

Rozhledy matematicko-fyzikální

Luděk Spíchal

Řešení extrémálních úloh podle Fermata

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 1, 8–22

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153584>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2026

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Řešení extrémálních úloh podle Fermata

Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov

Úvod

Hledání extrémů funkcí patří k základním úlohám matematiky s mnoha praktickými aplikacemi. Týkají se možnosti nalezení největší nebo nejmenší hodnoty veličiny, která se mění podle nějakého zákona. Může se jednat o nejkratší cestu, nalezení nejušpornějšího tvaru nádoby, zavedení nejvýhodnějšího výrobního postupu či zajištění největšího možného zisku. Podobné otázky se objevují v celé řadě oborů, jako je např. fyzika, ekonomie, technika nebo přírodní vědy.

Současný přístup k určování maximálních a minimálních hodnot (tedy extrémů funkcí) vychází z vlastností tzv. diferencovatelných funkcí, jejichž graf lze nakreslit jako „hladkou“ plynulou křivku bez ostrých zlomů. Myšlenku se pokusíme přiblížit bez formální definice pojmu derivace, který moderní matematika běžně k určování extrémů využívá.

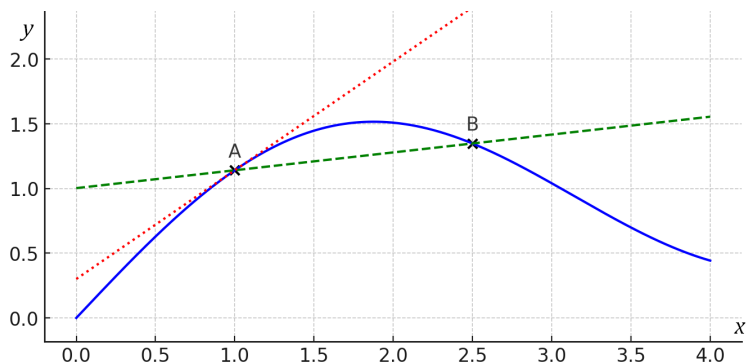
Derivaci si můžeme představit jako okamžitou rychlost změny. V praxi to může vypadat například tak, že u dráhy, kterou urazí auto, představuje derivace dráhy jeho aktuální rychlost. Při sledování hladiny řeky během jarního tání ukazuje derivace, jak rychle hladina stoupá nebo klesá. A pokud sledujeme výšku rostliny během růstu, derivace nám prozradí, jak rychle v daném okamžiku rostlina přirůstá.

Představme si nyní, že vezmeme dva blízké body grafu funkce a spojíme je přímkou, která je sečnou grafu funkce (obr. 1). Průměrnou změnu v určitém úseku (např. průměrnou rychlost mezi body A a B) znázorňuje sklon úsečky, která tyto dva body spojuje. Zapišeme-li rovnici této přímky ve tvaru

$$y = kx + q,$$

pak číslo k (směrnice sečny) udává průměrnou rychlost.

Představme si dále, že budeme bod B postupně přibližovat k bodu A . Při přibližování se sklon sečny postupně mění, až se v určité chvíli ustálí na jisté hodnotě. Přímkou, která se v dané chvíli dotýká grafu funkce právě v jednom bodě, označujeme jako tečnu grafu funkce. Sklon tečny (směrnice tečny) v bodě A udává okamžitou změnu (např. okamžitou rychlost auta), tedy *derivaci*.



Obr. 1: Graf funkce $y = \sin x + 0,3x$ (plná čára), tečna grafu funkce v bodě A (tečkovaná čára) a sečna vedená body A a B (čárkovaná čára)

Lokální maxima a minima (intuitivně vrcholky a údolí grafu funkce) se mohou vyskytnout jen tam, kde je tečna vodorovná, tedy rovnoběžná s osou x a má směrnici (derivaci) nulovou. To je nutná podmínka pro existenci extrému. Nesmíme však zapomenout, že sama o sobě nestačí. Například u funkce $y = x^3$ je derivace v bodě $x = 0$ také nulová, ale graf tam žádný vrchol ani údolí netvoří, zde jde pouze o tzv. inflexní bod¹⁾.

Extremální úlohy svojí podstatou spadají do oblasti kalkulu (diferenciální a integrální počet). Zmíněná oblast matematiky, jejíž počátky se datují do 17. století a pojí se jmény Isaaca Newtona (1642–1727) a Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646–1716), ovšem není obvykle zařazovaná do výuky středoškolské matematiky. Faktem na druhou stranu zůstává, že podobné úlohy zajímaly matematiky již v obdobích před nástupem kalkulu. Metody, které přitom používali, svou náročností nevybočují z rámce středoškolské matematiky a mohou tak být zajímavou ukázkou způsobů uvažování a postupů, které posléze vedly k objevu kalkulu.

