Vlastimil Dlab

Několik slov k zobecnění, a tedy porozumění, Pythagorově větě

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 1, 1–4

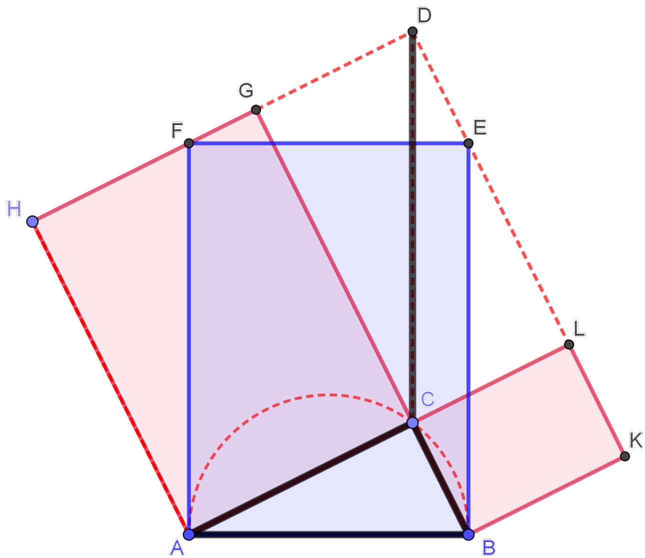
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/153580

Několik slov k zobecnění, a tedy porozumění, Pythagorově větě

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

V této krátké poznámce, adresované školám, odhalíme kořeny tvrzení, známé pod jménem Pythagorova věta.[1)] Té je pozorně věnován článek [1].

Tento příspěvek začněme dvěma obrázky. První z nich zobrazuje a dokazuje pythagorejské tvrzení pro podobné obdélníky.

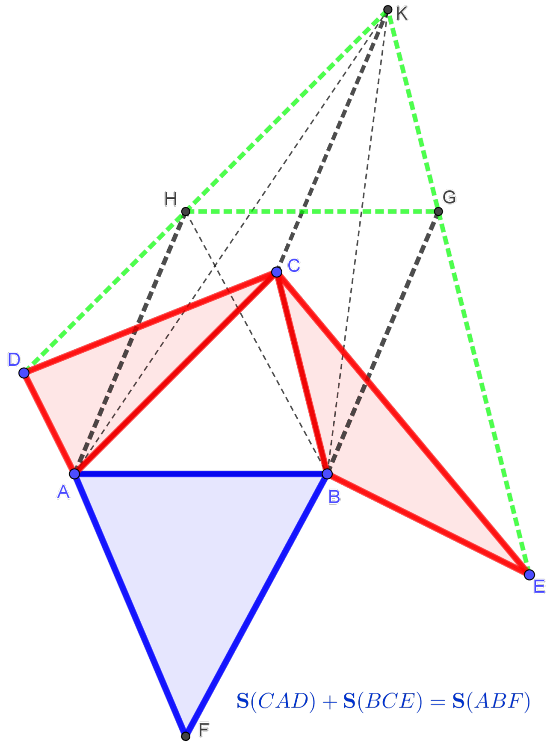


$\mathbf{S}(ACGH) + \mathbf{S}(CBKL) = \mathbf{S}(ABEF)$

Obr. 1

Toto tvrzení je dále zobecněno a znázorněno na druhém obrázku pro zcela libovolné trojúhelníky.

[1)] Pythagoras ze Samu žil v 6. století př. n. l. Pythagorova věta byla známa, alespoň v konkrétní formě, už o řadu století dříve v Babylonii, Egyptě, Číně a Indii.



Obr. 2

1. První obrázek je určen volbou bodů A, B, C a D, tj. volbou pravoúhlého trojúhelníku ABC a kolmicí k základně AB vedenou z bodu C. úsečky DH a DK jsou rovnoběžné s odvěsnami trojúhelníku ABC a strany obdélníků $ACGH$ a $CBKL$ obdržíme prodloužením odvěsen a konstrukcí jejich protilehlých rovnoběžných stran. Využijeme též kolmosti úseček. Tak např. z toho, že úsečka AF je kolmá na úsečku AB a AH je kolmá na AC, plyne, že $|\sphericalangle HAF| = |\sphericalangle CAB|$ a že tedy trojúhelníky ABC a AFH jsou podobné. Stejným způsobem zjistíme, že trojúhelníky AFH, EBK, DCL a CDG jsou shodné. Též trojúhelníky ABC a FED jsou shodné a jsou podobné trojúhelníku AFH.

