Rozhledy matematicko-fyzikální

Jan Fiala; Tomáš Roskovec; Vladimíra Petrášková

Technika a náhoda: pravděpodobnostní úlohy pro studenty středních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 2, 1–18

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/153688

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2026

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Technika a náhoda: pravděpodobnostní úlohy pro studenty středních škol

Jan Fiala, Tomáš Roskovec, Vladimíra Petrášková
Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita, České Budějovice

Abstrakt. Příspěvek se věnuje řešení úloh z pravděpodobnosti, které tematicky vycházejí z oblasti techniky. Na vybraných příkladech z technické praxe ukazujeme, jak lze tyto problémy efektivně řešit pomocí pravděpodobnostních metod. Článek připomíná význam paralelního a sériového zapojení součástek jako užitečného modelu ve výuce pravděpodobnosti. Rozmanitost předložených úloh dokládá, že technicky zaměřené příklady představují silný motivační prvek ve výuce pravděpodobnosti na středních i vysokých školách.

Úvod

Motivací tohoto textu je potřeba zpřesnit matematické modely tam, kde deterministické modely nestačí, v tomto příspěvku v oborech techniky i fyziky. Deterministické jevy jsou takové, které nepodléhají náhodě a jsou předurčeny k pevnému výsledku, naopak nahodilé či stochastické jevy jsou takové, které mohou při opakováních přinést různé výsledky a popisujeme je pravděpodobnostmi výsledků, které mohou nastat.

Pravděpodobnostní úvahy hrály po celou dobu moderních dějin ve vývoji fyzikálních teorií vždy významnou roli. Především je potřeba zmínit objev principu neurčitosti a kvantovou teorii. Zavedení nedeterministických modelů se setkalo s velkým odporem, samotný Albert Einstein (1879–1955), teoretický fyzik a nositel Nobelovy ceny za fyziku z roku 1921, nesouhlasil s tím, aby byla kvantová teorie založena na náhodnosti, tedy na hypotéze, že se věci dějí nahodile. Ostře se vymezil vůči užití náhody na popis pohybu částic hmoty. Výstižný a celosvětově známý je například jeho výrok, podle kterého odmítá věřit, že Bůh hraje v kostky s vesmírem [8].

Obdobná situace nastává v technických oblastech, ve kterých se obecně usiluje o popis deterministických procesů, ale praxe ukazuje, že to není zcela dosažitelné. Typické úvahy a úlohy se týkají spolehlivosti, tedy výpočtu pravděpodobnosti, že stroj nebo proces neselže a vyrobí produkt, případně nedojde k poruše. Tyto výpočty jsou klíčové pro odhady počtu

vadných výrobků stejně jako pro odhad rizik poruchy technického zařízení. Disciplína, která se podobnými problémy zabývá, se nazývá teorie spolehlivosti. Anděl [1, s. 130–134] blíže vysvětluje, jak pomocí sériově-paralelního uspořádání jednotlivých součástí stroje zvýšit jeho celkovou spolehlivost.

Cílem dalšího textu je ukázat některá využití teorie pravděpodobnosti při řešení technických problémů a motivovat ke zvýšení atraktivity pravděpodobnosti jako aplikované matematické disciplíny. Kapitoly úloh jsou řazeny dle náročnosti.

1. Základní pojmy z pravděpodobnosti

Následující kapitola obsahuje přehled definic nejdůležitějších pojmů z teorie pravděpodobnosti. Čtenáři znalí pojmů mohou kapitolu přeskočit a přejít ke kapitole 2. Podrobnější představení základních pojmů z pravděpodobnosti je provedeno například v publikaci Płockého a Tlustého [7] či Litschmannové [4].

Uvažujme množinu $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ všech možných výsledků náhodného pokusu a tzv. rozdělení pravděpodobnosti p jako reálnou funkci, která každému prvku $\omega_i \in \Omega$ přiřazuje právě jedno nezáporné číslo $p(\omega_i)$ tak, že $p(\omega_1) + \ldots + p(\omega_s) = 1$. Index s označuje počet možných výsledků, které mohou nastat. Dvojici (Ω, p) nazýváme diskrétní pravděpodobnostní prostor.[1)]

Libovolnou podmnožinu množiny Ω pravděpodobnostního prostoru (Ω, p) nazýváme náhodný jev. Množina všech podmnožin množiny Ω se nazývá množina náhodných jevů v uvedeném pravděpodobnostním prostoru. Dva náhodné jevy A a B nazýváme disjunktní (neslučitelné), jestliže $A \cap B = \emptyset$.

