Rozhledy matematicko-fyzikální

Pavel Pokorný

Průměrná rychlost nerovnoměrného pohybu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 1, 26–30

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/153586`

Průměrná rychlost nerovnoměrného pohybu

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

Abstrakt. Ukážeme některé překvapivé vztahy pro průměrnou rychlost, je-li pohyb brzděn silou úměrnou n-té mocnině rychlosti. Vyřešíme pohybovou rovnici a spočteme průměrnou rychlost. Na závěr zmíníme, které fyzikální děje lze popsat určitým exponentem n.

Začněme úryvkem tohoto primitivního rozhovoru:

– Co to je průměrná rychlost?
– No přece celková dráha L dělená celkovým časem T

$$\bar{v} = \frac{L}{T}.$$

– A jak se spočítá, když je počáteční rychlost v_1 a koncová rychlost v_2?
– No přece

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

– Opravdu?!

Pojďme se na tuto otázku podívat podrobněji. Uvažujme pohyb tělesa, které je brzděno (např. odporem prostředí, ve kterém se pohybuje) silou F úměrnou n-té mocnině rychlosti v. Protože

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

lze takový pohyb popsat diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k\,v^n, \tag{1}$$

kde k je konstanta. O brzdění pak hovoříme, když je $k < 0$. Ale pro naše úvahy tato podmínka není důležitá. Nebudeme ani předpokládat celočíselnou hodnotu exponentu n. Pak ale musíme předpokládat kladnou rychlost $v > 0$. Rovnici (1) vyřešíme separací proměnných

$$v^{-n}\,\mathrm{d}v = k\,\mathrm{d}t$$

$$\int v^{-n}\,\mathrm{d}v = \int k\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$\frac{v^{1-n}}{1-n} = kt + c.$$

Označme v_1 počáteční rychlost v čase $t = 0$ a v_2 koncovou rychlost v čase $t = T$. Pak

$$c = \frac{v_1^{1-n}}{1-n}$$

a

$$\frac{v^{1-n}}{1-n} = kt + \frac{v_1^{1-n}}{1-n}.$$

Připravíme si ještě vztah

$$\frac{v_2^{1-n}}{1-n} = kT + \frac{v_1^{1-n}}{1-n}.$$

Nyní můžeme vyjádřit rychlost v jako funkci času t

$$v = \left((1-n)kt + v_1^{1-n}\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

a integrací od $t = 0$ do $t = T$ dostaneme celkovou dráhu

$$L = \int_0^T v\,\mathrm{d}t = \int_0^T \left((1-n)kt + v_1^{1-n}\right)^{\frac{1}{1-n}}\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál vypadá složitě, ale vlastně je to jen integrál mocninné funkce, podobně jako integrál (2). Po drobných úpravách s využitím odvozených vztahů dostaneme

$$L = \frac{1}{k(2-n)}\left(v_2^{2-n} - v_1^{2-n}\right)$$

a průměrná rychlost je pak po úpravě

$$\bar{v} = \frac{L}{T} = \frac{1-n}{2-n}\,\frac{v_2^{2-n} - v_1^{2-n}}{v_2^{1-n} - v_1^{1-n}}. \tag{3}$$

To je hlavní výsledek našeho úsilí. Podívejme se na jeho některé zvláštní případy.

Případ $n = 0$

Pro $n = 0$, tedy když je zrychlení (kladné nebo záporné) nezávislé na rychlosti, dostáváme

$$\bar{v} = \frac{1}{2}\frac{v_2^2 - v_1^2}{v_2 - v_1} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \tag{4}$$

Za tohoto předpokladu měl tedy naivní diskutující z úvodu pravdu, že průměrná rychlost je aritmetický průměr počáteční a koncové rychlosti. Takto se pohybuje např. hmotný bod v homogenním gravitačním poli (vrh svislý) nebo nabitá částice v homogenním elektrickém poli, při zanedbání odporu prostředí.

Případ $n = 1$

Pro $n = 1$ nelze tuto hodnotu n přímo dosadit do vztahu (3), ale uvážením limity a použitím l'Hospitalova pravidla (viz dodatek) dostaneme zajímavý a užitečný vztah. Konkrétně pro $n = 1$, když odpor prostředí je přímo úměrný první mocnině rychlosti, dostaneme

$$\bar{v} = \frac{v_2 - v_1}{\ln \frac{v_2}{v_1}}, \tag{5}$$

kde ln je přirozený logaritmus. Takový pohyb nastává např. při pomalém pohybu malého tělesa prostředím, např. vzduchem nebo vodou. Při pomalém pohybu je obtékání tělesa laminární a netvoří se víry.