Ke známým postavám na tomto poli určitě patří Johannes Kepler (1571–1630), který se zabýval výpočtem objemů těles ve svém díle *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615). V této knize řešil praktický problém odhadování objemů vinných sudů různých tvarů a vyvinul metody, které kalkulu předcházely.

¹⁾Inflexní bod (též bod inflexe nebo bod obratu) je místo na grafu funkce, kde se mění zakřivení křivky – tedy přechod z „vydutého“ (konvexního) tvaru do „vypouklého“ (konkávního) nebo naopak.

Zmiňme v krátkosti způsob, jakým Kepler uvažoval. Tělesa si představoval jako složená z velkého množství malých, jednoduchých částí (například válcových vrstev). Tím předjímal ideu aproximace objemu integrací. Objem odhadoval jako součet objemů těchto jednoduchých částí. Například vinný sud mohl být modelován jako rotace určité křivky, což vyžadovalo výpočet objemu rotačního tělesa. Pro výpočet objemu sudů Kepler experimentoval s měřením jejich výšky a šířky v různých bodech. Srovnával je s objemy známých geometrických těles, jako jsou koule, válce nebo kužele. Při zkoumání tvaru sudů zjistil, že sud má největší objem, pokud jeho šířka v nejužším bodě odpovídá určitému poměru k jeho výšce, což lze považovat za raný příklad extrémní úlohy.

Hlavní část článku se věnuje předvedení postupu hledání extrémů pocházejícího z pera dalšího velikána matematiky, kterým byl francouzský matematik Pierre de Fermat (mezi 1601 a 1607–1665). Po vysvětlení Fermatovy metody budeme řešit několik úloh, které charakterem odpovídají některým problémům řešeným matematiky v daném období (např. v souvislosti s tzv. Keplerovými trojúhelníky). Současně neopomeneme rovněž ponechat některé úlohy pro čtenáře k případnému procvičení.

1. Extrémy podle Fermata

Následující příklad lze vyřešit výhradně použitím středoškolské matematiky. Nám však současně poslouží jako modelový příklad pro představení Fermatovy metody.

Příklad 1. Jakou největší plochu pravoúhelníkového tvaru je možné oplotit pletivem o délce 180 m?

Řešení. Vydeme z obecného obdélníku a prozkoumáme vztah mezi obsahem takového obrazce a rozměry jeho stran. Pro obvod o obdélníku platí $o = 2a + 2b$. Po dosazení známé délky pletiva vyjádříme délku jedné strany

$$b = 90 - a,$$

a dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu obdélníku

$$S = ab = a(90 - a) = 90a - a^2. \quad (1)$$

Získali jsme kvadratickou funkci, která nabývá maximální hodnoty ve vrcholu paraboly. Polohu vrcholu můžeme určit např. doplněním kvadratického dvojčlenu na čtverec

$$S = 90a - a^2 = -(a^2 - 90a + 2025) + 2025 = -(a - 45)^2 + 2025.$$

Optimálním tvarem pro oplocení je vzhledem k zadání úlohy čtverec s délkou strany 45 m, maximální možná velikost oplocené plochy činí 2025 m². Pro úplnost dodejme, že funkce má vzhledem k zadání rovněž dvě minima ($S = 0$), pro $a = 0$ a $a = 90$.

Studenti se znalostí základů kalkulu by pravděpodobně vypočítali derivaci funkce (1) popisující obsah obdélníku²⁾

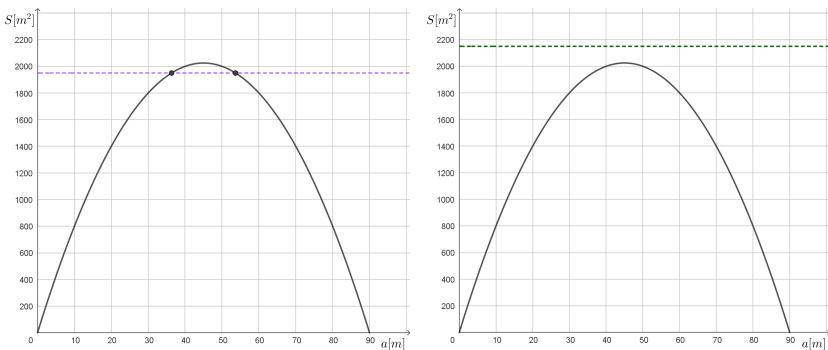
$$S' = 90 - 2a,$$

a položili tuto derivaci rovnu nule, tj.

$$90 - 2a = 0 \rightarrow a = 45.$$

Důvod proč tak činí, byl zmíněn již v úvodní části článku. V extrémních hodnotách (minimum či maximum) je tečna ke grafu funkce rovnoběžná s osou x , tj. její směrnice má hodnotu 0.