Z předešlých tvrzení vyplývají rovnosti pro poměry délek úseček

$$\frac{|AH|}{|AF|} = \frac{|AC|}{|AB|}, \quad \text{tj.} \quad \frac{|AC|}{|AH|} = \frac{|AB|}{|AF|},$$

a tedy obdélníky $ACGH$ a $ABEF$ jsou podobné. Analogicky

$$\frac{|BK|}{|BE|} = \frac{|BC|}{|BA|}, \quad \text{tj.} \quad \frac{|BC|}{|BK|} = \frac{|BA|}{|BE|},$$

odkud plyne, že obdélníky $CBKL$ a $ABEF$ jsou podobné.

Tím jsme dokázali první část následujícího tvrzení.

Věta 1. *Obdélníky $ACGH$, $CBKL$ a $ABEF$ na obr. 1 jsou podobné a jejich obsahy jsou svázány pythagorejskou rovností*

$$\mathbf{S}(ABEF) = \mathbf{S}(ACGH) + \mathbf{S}(CBKL).$$

Důkaz druhé části věty je jednoduchý. Uvažujme pětiúhelník $ABEDF$ a tyto jeho části: rovnoběžníky $ACDF$ a $BCDE$ a shodné trojúhelníky ABC a FED. Jelikož obsah rovnoběžníku je dán součinem délky strany a výšky, platí $\mathbf{S}(ACGH) = \mathbf{S}(ACDF)$ a $\mathbf{S}(CBKL) = \mathbf{S}(CBED)$, a tedy

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(ABEF) &= \mathbf{S}(ABC) + \mathbf{S}(ACDF) + \mathbf{S}(CBED) - \mathbf{S}(FED) = \\ &= \mathbf{S}(ACGH) + \mathbf{S}(CBKL).\end{aligned}$$

2. Věta 1 si zasluhuje zobecnění. Jedno takové je zobrazeno na obr. 2, který též naznačuje jednoduchý důkaz. Zde je úsečka DK rovnoběžná se stranou AC a úsečka EK se stranou BC. Stejně dlouhé úsečky CK, AH a BG jsou rovnoběžné. $AFBH$ je rovnoběžník.

Věta 2.[2] *Nechť ABC je libovolný trojúhelník, ACD libovolný trojúhelník sestrojený nad stranou AC a BCE libovolný trojúhelník sestrojený nad stranou BC. Obr. 2 ilustruje rovnost*

$$\mathbf{S}(ABF) = \mathbf{S}(CAD) + \mathbf{S}(BCE).$$

Důkaz je napodobeninou důkazu věty 1:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(ABF) &= \mathbf{S}(BAH) = \frac{1}{2}\mathbf{S}(BAHG) = \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{S}(BAHKG) - \mathbf{S}(GHK)] = \frac{1}{2}[\mathbf{S}(BAHKG) - \mathbf{S}(BAC)] = \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{S}(CAHK) + \mathbf{S}(CBGK)] = \mathbf{S}(CAK) + \mathbf{S}(BCK) = \\ &= \mathbf{S}(CAD) + \mathbf{S}(BCE).\end{aligned}$$

[2] Autorem této věty se ve formulaci s rovnoběžníky udává Pappus z Alexandrie, význačný řecký matematik žijící ve 4. století.

Věta 2 otevírá cestu k řadě tvrzení popisujících speciální případy, kdy trojúhelník ABC je rovnoramenný, rovnostranný či pravoúhlý a trojúhelníky CAD a BCE jsou podobné, shodné či pravoúhlé atd. Vyšetřování takovýchto speciálních případů vzbuzuje u žáků zájem o matematiku. Jednoduchým příkladem zde může být případ, kdy trojúhelník ABC je rovnoramenný a trojúhelníky CAD a BCE jsou podobné. Umíte v tomto případě popsat trojúhelník ABF? Pomůckou při řešení těchto „hříček“ může být odkaz na `https://www.geogebra.org/m/vwqgcef3`.

Literatura

[1] Dlab, V.: *Krátký příběh o obecném tvaru Pythagorovy věty. Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 94 (2019), č. 4, s. 8–15.

Pythagorova K-věta prof. Jiřího Bouchaly

Anguli per animalia

Martina Škorpilová, MFF UK Praha

Mezi základní dovednosti z oblasti planimetrie patří výpočty velikostí úhlů, které se váží k rovinným útvarům. Níže předkládáme tři příklady na procvičení této problematiky, které vyžadují znalost vlastností úhlů příslušejících mnohoúhelníkům.