Nechť A je libovolný jev v pravděpodobnostním prostoru (Ω, p). Pravděpodobností jevu A nazveme číslo $P(A)$:

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{když } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{když } A = \{\omega\}, \\ p(\omega_{j_1}) + \ldots + p(\omega_{j_k}), & \text{když } A = \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_k}\}. \end{cases}$$

Tento vztah vyjadřuje, že pravděpodobnost jevu zahrnujícího určité výsledky je součet pravděpodobností těchto výsledků. Protože nemůže

[1)] Vzhledem k jednoduchosti řešených úloh postačí konečný diskrétní pravděpodobnostní prostor, s konečným množstvím výsledků s.

nastat případ, kdy nastane zároveň více z těchto výsledků – neexistuje překryv těchto pravděpodobností a při nastoupení jevu nastane právě jeden z výsledků. Proto platí aditivita.

Pro výpočet pravděpodobnosti sjednocení dvou libovolných jevů A, B platí

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Jsou-li jevy A, B disjunktní (neslučitelné, tj. jejich průnikem je prázdná množina), pak

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Pro jev A definujeme tzv. doplňkový jev $\overline{A}$, pro který platí $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$, který označuje případ, kdy nenastane jev A, platí

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Intuitivní přístup ke klasickému pravděpodobnostnímu prostoru je pravděpodobnost jako podíl úspěšných pokusů z celkového počtu pokusů. Tímto způsobem ji budeme počítat, nebude-li uvedeno jinak, protože uvažujeme, že všechny výsledky pokusu jsou shodně pravděpodobné. Například pokud $|\Omega| = 13$ a $|A| = 3$, pak pravděpodobnost $P(A) = \frac{3}{13}$.[2)]

1.1. Stochastická nezávislost jevů

Jsou-li A a B dva jevy prostoru (Ω, p) a $P(B) > 0$, nazýváme podíl $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ podmíněnou pravděpodobností jevu A za podmínky, že nastal jev B, a označujeme ji $P(A|B)$.

Pro jev A, $P(A) > 0$, a jev B, $P(B) > 0$, platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Pokud $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, pak dvojici jevů A, B nazýváme (stochasticky) nezávislé jevy. To je ekvivalentní tomu, že zda nastal jev A, nemá vliv na to, zda nastal jev B, tedy $P(B|A) = P(B)$.

Nezávislost pro větší počet jevů než dvojici zavedeme následovně. Jevy $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nazveme stochasticky nezávislé jevy, pokud pro libovolnou množinu (výběr) $\{B_1, B_2, \ldots, B_j\} \subseteq \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ platí

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_j) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot \ldots \cdot P(B_j).$$

[2)] Značení $|X| = x$ říká, že počet prvků množiny X je číslo x. Počtu prvků množiny také říkáme mohutnost množiny.

Povšimněme si, že nezávislost množiny jevů implikuje, že libovolná dvojice jevů v množině je nezávislá. Platí také, že pokud jsou jevy nezávislé, jsou nezávislé i doplňkové jevy k nim. Nezávislost jevů je rovněž symetrický vztah.

Název nezávislost koresponduje s intuitivní představou: nezávislé jevy na sobě nezávisí v tom smyslu, že nelze z jednoho predikovat druhý, například výsledek hodu kostkou nesouvisí s počasím.

2. Pravděpodobnostní úlohy kmenového učiva inspirované technickou praxí

Úloha 1. Stroj vyrobí 1 000 stejných součástek za hodinu. Z nich 40 má výrobní vadu, ale jen 20 % součástek s vadou je dále nepoužitelných. Kontrolor náhodně vybere a) jeden, b) čtyři ze série výrobků. S jakou pravděpodobností je tato náhodně vybraná součástka, resp. jsou všechny čtyři součástky dále nepoužitelné? ([2, s. 118])

Řešení. Označíme A jev „náhodně vybraná součástka je nepoužitelná“ a jev B „náhodně vybrané čtyři součástky jsou nepoužitelné“. Počet dále nepoužitelných dopočteme dopočteme jako 20 % z 40, tj. 8. Pak

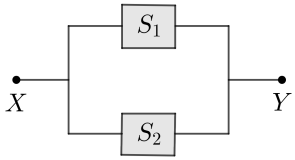
$$\text{a)}\ \ P(A) = \frac{\binom{8}{1}}{\binom{1000}{1}} = \frac{8}{1000} = 0{,}008,$$

$$\text{b)}\ \ P(B) = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{1000}{4}} = \frac{70}{41\,417\,124\,750} \doteq 1{,}69 \cdot 10^{-9}.$$

U této úlohy lze uvažovat i otázku na počet nepoužitelných výrobků menší než počet kontrolovaných, pak se náročnost úlohy zvyšuje a vyžaduje kombinatorické úvahy.