Fermat sám pojem derivace funkce neznal, uvědomil si však, že extrémy mají jistou zvláštní vlastnost. Pokud uvažoval např. maximum, pak mu bylo zřejmé, že rovnoběžky s osou x nacházející se pod maximum protnou graf funkce ve dvou bodech. Naopak rovnoběžka s osou x ležící nad maximální hodnotou neprotne graf funkce vůbec (obr. 2).



Obr. 2: Fermatova metoda určení maxima funkce

Z uvedené úvahy pro Fermata vyplynula celkem intuitivní strategie hledání extrému. Nechme rovnoběžku nacházející se pod maximum povolna stoupat. Dva původní průsečíky se budou postupně vzájemně přibližovat, až v místě maxima splynou v jeden bod.

²⁾Použitý symbol S' označuje derivaci funkce obsahu obdélníku S .

Předpokládejme, že pro danou rovnoběžku nacházející se pod maximem se průsečíky objeví ve dvou různých bodech $a = a_1$ a $a = a_2$. Plocha rovnoběžníku v těchto dvou bodech musí být stejná, tj.

$$90a_1 - a_1^2 = 90a_2 - a_2^2.$$

Úpravou rovnosti dostáváme

$$90(a_1 - a_2) = a_1^2 - a_2^2,$$

a dále

$$90(a_1 - a_2) = (a_1 - a_2)(a_1 + a_2).$$

Nyní vydělíme obě strany poslední rovnosti výrazem $a_1 - a_2$

$$90 = a_1 + a_2,$$

což je vzhledem k předpokladu $a_1 \neq a_2$ korektní. Fermat dále předpokládal, že poslední rovnice platí, když se přibližujeme k maximu. Podle Fermatovy představy, kterou popsal v díle *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* z roku 1636, se a_1 a a_2 stávají v maximu tak trochu rovnými, ale ne skutečně rovnými. Při jeho dosažení se pak $a_1 \approx a_2$, tj.

$$2a_1 = 90 \rightarrow a_1 = 45.$$

Zjevný rozpor mezi původním předpokladem, že $a_1 \neq a_2$ a následným položením $a_1 \approx a_2$ Fermat ospravedlnil použitím poněkud mlhavého konceptu „přibližné rovnosti“.³⁾

Kontroverze, týkající se nejasného pojetí infinitezimálních (nekonečně malých) veličin, se ovšem netýkaly pouze Fermatovy metody výpočtu extrémů. Rovněž Newtonovo zacházení s infinitezimálními nelze v moderním smyslu považovat za korektní. Ve svých úvahách zacházel s infinitezimálními veličinami neformálně, podle potřeby buď byly „nekonečně malé“, nebo zcela „mizely“. Přesto jeho přístup vedl k mimořádným objevům a položil základy kalkulu.

Potřebné přesnosti a korektnosti bylo dosaženo zavedením konceptu limity funkce, který se ovšem v matematice objevil až v 1. polovině

³⁾Více o uvedeném Fermatově konceptu viz např. <https://en.wikipedia.org/wiki/Adequality>.

19. století jako důsledek snahy přesně popsat chování funkce v situacích, kde běžné algebraické výpočty nestačí nebo nemají smysl.⁴⁾

Fermat většinou řešil konkrétní geometrické a fyzikální problémy jako je nejkratší doba, největší plocha, maximum součinu apod. Zde se celkem přirozeně očekává, že řešení skutečně představuje největší nebo nejmenší možnou hodnotu. Po nalezení kandidáta extrémní hodnoty Fermat kontroloval, že pro hodnoty o něco menší či větší je funkční hodnota menší (u maxima) či větší (u minima).

Další příklad odkazuje na problémy řešené J. Keplerem.

Příklad 2. Jaký zvolit poměr mezi výškou v a poloměrem r válce tak, aby měl válec pro daný povrch S největší objem V ?

