delta\tau \in \mathcal{NRV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\gamma). \tag{30}$$

Jestliže $\gamma < -1$ [$\gamma > -1$], potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konverguje [diverguje].

Následující věta (odvozená v [44]) ukazuje, že právě uvedené tvrzení není ničím jiným než Kummerovým testem.

Věta 9. *Nechť u je kladná posloupnost.*

- *Nechť u splňuje Kummerovo kritérium* (29)*. Potom u splňuje podmínku* (30)*, kde $\gamma = -\vartheta - 1$ a $\tau_k = \prod_{j=1}^{k-1}(1 + 1/\beta_j) \in \Omega$.*
- *Nechť u splňuje podmínku* (30)*, kde $\gamma = -\vartheta - 1$ a $\tau \in \Omega$. Potom u splňuje Kummerovo kritérium* (29)*, kde $\beta = \tau/\Delta\tau$, $\lim_{k\to\infty} \beta_k = \infty$ a $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\beta_k$ diverguje.*

Díky větě 9 je vlastně nalezen nový důkaz nejobecnějšího kritéria, který využívá teorie regulární variace a kalkulu na časových škálách (viz větu 8 a vztah (27)). Jako bonus – díky zasazení do rámce regulární variace – dostáváme z příslušné Karamatovy věty (věta 8) asymptotické formule pro řady splňující Kummerovo kritérium. Z příslušné reprezentační věty zobecněné diskrétní Karamatovy teorie lze pak obdržet tvar posloupností, které splňují Kummerovo kritérium. Ještě poznamenejme, že např. volbou $\tau_k = \sum_{j=1}^{k} 1/j$ v podmínce (30) obdržíme Bertrandovo kritérium (28).

Na úplný závěr popišme ještě jednu zajímavou souvislost. Teorii zobecněné diskrétní regulární variace jsme vybudovali pro τ, která patří do množiny Ω. Lze ji však bez obtíží vybudovat i pro $\tau_k = q^k$, $q > 1$. V tomto případě skutečně neplatí $\tau_{k+1} \sim \tau_k$ pro $k \to \infty$. Nicméně, rozšíříme-li definici (26) i pro tuto volbu, ukáže se, že $y \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\varrho)$, kde $\tau_k = q^k$, vlastně znamená $y \circ \tau^{-1} \in \mathcal{RV}_q(\varrho)$, tedy dostáváme se ke q-regulární variaci. Pro tato τ se podmínka $u/\Delta\tau \in \mathcal{NRV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(-\vartheta - 1)$ redukuje na

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = q^{-\vartheta}$$

a dostáváme tak nejjednoduššího bratříčka výše zmíněných testů, tedy podílové kritérium.

Poděkování. Článek byl podpořen grantem GA20-11846S Grantové agentury České republiky. Autor děkuje doc. Mgr. Zuzaně Hübnerové, Ph.D., doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D., a doc. RNDr. Petru Stehlíkovi, Ph.D., za cenné připomínky, které přispěly k vylepšení textu.

L i t e r a t u r a

[1] Appleby, J. A. D., Patterson, D. D.: *On necessary and sufficient conditions for preserving convergence rates to equilibrium in deterministically and stochastically perturbed differential equations with regularly varying nonlinearity.* Recent advances in delay differential and difference equations, 1–85, 94, Springer, Cham, 2014.

[2] Avakumović, V. G.: *Sur l'équation différentielle de Thomas–Fermi.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 1 (1947), 101–113.

[3] Bingham, N. H., Goldie, C. M., Teugels, J. L.: *Regular variation.* Cambridge Univ. Press, 1987.

[4] Bingham, N. H.: *Regular variation in probability theory.* Publ. Inst. Math. 48 (1990), 169–180.

[5] Bingham, N. H.: *Regular variation and probability: the early years.* J. Comput. Appl. Math. 200 (2007), 357–363.

[6] Bingham, N. H.: *On scaling and regular variation.* Publ. Inst. Math. 97 (2015), 161–174.

[7] Bingham, N. H., Ostaszewski, A. J.: *Extremes and regular variation.* Progr. Probab. 78 (2021), 121–137.

[8] Bohner, M., Peterson, A. C.: *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications.* Birkhäuser, Boston, 2001.

[9] Bojanić, R., Seneta, E.: *A unified theory of regularly varying sequences.* Math. Z. 134 (1973), 91–106.

[10] de Bruijn, N. G., van Lint, J. H.: *Incomplete sums of multiplicative functions I, II.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 67, Indag. Math. 26 (1964), 339–347, 348–359.

[11] Delange, H.: *Théoremes taubériens et applications arithmétiques.* Mém. Soc. Roy. Sci. Liege 16 (1955), 87 pp.

[12] Evtukhov, V. M., Samoilenko, A. M.: *Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities* (Russian). Differ. Uravn. 47 (2011), 628–650; translation in Differ. Equ. 47 (2011), 627–649.

[13] Feller, W.: *An introduction to probability theory and its applications, Vol. II.* Second edition, John Wiley, New York–London–Sydney, 1971.

[14] Galambos, J., Seneta, E.: *Regularly varying sequences.* Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), 110–116.

[15] Geluk, J. L.: *On slowly varying solutions of the linear second order differential equation*. Publ. Inst. Math. 48 (1990), 52–60.