2.1. Technická zapojení součástek

Již na základní škole se žáci v rámci výuky fyziky seznamují s různými druhy zapojení elektronických součástek v elektrickém obvodu.



Obr. 1: Paralelní zapojení součástek S_1 a S_2

Tzv. paralelní zapojení je zapojení elektrotechnických součástek v elektrickém obvodu „pod sebou“, nebo také „vedle sebe“ (obr. 1). V paralelním zapojení se nacházejí tzv. uzly, tj. místa, v nichž se přívodní vodič rozděluje do tzv. větví, aby se za součástkami umístěnými na jednotlivých větvích tyto opět spojily v jeden vodič.

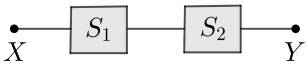
Připomeňme některé fyzikální skutečnosti platné pro paralelní zapojení. Elektrický proud procházející jednotlivými větvemi může být různý a závisí na odporu součástek ve větvích. Z Ohmova zákona plyne, že $I_i = \frac{U}{R_i}$, kde I_i je elektrický proud v i-té větvi a R_i je odpor součástky na i-té větvi. Celkový elektrický proud I (měřený například mezi X a sousedním uzlem rozdělujícím větve) se rovná součtu proudů v jednotlivých větvích obvodu. Není bez zajímavosti, že paralelním obvodem může protékat proud vyšších hodnot než u sériového zapojení (viz níže). Elektrické napětí U je mezi dvěma uzly v paralelním zapojení stejné pro všechny větve. Převrácená hodnota výsledného elektrického odporu R je rovna součtu převrácených hodnot odporů $R_1, R_2, \ldots, R_n$ jednotlivých součástek:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n,$$

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots + \frac{U}{R_n},$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}.$$

Tzv. sériové zapojení součástek je jejich zapojení v elektrickém obvodu tzv. „za sebou“, tzn. mezi každými dvěma přímo sousedícími sériově zapojenými součástkami vede jediný vodič (obr. 2). Přerušení sériového obvodu v kterémkoli místě má za následek přerušení celého obvodu. Sériové zapojení se využívá např. v pojistkách, jističích a spotřebičích, kde problém v části musí vyřadit celý přístroj.



Obr. 2: Sériové zapojení součástek S_1 a S_2

Studenti na sériovém obvodu zkoumají vlastnosti řady fyzikálních veličin, jako např. elektrický proud se mezi jednotlivé součástky nerozděluje, naopak je ve všech místech sériového obvodu stejný. Naopak elektrické napětí je mezi svorkami jednotlivých součástek různé a závisí na odporu

každé ze součástek. Z Ohmova zákona plyne, že $U_i = R_i \cdot I$, kde U_i je napětí na i-té součástce, R_i je elektrický odpor i-té součástky a I je elektrický proud v obvodu. Celkové elektrické napětí U se rovná součtu napětí na jednotlivých součástkách, tudíž celkový elektrický odpor R v sériovém obvodu se rovná součtu odporů jednotlivých součástek:

$$R = R_1 + \ldots + R_n.$$

2.2. Paralelní a sériové zapojení z pohledu matematiky

Na výše uvedená zapojení součástek lze nahlížet také z pohledu uživatele či spotřebitele, který se zajímá o spolehlivost (nebo naopak poruchovost) takového zapojení. Otázky typu „Které zařízení je spolehlivější – to, které obsahuje sériové, nebo to, které obsahuje paralelní zapojení svých součástí?“ apod. řeší matematická pravděpodobnost, konkrétně pravděpodobnost nezávislých jevů, se kterou by se měli studenti seznamovat již na středních školách v rámci výuky matematiky.[3)] Do vysokoškolských kurzů pravděpodobnosti a statistiky však často vstupují studenti s velmi různým porozuměním.