Řešení. Pro objem V a povrch S válce platí

$$V = \pi r^2 v, \quad S = 2\pi r(r + v).$$

Pokud chceme maximalizovat objem válce, pak ze vzorce pro povrch vyjádříme výšku

$$v = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r},$$

a dosadíme do vzorce pro objem válce

$$V = \pi r^2 \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{Sr - 2\pi r^3}{2}.$$

Předpokládejme, že pro danou rovnoběžku nacházející se pod maximum se průsečíky grafu funkce objeví ve dvou různých bodech $r = r_1$ a $r = r_2$. Objem válce v těchto dvou bodech musí být stejný, tj.

$$\frac{Sr_1 - 2\pi r_1^3}{2} = \frac{Sr_2 - 2\pi r_2^3}{2}.$$

Úpravou rovnosti dostáváme

$$Sr_1 - 2\pi r_1^3 = Sr_2 - 2\pi r_2^3,$$

a dále

$$S(r_1 - r_2) - 2\pi(r_1^3 - r_2^3) = 0.$$

⁴⁾Významným způsobem se o zavedení pojmu limity funkce zasloužili Bernard Bolzano (1781–1848), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) a Karl T. W. Weierstrass (1815–1897).

Nyní vydělíme obě strany poslední rovnosti výrazem $r_1 - r_2$ a dostáváme

$$S - 2\pi(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) = 0.$$

Použitím principu „přibližné rovnosti“ $r_1 \approx r_2$ pak dále platí

$$S = 6\pi r_1^2.$$

Porovnáním se vzorcem pro povrch válce dostáváme

$$6\pi r_1^2 = 2\pi r_1(r_1 + v),$$

$$2r_1 = v.$$

Válec o daném povrchu má největší objem, pokud jeho výška je dvojnásobkem poloměru.

Čtenář si může použití Fermatovy metody vyzkoušet na následujícím problému, jehož řešení nalezne v příloze A.

Problém 1. Jaký zvolit poměr mezi výškou válce v a jeho poloměrem r_V tak, aby měl válec vepsaný kouli o daném objemu V_K největší objem V_V ?

2. Extremální úlohy a Keplerovy trojúhelníky

*Keplerův trojúhelník*⁵⁾ je každý pravoúhlý trojúhelník, pro jehož délky stran platí poměr

$$1 : \sqrt{\varphi} : \varphi,$$

kde φ je tzv. *zlatý řez*.

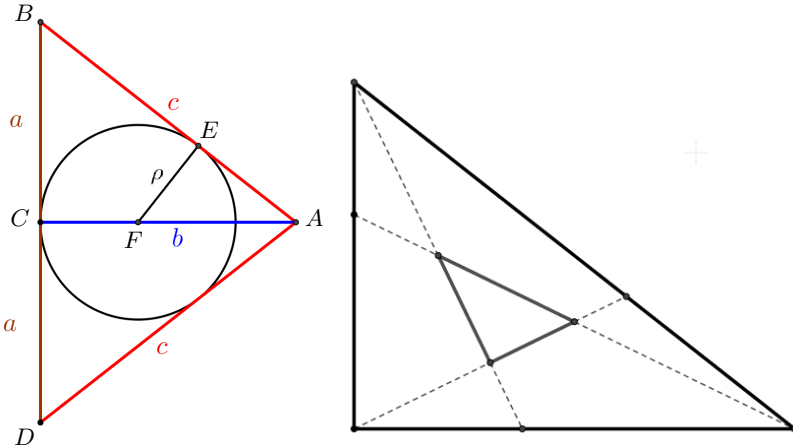
Poznámka. Zlatý řez označuje poměr, kdy se úsečka dělí do dvou částí takovým způsobem, že poměr délky celé úsečky vůči délce její větší části se rovná poměru délky větší části k délce té menší. Číselnou hodnotu zlatého řezu získáme z řešení rovnice

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y},$$

kde x, y ($x > y$) jsou části úsečky o délce $x + y$. Pokud dále položíme $y = 1$, pak po zjednodušení dostáváme rovnici $x^2 - x - 1 = 0$, pro jejíž kořeny platí $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Zlatým řezem (ozn. φ) je kladný kořen $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

⁵⁾Johannes Kepler se o trojúhelnících v roce 1597 zmiňuje v dopise svému učiteli Michaelu Mästlinovi (1550–1631). Průřez Velké pyramidy v Gíze je podle Keplera tvořen rovnoramenným trojúhelníkem složeným ze dvou pravoúhlých trojúhelníků, jejichž strany jsou v poměru $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$. Existují ovšem i starší zmínky o těchto trojúhelnících, např. v knize *Liber mensurationum* perského matematika Abú Bakr al-Karajihó (953–1029) nebo knize *Practica geometriæ* italského matematika Leonarda Pisánského zvaného Fibonacci (okolo 1170–okolo 1240) [4].

