

Rozhledy matematicko-fyzikální

Martina Škorpilová
Válcové sloupky tesané z hranolu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 1, 15–24

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153136>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



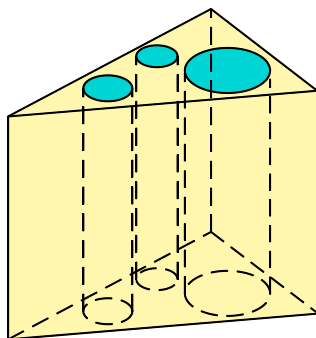
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Válcové sloupy tesané z hranolu

Martina Škorpilová, MFF UK Praha

Na začátku třicátých let 18. století se v italské vesnici Ala neda-leko známého jezera Lago di Garda narodil Giovanni Francesco Malfatti (26. září 1731 – 9. říjen 1807; též nazývaný Gian Francesco Malfatti či Gianfrancesco Malfatti). Později se stal výraznou osobností italské mate-matické komunity. Byl například jedním ze zakladatelů *Società Italiana delle Scienze* a od roku 1771 byl profesorem na univerzitě ve Ferrare. V tomto středověkém, na severovýchodě Itálie ležícím městě, jehož his-torické centrum patří mezi světové bohatství UNESCO a jehož univerzita byla založena již v roce 1391, také krátce po svých sedmdesátých šestých narozeninách zemřel.

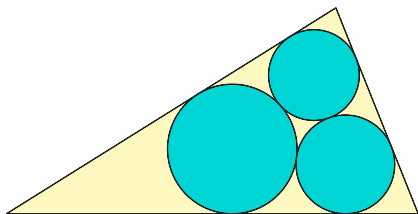
Čtyři roky před svou smrtí, tj. v roce 1803, předložil v [4] následující geometrický problém (odborně se zabýval i pravděpodobností, mecha-nikou či algebrou). Přemýšlel, jak z kolmého trojbokého hranolu, který je například z mramoru, vytesat tři válcové sloupky takovým způsobem, aby odpad byl co nejmenší. Výška sloupů je přitom stejná jako výška hranolu, tj. osy sloupů jsou rovnoběžné s bočními hranami hranolu.



Obr. 1

Je zřejmé, že na obr. 1 je znázorněna situace, v níž je odpad zbytečně objemný. Požadavek na minimální odpad je ekvivalentní s požadavkem na maximální součet objemů válců. Vzhledem k tomu, že výška válců je pevně daná, je součet objemů válců závislý pouze na jejich kruhových

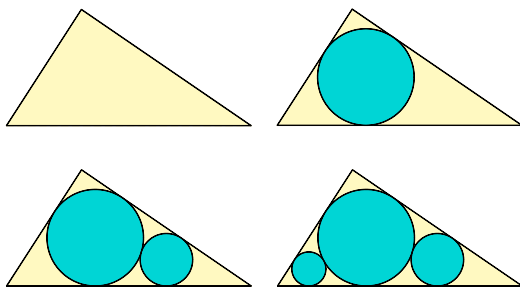
podstavách. Celý problém se tedy redukuje na planimetrickou úlohu: *Jak pro daný trojúhelník nalézt tři kruhy, které náležejí trojúhelníku, nepřekrývají se a součet jejich obsahů je co největší?* Giovanni Francesco Malfatti se domníval, že řešení této otázky, kterou dnes nazýváme *Malfattiho problém* či *Malfattiho mramorový problém*, je následující: sestrojíme tři kruhy, z nichž se každý dotýká zbývajících dvou a současně se dotýká dvou stran daného trojúhelníku (obr. 2). Trojice kruhů těchto vlastností je označována jako tzv. *Malfattiho kruhy*.



Obr. 2

Upozorníme, že Malfattiho problémem se někdy rozumí také nalezení postupu, jak kruhy, které navrhl Malfatti, sestrojít. Konstrukci Malfattiho kruhů představil roku 1826 švýcarský matematik Jakob Steiner (1796–1863) v práci [5] a trvalo několik desítek let, než se ji podařilo plně odůvodnit.

Co kdybychom však kruhové podstavy válců našli jiným způsobem? Sestrojme nejprve kruh jediný, a to takový, který náleží trojúhelníku a má co největší obsah (obr. 3).



Obr. 3

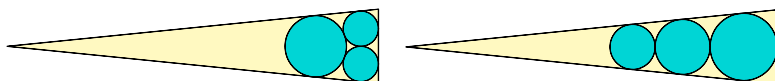
Jedná se samozřejmě o kruh, jehož hraniční kružnicí je kružnice vepsaná trojúhelníku. Dále sestrojme druhý kruh, který také náleží trojúhelníku, nepřekrývá se s prvním kruhem a má opět co největší obsah.