[16] Geluk, J. L., de Haan, L.: *Regular variation, extensions and Tauberian theorems*. CWI Tract 40, Amsterdam, 1987.

[17] de Haan, L.: *On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes*. Mathematical Centre Tracts 32, Amsterdam, 1970.

[18] de Haan, L., Ferreira, A.: *Extreme value theory. An introduction*. Springer, New York, 2006.

[19] Hammond, C. N. B., Omey, E.: *Regular variation and Raabe*. Dostupné z arXiv:1808.01898v1 (2018).

[20] Hardy, G. H.: *Orders of infinity. The Infinitärcalcül of Paul du Bois-Reymond*. Reprint of the 1910 edition, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 12. Hafner Publishing Co., New York, 1971.

[21] Jaroš, J., Kusano, T., Tanigawa, T.: *Nonoscillatory half-linear differential equations and generalized Karamata functions*. Nonlinear Anal. 64 (2006), 762–787.

[22] Jessen, A. H., Mikosch, T.: *Regularly varying functions*. Publ. Inst. Math. 80 (2006), 171–192.

[23] Karamata, J.: *Über die Hardy–Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes*. Math. Z. 32 (1930), 319–320.

[24] Karamata, J.: *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*. Mathematica (Cluj) 4 (1930), 38–53.

[25] Karamata, J.: *Sur un mode de croissance régulière, Théorèmes fondamentaux*. Bull. Soc. Math. France 61 (1933), 55–62.

[26] Kohlbecker, E. E.: *Weak asymptotic properties of partitions*. Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958), 346–365.

[27] Korevaar, J.: *Tauberian theory. A century of developments*. Springer, Berlin, 2004.

[28] Korevaar, J., van Aardenne-Ehrenfest, T., de Bruijn, N. G.: *A note on slowly oscillating functions*. Nieuw Arch. Wiskd. 23 (1949), 77–86.

[29] Landau, E.: *Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques*. Bull. Acad. R. Belgique (1911), 443–472.

[30] Marić, V.: *Regular variation and differential equations*. Lecture Notes in Mathematics 1726, Springer, 2000.

[31] Marić, V.: *Jovan Karamata (1902–1967)*. Mat. Vesnik 54 (2002), 45–51.

[32] Marić, V., Tomić, M.: *A classification of solutions of second order linear differential equations by means of regularly varying functions*. Publ. Inst. Math. 48 (1990), 199–207.

[33] Matucci, S., Řehák, P.: *Extremal solutions to a system of n nonlinear differential equations and regularly varying functions*. Math. Nachr. 288 (2015), 1413–1430.

[34] Mijajlović, Ž., Pejović, N., Šegan, S., Damljanović, G.: *On asymptotic solutions of Friedmann equations*. Appl. Math. Comput. 219 (2012), 1273–1286.

[35] Nair, J., Wierman, A., Zwart, B.: *The fundamentals of heavy tails: Properties, emergence, and estimation*. Cambridge University Press, 2022.

[36] Newman, M. E. J.: *Power laws, Pareto distributions and Zipf's law*. Contemp. Phys. 46 (2005), 323–351.

[37] Niethammer, B., Pego, R. L.: *Non-self-similar behavior in the LSW theory of Ostwald ripening.* J. Stat. Phys. 95 (1999), 867–902.

[38] Nikolić, A.: *Karamata functions and differential equations: achievements from the 20th century.* Historia Math. 45 (2018), 277–299.

[39] Pólya, G.: *Über eine neue Weise, bestimmte Integrale in der analytischen Zahlentheorie zu gebrauchen.* Göttinger Nachr. (1917), 149–159.

[40] Rădulescu, V.: *Singular phenomena in nonlinear elliptic problems: from blow-up boundary solutions to equations with singular nonlinearities.* Handbook of differential equations: stationary partial differential equations, Vol. IV, 485–593, Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 2007.

[41] Resnick, S. I.: *Extreme values, regular variation and point processes.* Springer, 2008.

[42] Řehák, P.: *Nonlinear differential equations in the framework of regular variation.* AMathNet, 2014. Dostupné z: `http://users.math.cas.cz/~rehak/ndefrv`

[43] Řehák, P.: *Refined discrete regular variation and its applications.* Math. Meth. Appl. Sci. 42 (2019), 1–12.

[44] Řehák, P.: *Kummer test and regular variation.* Monatsh. Math. 192 (2020), 419–426.

[45] Řehák, P., Vítovec, J.: *Regular variation on measure chains.* Nonlinear Anal. 72 (2010), 439–448.

[46] Saari, D. G.: *Collisions, rings, and other Newtonian N-body problems.* CBMS American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[47] Seneta, E.: *Regularly varying functions.* Lecture Notes in Mathematics 508, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

[48] Shaposhnikov, E., Kengo, S.: *Asymptotic scale invariance and its consequences.* Phys. Rev. D 99 (2019), 103528.

[49] Tomić, M.: *Jovan Karamata (1902–1967). The 100th anniversary of the birthday of Academician Jovan Karamata.* Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math. 26 (2001), 1–30.

[50] Tong, J. C.: *Kummer's test gives characterizations for convergence or divergence of all positive series.* Amer. Math. Monthly 101 (1994), 450–452.

[51] Zygmund, A.: *Trigonometric series, Vol. I, II.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.