Z vlastností těchto trojúhelníků zmiňme, že pokud vezmeme dvě kopie Keplerova trojúhelníku a přiložíme je k sobě druhou nejdelší stranou (obr. 3, vlevo), pak výsledný rovnoramenný trojúhelník má největší poloměr vepsané kružnice ze všech rovnoramenných trojúhelníků s danou délkou ramen.⁶⁾



Obr. 3: Dva Keplerovy trojúhelníky s délkami stran v poměru $a : b : c = 1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$ přiložené druhou nejdelší stranou a vepsaná kružnice o poloměru $\rho = a/\sqrt{2\varphi + 1}$ (vlevo). Keplerův trojúhelník v Keplerově trojúhelníku (vpravo)

Zajímavé tvrzení vycházející z následující konstrukce dokázal Jun v článku [3]. Konstrukce předpokládá, že postupně obejdeme Keplerův trojúhelník proti směru hodinových ručiček a na každou stranu umístíme bod, který stranu rozdělí v poměru zlatého řezu. Tyto body následně spojíme úsečkou s odpovídajícím protilehlým vrcholem. Platí, že trojúhelník tvořený průsečíky těchto úseček je rovněž keplerovský (obr. 3, vpravo).

Keplerovy trojúhelníky jsme popsali jako pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran splňují výše uvedený poměr založený na hodnotě zlatého řezu. V článku se dále zaměříme na trojúhelníky (nikoliv nutně pravoúhlé), jejichž délky stran tvoří po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

⁶⁾ Pro poloměr kružnice vepsané trojúhelníku s obsahem S a stranami délek a, b, c platí $\rho = S/s$, kde $s = (a + b + c)/2$.

Konstruovatelný trojúhelník, jehož délky stran a , aq , aq^2 tvoří geometrickou posloupnost, musí splňovat trojúhelníkovou nerovnost, tj. délky stran musí splňovat soustavu nerovnic

$$\left. \begin{aligned} aq + aq^2 &> a, \\ a + aq^2 &> aq, \\ a + aq &> aq^2, \end{aligned} \right\}$$

kde řešením soustavy je interval

$$q \in \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right),$$

popř. $q \in (1/\varphi, \varphi)$.

Příklad 3. Najděte kvocient q , pro který má kružnice opsaná trojúhelníku se stranami o délkách tvořících geometrickou posloupnost minimální poloměr.

Pro poloměr kružnice opsané trojúhelníku s obsahem S a stranami o délkách a , aq , aq^2 platí⁷⁾

$$r = \frac{a^3 q^3}{4S}.$$

Pro stanovení obsahu trojúhelníku je vzhledem k zadání úlohy nejvhodnější Heronův vzorec

$$S = a^2 \sqrt{\frac{1+q+q^2}{2} \left(\frac{1+q+q^2}{2} - 1 \right) \left(\frac{1+q+q^2}{2} - q \right) \left(\frac{1+q+q^2}{2} - q^2 \right)},$$

a dále po zjednodušení

$$S = \frac{a^2}{4} \sqrt{-q^8 + 2q^6 + q^4 + 2q^2 - 1}.$$

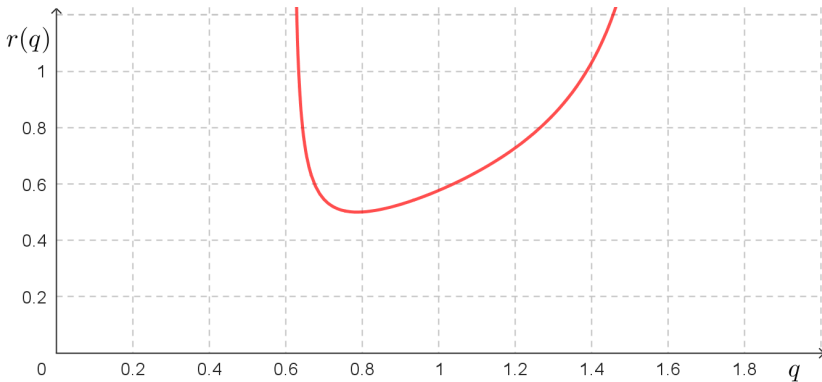
Jestliže bez újmy na obecnosti položíme $a = 1$, pak pro poloměr kružnice opsané trojúhelníku platí

$$r = \frac{q^3}{\sqrt{-q^8 + 2q^6 + q^4 + 2q^2 - 1}}. \quad (2)$$

⁷⁾ Pro poloměr kružnice opsané trojúhelníku s obsahem S a stranami délek a , b , c platí $r = (abc)/(4S)$.