A nakonec sestrojme třetí kruh náležící trojúhelníku s co možná největším obsahem, který se nepřekrývá s žádným ze dvou dosud zkonstruovaných trojúhelníků.

Tento proces, při němž postupně vybíráme v jistém slova smyslu nejlepší prvek (zde kruh s největším obsahem), se nazývá *hladový algoritmus*.

Je zcela přirozené se ptát, zda kruhy sestrojené hladovým algoritmem nepokrývají větší plochu daného trojúhelníku než Malfattiho kruhy, tj. zda Malfattiho přístup je skutečně řešením Malfattiho problému.

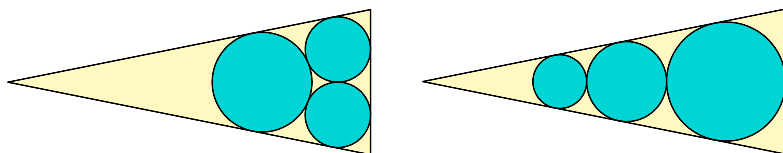
Narýsujeme obě trojice kruhů pro týž trojúhelník. Začneme rovnoramenným trojúhelníkem, jehož základna je vzhledem k jeho ramenům relativně krátká (obr. 4).



Obr. 4

Na první pohled je zřejmé, že v tomto případě je hladový algoritmus výhodnější. (Pro uvedený trojúhelník pokrývají Malfattiho kruhy přibližně 36 % jeho plochy, zatímco kruhy sestrojené hladovým algoritmem takřka 55 % jeho plochy.)

Zvětšeme nyní poměr délky základny ku délce ramena rovnoramenného trojúhelníku tak, aby tento poměr byl stále menší než 1. Pokud uvažujeme například trojúhelník na obr. 5, je odpověď stále zřejmá na první pohled. I zde vítězí hladový algoritmus! (Malfattiho kruhy pokrývají přibližně 55 % plochy trojúhelníku, v případě hladového algoritmu takřka 70 %.)

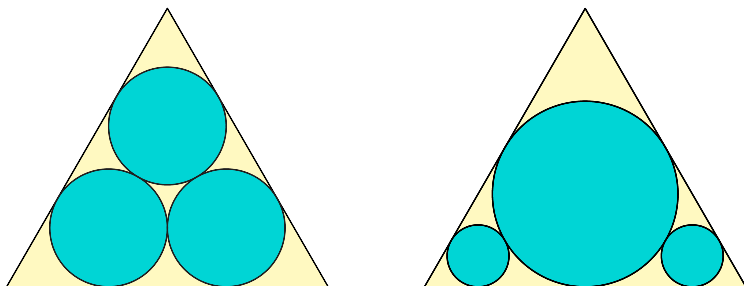


Obr. 5

Zdá se, že čím větší je poměr délky základny ku délce ramena rovnoramenného trojúhelníku, přičemž délka základny je stále menší než délka ramena, tím se obsah plochy trojúhelníku pokryté Malfattiho kruhy přibližuje obsahu plochy pokryté kruhy, které jsou sestrojené hladovým

algoritmem. Jak to tedy dopadne pro rovnostranný trojúhelník, tj. pro případ, v němž je uvažovaný poměr roven 1? Zvítězí nyní konečně Malfattiho kruhy, nebo ne? Nebo snad skončí „souboj“ plichtou?

Podíváme-li se na příslušné obrázky pro rovnostranný trojúhelník, málokdo si troufne se stoprocentní jistotou tvrdit, který postup je výhodnější (obr. 6). V tomto případě je nutné součty obsahů obou trojic kruhů vypočítat a poté porovnat.



Obr. 6

K rozhodnutí o vítězi mohou přispět některé z úloh, které vypočítáte, budete-li řešit níže uvedené sudoku. Konkrétně se jedná o úlohy g) a p). Pokud chcete určit i to, kolik procent plochy trojúhelníku každá z trojic kruhů pokrývá, využijte navíc příklad b). K výsledkům úloh g), p) a b) vás přitom postupně navádí řešení většiny dalších úloh, které sudoku zahrnuje. Vypočítáte-li i zbývající příklady, můžete ho doplnit celé.

Jste-li příliš netrpěliví a chcete-li znát řešení Malfattiho problému ihned (nebo zkrátka jen nejste příznivcem řešení sudoku), úlohy přeskočte a pokračujte v četbě na straně 23.

Sudoku

Řešte následující sudoku, znáte-li hodnoty pouze v jedenácti políčkách a hodnoty v některých dalších políčkách je nutné určit následujícím způsobem.

