

Rozhledy matematicko-fyzikální

Součet prvočísel

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 1, 23–25

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153585>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2026

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Součet prvočísel

Dnešní úloha je převzata ze školního kola soutěže Pangea 2026 pro 9. ročník. Autorem úloh pro 9. ročník je Ing. Jan Matoušek, učitel matematiky na Keplerově gymnáziu.

Možná někteří z vás ví, že prvočísel menších než 100 je 25. Víte ale, kolik je všech prvočísel menších než 1 000? Nebojte, nemusíte je počítat, prozradíme, že je jich 168. Budeme po vás ovšem chtít, abyste vyřešili následující úlohu.

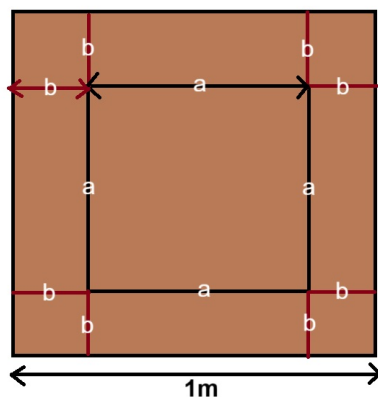
Úloha

Z uvedených možností vyberte správný součet 168 prvočísel menších než 1 000. Odpověď zdůvodněte.

- a) 14 865 b) 54 382 c) 76 127 d) 81 994 e) 126 668

Úloha z minulého čísla zněla:

Představte si, že máte velmi kvalitní písek a na půdě karton ve tvaru čtverce o straně délky 1 metr. Svému nejlepšímu kamarádovi chcete dát k Vánocům svůj kvalitní písek. A protože je to nejlepší kamarád, chcete karton poskládat tak, aby vznikla krabice (bez víka) co největšího objemu. Ohýbáte karton tak, že uprostřed zůstane čtverec o straně délky a , přičemž boky budou mít výšku b , viz obrázek. Jaké budou délky a , b tak, aby objem krabice byl co největší?



Řešení podle José Marciala Nájarese Romera Úlohu budeme řešit dvěma různými způsoby. Nejdříve běžným způsobem pomocí derivací a pak pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG nerovnost) bez derivace.

Podle zadání víme, že $a + 2b = 1$, a dále víme, že v našem případě objem určíme jako $V = a^2b$. Vyjádříme $a = 1 - 2b$ a po dosazení do vztahu pro výpočet objemu dostaneme

$$V = (1 - 2b)^2b. \quad (1)$$

Proměnná b evidentně splňuje nerovnosti $0 \leq b \leq 1/2$. Navíc pro případy $b = 0$ a $b = 0,5$ je objem naší krabice nulový.

Při hledání maximálního objemu budeme vycházet ze vzorce (1) a budeme uvažovat funkci

$$f(x) = (1 - 2x)^2x \quad (2)$$

na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$. Proměnnou b jsme přeznačili na x , jak bývá u funkcí zvykem.

Řešení pomocí derivací. Funkci (2) upravíme:

$$f(x) = (1 - 2x)^2x = (1 - 4x + 4x^2)x = 4x^3 - 4x^2 + x. \quad (3)$$

Derivací této funkce je $f'(x) = 12x^2 - 8x + 1$, její nulovou hodnotu dostaneme vyřešením kvadratické rovnice $12x^2 - 8x + 1 = 0$. Kořeny této rovnice jsou $x_1 = 1/2$ a $x_2 = 1/6$.

Funkce (3) je spojitá na celém uzavřeném intervalu. V krajních bodech je její hodnota nulová a ve všech ostatních bodech je kladná. Proto nabývá svého maxima na intervalu $(0; 0,5)$ v bodě $x = 1/6$. Tedy maximální objem naší krabice je $2/27 \text{ m}^3$ a nabývá se pro $b = 1/6 \text{ m}$.

Řešení pomocí AG nerovnosti. Toto řešení předvedl doc. Petr Vodstrčil ve své přednášce „Jak řešit extrémální úlohy bez derivací“ na konferenci Matematika pro život v roce 2025. Záznam přednášky je dostupný na https://www.youtube.com/watch?v=xrm6rnm_7I&list=PLd0y7E74TNFZMq1nZyBsGiKm6lUifagiI&index=9. Nejprve si připomeňme definici aritmetického průměru A a geometrického průměru G a AG nerovnost. Přitom se omezíme na případ pro tři kladné reálné hodnoty a, b, c :

$$A = \frac{a + b + c}{3}, \quad G = \sqrt[3]{abc}.$$

Věta (AG nerovnost): *Platí $G \leq A$, přičemž rovnost nastane, právě když $a = b = c$.*

Vysvětleme tvrzení o nabývání rovnosti. Pokud $a = b = c$, pak je zřejmé, že $A = G = a$.

Pokud $A = G$, ukážeme, že musí platit $a = b = c$. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že a je největší z hodnot, c nejmenší, tj. $a > c$. Pak $c < A < a$. Označme $a' = a + c - A$, $b' = b$, $c' = A$. Jsou to opět kladné hodnoty a jejich aritmetický průměr je také roven A , tedy aritmetickému průměru čísel a , b , c . Tudíž podle AG nerovnosti musí být jejich geometrický průměr menší nebo roven A . Ale platí následující vztahy

$$(a + c - A)A - ac = (A - c)(a - A) > 0, \quad (a + c - A)bA > abc,$$

proto

$$\sqrt[3]{a'b'c'} = \sqrt[3]{(a + c - A)bA} > \sqrt[3]{abc} = A = \frac{a' + b' + c'}{3}.$$

To je ale ve sporu s AG nerovností, proto z rovnosti $A = G$, plyne rovnost $a = b = c$.

Nyní se pokusíme o částečný přepis řešení doc. Vodstrčila. Máme funkci $f(x) = (1 - 2x)^2 x$ a chceme najít její maximální hodnotu. Abychom využili AG nerovnost co nejšikovněji, tuto funkci vynásobíme čtyřmi. Pouze konstatujeme, že pokud naše funkce nabývá svého maxima v nějakém bodě našeho intervalu, v tom samém bodě nabývá svého maxima i funkce, která je čtyřnásobek původní funkce. Tedy

$$g(x) = 4f(x) = (1 - 2x)(1 - 2x)4x.$$

Z AG nerovnosti dostaneme

$$\sqrt[3]{(1 - 2x)(1 - 2x)4x} \leq \frac{1 - 2x + 1 - 2x + 4x}{3} = \frac{2}{3}.$$

Odtud je jasný důvod, proč jsme naši funkci vynásobili čtyřmi. Bylo to proto, aby pravá strana vyšla konstantní.

Rovnost nastane, právě když se všechny tři hodnoty rovnají, tedy

$$1 - 2x = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{6}.$$