Použitím Geogebry (obr. 3) se můžeme přesvědčit, že funkce určená rovnicí (2) má v intervalu $q \in (1/\varphi, \varphi)$ minimum. Pokud nyní použijeme Fermatovu metodu, pak rovnoběžka s osou x protne graf funkce v bodech $q = q_1$ a $q = q_2$ ($q_1 \neq q_2$), kde $r(q_1) = r(q_2)$, jestliže

$$\frac{q_1^3}{\sqrt{-q_1^8 + 2q_1^6 + q_1^4 + 2q_1^2 - 1}} = \frac{q_2^3}{\sqrt{-q_2^8 + 2q_2^6 + q_2^4 + 2q_2^2 - 1}}.$$



Obr. 4: Graf funkce $r(q) = q^3 / \sqrt{-q^8 + 2q^6 + q^4 + 2q^2 - 1}$ pro $q > 0$

Po zjednodušení dostáváme

$$q_1^8 q_2^6 - q_1^6 q_2^8 + q_1^6 q_2^4 - q_1^4 q_2^6 + 2q_1^6 q_2^2 - 2q_1^2 q_2^6 - (q_1^6 - q_2^6) = 0,$$

a dále

$$q_1^6 q_2^6 (q_1^2 - q_2^2) + q_1^4 q_2^4 (q_1^2 - q_2^2) + 2q_1^2 q_2^2 (q_1^2 - q_2^2)(q_1^2 + q_2^2) - (q_1^2 - q_2^2)(q_1^4 + q_1^2 q_2^2 + q_2^4) = 0.$$

Vzhledem k předpokladu, že $q_1 \neq q_2$ rovnici zkrátíme výrazem $q_1^2 - q_2^2$

$$q_1^6 q_2^6 + q_1^4 q_2^4 + 2q_1^2 q_2^2 (q_1^2 + q_2^2) - (q_1^4 + q_1^2 q_2^2 + q_2^4) = 0,$$

a použitím principu „přibližné rovnosti“, tj. $q_1 \approx q_2$, dále dostáváme

$$q_1^4 (q_1^8 + q_1^4 + 4q_1^2 - 3) = 0.$$

Hledané řešení musí náležet intervalu $(1/\varphi, \varphi)$, zaměříme se dále na rovnici

$$q_1^8 + q_1^4 + 4q_1^2 - 3 = 0. \quad (3)$$

Pokud rovnici upravíme do tvaru

$$q_1^8 + 2q_1^4 + 1 - q_1^4 + 4q_1^2 - 4 = 0,$$

pak dále zřejmě platí

$$(q_1^4 + 1)^2 - (q_1^2 - 2)^2 = 0,$$

nebo také

$$(q_1^4 - q_1^2 + 3)(q_1^4 + q_1^2 - 1) = 0.$$

Rovnici (3) vyhovuje kořen

$$q_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{\varphi}},$$

který je řešením rovnice $q_1^4 + q_1^2 - 1 = 0$. Kružnice opsaná trojúhelníku, jehož strany mají délky tvořící členy geometrické posloupnosti, má nejmenší poloměr, jestliže kvocient geometrické posloupnosti má hodnotu $q = \sqrt{1/\varphi}$.

Řešení následujícího problému čtenář nalezne v příloze B.

Problém 2. Pro jakou hodnotu kvocientu q má trojúhelník, jehož délky stran tvoří geometrickou posloupnost, maximální obsah S ?

V posledním problému se vrátíme na začátek článku, kde jsme zmínili Keplerovy trojúhelníky (obr. 1, vlevo). Řešení problému je uvedeno v příloze C.

Problém 3. Ukažte, že pokud vezmeme dvě kopie Keplerova trojúhelníku a přiložíme je k sobě druhou nejdelsí stranou, pak výsledný rovnoramenný trojúhelník má největší poloměr vepsané kružnice ze všech rovnoramenných trojúhelníků s danou délkou ramen.