V jednotlivých úlohách doplňte do věty či souvětí jednu ze tří nabízených možností tak, aby výsledné tvrzení bylo pravdivým výrokem. Poté se podívejte, jaké přirozené číslo n , $1 \leq n \leq 9$, je napsáno v rámečku u Vámi vybrané možnosti. Toto číslo vepište do příslušného políčka sudoku (hodnota v políčku označeném písmenem a je rovna číslu, které je v rámečku u správné odpovědi v úloze a apod.).

Součástí sudoku jsou tři obrázky. U každé úlohy je uvedeno číslo obrázku, k němuž se výpočet vztahuje. Trojúhelníky ABC na obr. 7 a 8 jsou rovnostranné a délka jejich stran je rovna jednotce. Na obr. 7 a 9 jsou Malfattiho kruhy, na obr. 8 jsou kruhy sestavené hladovým algoritmem.

Při řešení používejte pouze psací potřeby a papír. Nepoužívejte tedy – kromě kalkulačky apod. – ani pravítko.

Pod zadáním poslední úlohy je uvedeno několik nápověd pro případ, že byste si s některou úlohou neporadili.

Jste-li učitelem matematiky a chcete-li dát sudoku luštit svým studentům, je možné si pro výuku vhodně upravené sudoku (s odstraněným stránkováním; s číslování obrázků od 1 apod.) stáhnout na webové stránce [6].

		a	2	b				
c	d	5			e			
f							g	h
i	j	k					1	
5	l				1		m	
						n	5	
9	7							6
		o		9	p	8		q

a) (obr. 7). Délka libovolné výšky rovnostranného trojúhelníku ABC je

$$\boxed{1} \quad \frac{1}{2}, \quad \boxed{9} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \boxed{5} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

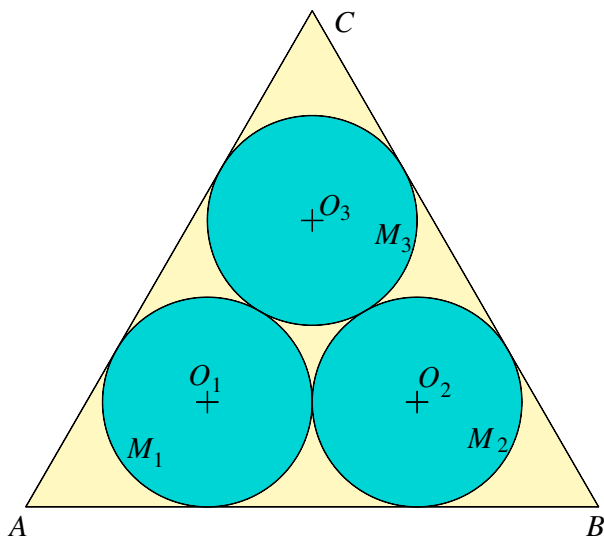
b) (obr. 7). Obsah rovnostranného trojúhelníku ABC je

$$\boxed{4} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \boxed{5} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \boxed{7} \quad \frac{1}{4}.$$

c) (obr. 7). Je-li rovnostranný trojúhelník ABC umístěn v souřadnicovém systému tak, že $A[0, 0]$, $B[1, 0]$ a y -ová souřadnice bodu C je

kladná, potom má ťžišť trojúhelníku ABC souřadnice

$$\boxed{2} \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right], \quad \boxed{3} \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right], \quad \boxed{4} \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right].$$



Obr. 7

d) (obr. 7). Je-li rovnostranný trojúhelník ABC umístěn v souřadnicovém systému tak, že $A[0, 0]$, $B[1, 0]$ a y -ová souřadnice bodu C je kladná, potom x -ová souřadnice středu O_1 kruhu M_1 je

$$\boxed{1} \quad \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \quad \boxed{6} \quad \frac{2 - \sqrt{2}}{3}, \quad \boxed{9} \quad \frac{3 + \sqrt{3}}{4}.$$

e) (obr. 7). Poloměr kruhu M_1 je

$$\boxed{2} \quad \frac{\sqrt{2} - 3}{4}, \quad \boxed{3} \quad \frac{\sqrt{3} - 2}{4}, \quad \boxed{7} \quad \frac{\sqrt{3} - 1}{4}.$$

f) (obr. 7). Obsah kruhu M_1 je

$$\boxed{1} \quad \pi \cdot \frac{11 - 6 \cdot \sqrt{2}}{16}, \quad \boxed{6} \quad \pi \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{8}, \quad \boxed{2} \quad \pi \cdot \frac{4 - \sqrt{3}}{16}.$$