Stejné matematické vztahy ale popisují ještě jiný fyzikálně odlišný děj, a to přenos tepla z teplého proudícího media, např. teplé vody, stěnou, např. trubkou. Pak je přenos tepla přímo úměrný první mocnině rozdílu teplot media a okolí. Potom je průměrná teplota dána opět vztahem (5), kde místo počáteční rychlosti dosadíme počáteční teplotu a místo konečné rychlosti dosadíme konečnou teplotu.

Milovníky aritmetického průměru snad potěšíme poznámkou, že pro blízké hodnoty v_1 a v_2 se vztah (5) blíží vztahu (4).

Případ $n = 2$

Ani v tomto případě nelze hodnotu $n = 2$ dosadit přímo do vztahu (3). Pomocí limity a použitím l'Hospitalova pravidla (viz dodatek) dostaneme

$$\bar{v} = \frac{\ln \frac{v_1}{v_2}}{\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}}. \tag{6}$$

Tento případ nastává, když se těleso pohybuje v prostředí větší rychlostí, kdy obtékání již není laminární, ale turbulentní a tvoří se víry. Tento případ je v běžném životě nejčastější (pohyb cyklisty nebo motorového vozidla, zejména proti větru).

Případ $n > 2$

V klasické aerodynamice je v^2 nejčastější a nejvyšší běžná mocnina. Vyšší mocniny však mohou nastat, např. při rychlostech blízkých nebo vyšších, než je rychlost zvuku. Dále při pohybu v granulárním prostředí, např. písek, sníh nebo v husté suspenzi. Také při pohybu v plazmatu. Nebo v případě nelineárního tření v technických systémech, např. magnetická brzda, aktivní tlumiče.

Dodatek

Zde si ukážeme, jak odvodíme vztahy (5) a (6) ze vztahu (3).

Hodnotu $n = 1$ nemůžeme přímo dosadit, protože bychom dostali neurčitý výraz typu „nula lomeno nulou“. Ale můžeme spočítat limitu pro n se blíží k jedné pomocí l'Hospitalova pravidla.

L'Hospitalovo pravidlo je užitečný nástroj, jak spočítat širokou třídu jinak obtížných limit. My se zde soustředíme na speciální případ, kdy spočítáme limitu zlomku jako podíl derivací

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Abychom ukázali platnost tohoto vztahu, budeme předpokládat $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$ a existenci derivací

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$
$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

a nenulovost jmenovatele $g'(x_0) \neq 0$. Věta o l'Hospitalově pravidle je obecnější, nám bude stačit tento omezený případ. A za těchto předpokladů můžeme psát

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

V našem případě nebude proměnnou x, ale n. Dále budeme potřebovat pravidlo pro derivaci exponenciální funkce s obecným základem

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Limitu výrazu (3) pro n se blíží k jedné spočteme takto:

$$\bar{v} = \lim_{n\to 1} \frac{1-n}{2-n} \frac{v_2^{2-n} - v_1^{2-n}}{v_2^{1-n} - v_1^{1-n}} =$$

$$= (v_2 - v_1) \lim_{n\to 1} \frac{1-n}{v_2^{1-n} - v_1^{1-n}} \overset{\mathrm{l'H}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{l'H}}{=} (v_2 - v_1) \lim_{n\to 1} \frac{-1}{-v_2^{1-n} \ln v_2 + v_1^{1-n} \ln v_1} =$$

$$= (v_2 - v_1) \frac{-1}{-\ln v_2 + \ln v_1} = \frac{v_2 - v_1}{\ln \frac{v_2}{v_1}}.$$

A podobně odvodíme vztah (6) ze vztahu (3). Limitu výrazu (3) pro n se blíží ke dvěma spočteme takto:

$$\bar{v} = \lim_{n\to 2} \frac{1-n}{2-n} \frac{v_2^{2-n} - v_1^{2-n}}{v_2^{1-n} - v_1^{1-n}} =$$

$$= \frac{-1}{\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}} \lim_{n\to 2} \frac{v_2^{2-n} - v_1^{2-n}}{2-n} \overset{\mathrm{l'H}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{l'H}}{=} \frac{-1}{\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}} \lim_{n\to 2} \frac{-v_2^{2-n} \ln v_2 + v_1^{2-n} \ln v_1}{-1} = \frac{\ln \frac{v_1}{v_2}}{\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}}.$$

Je zajímavé, že hodnoty $n = 1$ a $n = 2$ jsou z fyzikálního pohledu nejčastější, a tedy nejdůležitější, a z matematického pohledu to jsou jediné dvě hodnoty, které nelze přímo dosadit do vztahu (3).