Závěr

V článku jsme se pokusili ukázat, že kalkulus jako důležitá oblast matematické analýzy, nevznikl tak říkajíc ve vzduchoprázdnu. I. Newton a G. W. Leibniz jako jeho objevitelé navázali jak na práci řady svých předchůdců, tak na práci některých současníků.

V předchozích částech byli v této souvislosti zmíněni jen někteří, J. Kepler a zejména P. Fermat. Z řady významných matematiků uvedeme ještě další dva, kteří byli Fermatovi současníci a rovněž pomohli vytvořit příznivé podmínky a živnou půdu pro objev kalkulu.

Prvním z nich bude francouzský filosof a matematik René Descartes (1596–1650). Descartesovo jméno si obvykle připomínáme v souvislosti s kartézskou soustavou. Bývá považován za zakladatele analytické geometrie, která spojila algebru a geometrii pomocí kartézských souřadnic. To umožnilo algebraický popis křivek, což je nutný základ pro zavedení derivací a integrálů.

Italského jezuitu a matematika Bonaventuru Cavalieriho (1598–1647) spojujeme s tzv. Cavalieriho principem. Princip je založen na představě, že geometrické objekty (plochy a objemy) se skládají z nekonečně mnoha nekonečně malých částí. Plochy jsou složeny z nekonečně mnoha nekonečně tenkých úseček, objemy tvoří nekonečně mnoho nekonečně tenkých ploch. Podle tohoto principu mají dvě tělesa stejný objem, mají-li stejné velké podstavy i výšky a současně řezy těchto těles rovnoběžné s podstavami a vedené ve stejné vzdálenosti od podstav mají stejné obsahy.

Poděkování. Autor děkuje neznámému recenzentovi za pečlivé přečtení a cenné připomínky k obsahu článku.

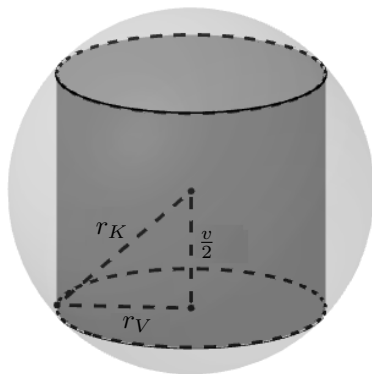
Literatura

- [1] Cadeddu, L., Lai, G.: Maxima and Minima without Derivatives? *The College Mathematics Journal*, roč. 46 (2015), č. 1, s. 15–22.
- [2] Grabiner, J. V.: The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, roč. 56 (1983), č. 4, s. 195–206.
- [3] Jun, Li: Some properties of the Kepler triangle. *The Mathematical Gazette*, roč. 101 (2017), č. 552, s. 494–495.
- [4] Sugimoto, T.: Inducing the symmetries out of the complexity: The Kepler triangle and its kin as a model problem. In: Darvas, G.: *Complex Symmetries*. Birkhäuser, Cham, 2021.
- [5] Strogatz, S.: *Infinite powers. The story of calculus, the language of the universe*. Atlantic Books, Londýn, 2020.

Příloha A

Pro poloměr r_K koule o objemu V_K , délku výšky v a objem V_V vepsaného válce platí (obr. 4)

$$r_K = \sqrt[3]{\frac{3V_K}{4\pi}}, \quad v = 2\sqrt{r_K^2 - r_V^2}, \quad V_V = \pi r_V^2 v.$$



Obr. 5: Válec vepsaný kouli

Dosazením do vzorce pro objem válce dostáváme

$$V_V = 2\pi r_V^2 \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{3V_K}{4\pi}\right)^2} - r_V^2},$$

kde objem vepsaného válce pro daný objem koule závisí pouze na poloměru podstavy válce. Použitím Fermatovy metody $V_V(r_1) = V_V(r_2)$ ($r_1 \neq r_2$) je

$$2\pi r_1^2 \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{3V_K}{4\pi}\right)^2} - r_1^2} = 2\pi r_2^2 \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{3V_K}{4\pi}\right)^2} - r_2^2},$$

a dále po umocnění, zjednodušení, krácení výrazem $r_1^2 - r_2^2$ a zavedení $r_1 \approx r_2$

$$r_1^2 \left(2\sqrt[3]{\left(\frac{3V_K}{4\pi}\right)^2} - 3r_1^2 \right) = 0,$$

kde

$$V_K = \pi r_1^3 \sqrt{6}.$$

Porovnáním se vzorcem pro objem koule dostáváme

$$r_K = r_1 \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Výška v vepsaného válce pak musí být