g) (obr. 7). Součet obsahů kruhů M_1 , M_2 , M_3 je

7 $3\pi \cdot \frac{11 - 6 \cdot \sqrt{2}}{16},$

8 $3\pi \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{8},$

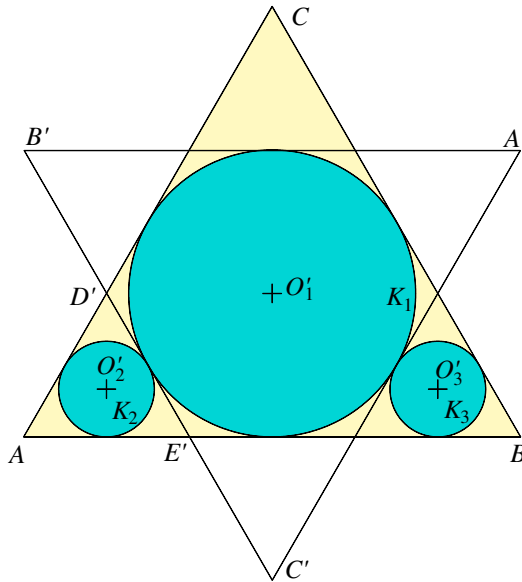
2 $3\pi \cdot \frac{4 - \sqrt{3}}{16}.$

h) (obr. 8). Je-li rovnostranný trojúhelník ABC umístěn v souřadnicovém systému tak, že $A[0, 0]$, $B[1, 0]$ a y -ová souřadnice bodu C je kladná, potom x -ová souřadnice středu O'_1 kruhu K_1 je

4 $\frac{1}{2},$

1 $\frac{2}{3},$

9 $\frac{1}{3}.$



Obr. 8

i) (obr. 8). Poloměr kruhu K_1 je

3 $\frac{\sqrt{3}}{6},$

2 $\frac{\sqrt{2}}{8},$

8 $\frac{\sqrt{3}}{9}.$

j) (obr. 8). Obsah kruhu K_1 je

2 $\frac{\pi}{27},$

4 $\frac{\pi}{12},$

7 $\frac{3\pi}{64}.$

k) (obr. 8). Je-li trojúhelník $A'B'C'$ obrazem rovnostranného trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti se středem O'_1 a jsou-li body D' , E' průsečíky úsečky $B'C'$ po řadě se stranami AC , AB trojúhelníku ABC , potom je trojúhelník $AE'D'$ obrazem trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem

$$\boxed{2} \quad 1, \quad \boxed{7} \quad \frac{1}{2}, \quad \boxed{6} \quad \frac{1}{3}.$$

l) (obr. 8). Je-li rovnostranný trojúhelník ABC umístěn v souřadnicovém systému tak, že $A[0, 0]$, $B[1, 0]$ a y -ová souřadnice bodu C je kladná, potom x -ová souřadnice středu O'_2 kruhu K_2 je

$$\boxed{9} \quad \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \boxed{8} \quad \frac{1}{6}, \quad \boxed{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

m) (obr. 8). Poloměr kruhu K_2 je

$$\boxed{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{18}, \quad \boxed{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad \boxed{9} \quad \frac{\sqrt{2}}{9}.$$

n) (obr. 8). Vzdálenost $|O'_1O'_2|$ středů O'_1 , O'_2 kruhů K_1 , K_2 je

$$\boxed{2} \quad \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad \boxed{7} \quad \frac{2\sqrt{3}}{6}, \quad \boxed{3} \quad \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

o) (obr. 8). Obsah kruhu K_2 je

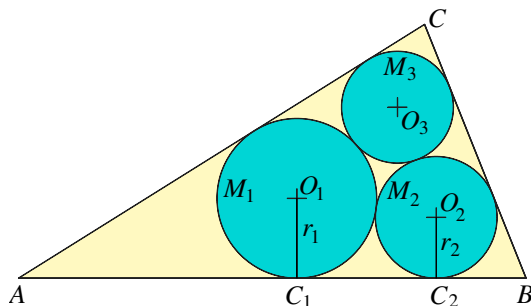
$$\boxed{7} \quad \frac{4\pi}{27}, \quad \boxed{1} \quad \frac{\pi}{18}, \quad \boxed{4} \quad \frac{\pi}{108}.$$

p) (obr. 8). Součet obsahů kruhů K_1 , K_2 , K_3 je

$$\boxed{7} \quad \frac{22\pi}{64}, \quad \boxed{6} \quad \frac{11\pi}{108}, \quad \boxed{2} \quad \frac{11\pi}{64}.$$

q) (obr. 9). Označíme-li r_1 , resp. r_2 poloměr kruhu M_1 , resp. M_2 a dále označíme-li C_1 , resp. C_2 bod dotyku kruhu M_1 , resp. M_2 a strany AB trojúhelníku ABC , potom délka $|C_1C_2|$ úsečky C_1C_2 je

$$\boxed{1} \quad \sqrt{r_1r_2}, \quad \boxed{2} \quad 2\sqrt{r_1r_2}, \quad \boxed{3} \quad 3\sqrt{r_1+r_2}.$$