$$v = 2\sqrt{r_K^2 - r_V^2} = 2\sqrt{\frac{3}{2}r_1^2 - r_1^2} = r_1\sqrt{2}.$$

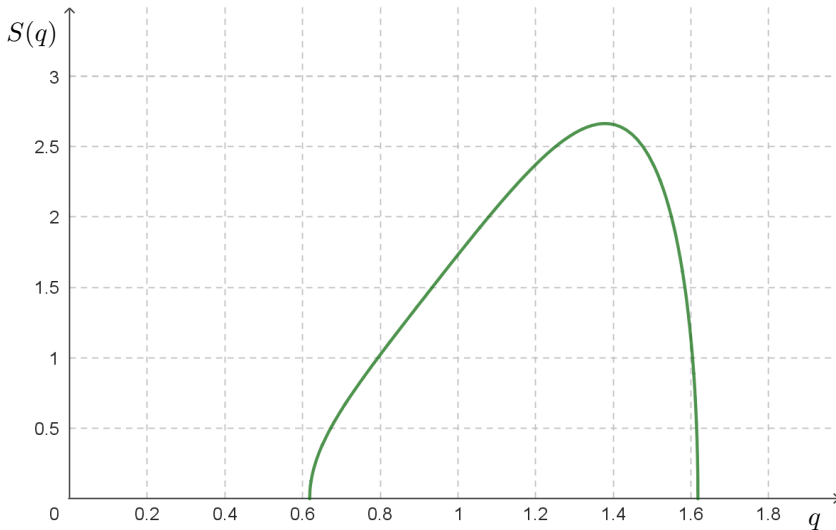
Válec vepsaný kouli o daném objemu má největší objem, když $v/r_V = \sqrt{2}$.

Příloha B

Použitím Geogebra (obr. 5) se můžeme přesvědčit, že funkce

$$S(q) = \sqrt{-q^8 + 2q^6 + q^4 + 2q^2 - 1}$$

má pro $q \in (1/\varphi, \varphi)$ maximum.



Obr. 6: Graf funkce $S(q) = \sqrt{-q^8 + 2q^6 + q^4 + 2q^2 - 1}$ pro $q > 0$

Použitím Fermatovy metody $S(q_1) = S(q_2)$, kde $q_1 \neq q_2$, platí

$$\sqrt{-q_1^8 + 2q_1^6 + q_1^4 + 2q_1^2 - 1} = \sqrt{-q_2^8 + 2q_2^6 + q_2^4 + 2q_2^2 - 1}.$$

Po zjednodušení a zkrácení výrazem $q_1^2 - q_2^2$ dostáváme

$$-q_1^6 - q_2^6 - q_1^2 q_2^4 - q_1^4 q_2^2 + 2q_1^4 + 2q_2^4 + 2q_1^2 q_2^2 + q_1^2 + q_2^2 + 2 = 0,$$

a dále pro $q_1 \approx q_2$

$$2q_1^6 - 3q_1^4 - q_1^2 - 1 = 0.$$

Řešením rovnice, které náleží intervalu $(1/\varphi, \varphi)$, je (např. Wolfram Alpha)

$$q_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt[3]{108 - 3\sqrt{921}} + \sqrt[3]{108 + 3\sqrt{921}}}{6}} \doteq 1,3789.$$

Trojúhelník, jehož strany mají délky tvořící členy geometrické posloupnosti, má největší obsah, jestliže kvocient geometrické posloupnosti má hodnotu $q \doteq 1,3789$.

Příloha C

Pro poloměr vepsané kružnice platí (obr. 1, vlevo)

$$\rho = \frac{S}{s} = \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{c + a}.$$

Použitím Fermatovy metody $\rho(a_1) = \rho(a_2)$, kde $a_1 \neq a_2$, platí

$$\frac{a_1\sqrt{c^2 - a_1^2}}{c + a_1} = \frac{a_2\sqrt{c^2 - a_2^2}}{c + a_2}.$$

Po umocnění a zjednodušení dostáváme

$$a_1^2(c^2 - a_1^2)(c + a_2)^2 = a_2^2(c^2 - a_2^2)(c + a_1)^2,$$

dále

$$a_1^2(c - a_1)(c + a_2) = a_2^2(c - a_2)(c + a_1),$$

a po dalším zjednodušení a využití principu „přibližné rovnosti“ $a_1 \approx a_2$

$$c^2 - a_1c - a_1^2 = 0,$$

kde

$$c_{1,2} = a_1 \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$