Obr. 9

Nápovědy

Na bod O_1 na obr. 7 lze nahlížet jako na střed kružnice vepsané trojúhelníku $AS_{AB}C$, kde S_{AB} značí střed strany AB trojúhelníku ABC .

Koeficient stejnolehlosti z úlohy k) lze využít k řešení jiných příkladů.

Vzdálenost bodů C_1, C_2 na obr. 9 je rovna délce odvěsny PO_2 trojúhelníku PO_2O_1 , kde P značí patu kolmice vedené bodem O_2 na úsečku O_1C_1 .

Řešení sudoku

Správné řešení úlohy g) je hodnota u symbolu [8]. Součet obsahů Malfattiho kruhů sestrojených pro rovnostranný trojúhelník, jehož strana má délku rovnou jednotce, je totiž $3\pi \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{8}$, což je přibližně rovno 0,31567.

Správné řešení úlohy p) je uvedeno u symbolu [6], tj. součet obsahů tří kruhů sestrojených hladovým algoritmem je pro tentýž rovnostranný trojúhelník roven $\frac{11\pi}{108}$. Přibližná hodnota tohoto čísla je 0,31998.

Součet obsahů kruhů sestrojených hladovým algoritmem je tedy v porovnání se součtem obsahů Malfattiho kruhů větší i pro rovnostranný trojúhelník! (Pokud správné výsledky úloh g) a p) podělíme obsahem rovnostranného trojúhelníku, tj. správným výsledkem příkladu b), kterým je hodnota $\frac{\sqrt{3}}{4}$ u symbolu [4], zjistíme, že Malfattiho kruhy pokrývají přibližně 72,9 % plochy trojúhelníku, zatímco u kruhů postupně nalezených hladovým algoritmem je to zhruba 73,9 %.)

Ke skutečnosti, že pro rovnostranný trojúhelník je výhodnější hladový algoritmus, dospěli autoři v práci [3] z roku 1930. O třicet sedm let později bylo v článku [2] dokázáno, že hladový algoritmus je výhodnější než Malfattiho přístup pro libovolný trojúhelník. Dvacet sedm let

poté, tedy v roce 1994, se podařilo v textu [7] ověřit, že při hledání trojice kruhů s maximálním součtem obsahů je pro libovolný trojúhelník vždy ze všech metod nejvýhodnější hladový algoritmus. (Více o historii Malfattiho problému viz článek [1].)

^b 7	L	8	^d 9	6	ε	^o 7	5	1
9	7	1	8	7	5	ε	L	6
6	5	^u 8	7	1	L	8	9	7
L	^w 8	7	1	9	6	7	ⁱ 8	5
5	1	6	7	L	8	^r 9	^f 7	[!] 8
8	7	9	ε	5	7	1	6	L
^q 7	³ 8	5	6	ε	1	L	7	^j 9
ε	6	7	^a L	8	9	5	^p 1	^o 7
1	9	L	5	^q 7	7	^v 6	ε	8

Literatura

- [1] Andreatta, M., Bezdek, A., Boroński, J. P.: The problem of Malfatti: Two centuries of debate. *The Mathematical Intelligencer*, roč. 33 (2011), s. 72–76.
- [2] Goldberg, M.: On the original Malfatti problem. *Mathematics Magazine*, roč. 40 (1967), č. 5, s. 241–247.
- [3] Lob, H., Richmond, H. W.: On the solutions of Malfatti's problem for a triangle. *Proceedings of the London Mathematical Society*, roč. 30 (1930), č. 1, s. 287–304.
- [4] Malfatti, G.: Memoria sopra un problema stereotomico. *Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze*, roč. 10 (1803), s. 235–244.
- [5] Steiner, J.: Einige geometrische Betrachtungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, roč. 1 (1826), s. 161–184, s. 252–288.
- [6] Škorpilová, M.: *Webová stránka věnovaná výuce*.
<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~stepanov/vyuka.html>
- [7] Zalgaller, V. A., Los, G. A.: The solution of Malfatti's problem. *Journal of Mathematical Sciences*, roč. 72 (1994), č. 4, s. 3163–3177.