Princip paralelního a sériového zapojení je analogický případu odporů. Pokud zapojujeme součástky do série, pravděpodobnost neprůchodnosti roste, podobně jako narůstá odpor, naopak paralelní zapojení snižuje šanci na neprůchodnost, podobně jako snižuje odpor. Tato intuice je přirozená a aplikuje se například v dopravě či chirurgii, kde pojem „bypass“ označuje přidanou objížďku či alternativní cestu, jejímž zařazením zvýšíme průchodnost systému či snížíme riziko ucpání a neprůchodnosti systému. Tento efekt lze pozorovat například při řešení úloh 2 a 4.

Zároveň lze pozorovat analogii s výrokovou logikou, kdy zapojení do série odpovídá konjunkci (aby fungoval systém, musí fungovat veškeré součástky) a paralelní zapojení odpovídá disjunkci (aby fungoval systém, musí fungovat alespoň některá jeho součást). Toto propojení lze využít k vizualizaci Booleovy algebry pomocí elektrických obvodů, nikoli nutně ve spojitosti s pravděpodobností, viz např. [6, s. 88–103].

2.3. Technická zapojení v pravděpodobnostních úlohách

Úloha 2. Uvažujme dvě paralelně zapojené součástky S_1 a S_2 (obr. 1). Jaká je pravděpodobnost, že „zařízení složené z paralelně zapojených

[3)] Zařazení učiva o pravděpodobnosti není jednotné a do velké míry závisí na rozhodnutí a zkušenosti učitele.

součástek S_1 a S_2 bude funkční“, jestliže pravděpodobnost poruchy součástky S_1 je 0,01 a pravděpodobnost poruchy součástky S_2 je 0,025.[4)]

Řešení. Zařízení bude jako celek funkční, jestliže bude funkční aspoň jedna ze součástek S_1, S_2, tj. z místa X do místa Y poteče proud, což se stane tehdy, když proud poteče jen větví se součástkou S_1, nebo jen větví se součástkou S_2, nebo oběma větvemi najednou.

Označme A_1 jev „součástka S_1 je funkční, tj. proud poteče větví se součástkou S_1“, a A_2 jev „součástka S_2 je funkční, tj. proud poteče větví se součástkou S_2“, označme A sjednocení těchto jevů, tedy kdykoli proud poteče alespoň jednou z větví. Funkčnost součástek na sobě nijak nezávisí, tj. jevy A_1 a A_2 považujme za náhodné jevy na sobě nezávislé. Pak $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$, přičemž $P(A_1) = 0{,}99$, $P(A_2) = 0{,}975$. Pravděpodobnost jevu A spočteme z pravděpodobností jevů A_1 a A_2:

$$\begin{aligned} P(A) = P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = \\ &= 0{,}99 + 0{,}975 - 0{,}99 \cdot 0{,}975 = 0{,}999\,75. \end{aligned}$$

Proud poteče zařízením s pravděpodobností $0,999\,75$, neboli poruchovost zařízení je $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}000\,25$.

Alternativním řešením je uvědomit si, že neprůchodnost odpovídá situaci, kdy selžou obě součástky. Pro tuto úvahu je podstatné, že při nezávislosti jevů A_1 a A_2 jsou nezávislé i jevy k nim doplňkové. Spočítáme $\overline{A} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$, což zjednoduší výpočet na

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)).$$

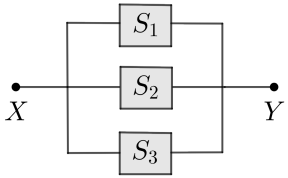
Úloha 3. Uvažujme dvě sériově zapojené součástky S_1 a S_2 (obr. 2). Jaká je pravděpodobnost, že „zařízení složené ze sériově zapojených součástek S_1 a S_2 bude funkční“ (jev A), jestliže pravděpodobnost poruchy součástky S_1 je 0,01 a pravděpodobnost poruchy součástky S_2 je 0,025.

Řešení. Zařízení bude funkční, jestliže z místa X do místa Y poteče proud, což se stane tehdy, když proud poteče přes součástku S_1 a současně přes součástku S_2, tedy když fungují bezporuchově obě součástky S_1 i S_2 najednou. Označme A_1 náhodný jev „součástka S_1 je funkční“ a A_2 náhodný jev „součástka S_2 je funkční“. Pak $P(A_1) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

[4)] Není-li v zadání uvedeno jinak, vždy uvažujeme, že funkčnost součástek (resp. výskyt poruchy) jsou navzájem nezávislé jevy.

a $P(A_2) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$. Protože se jedná o dva navzájem nezávislé jevy, pravděpodobnost jevu A, tedy že obě součástky fungují, je součin $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}965\,25$, tj. zařízení je spolehlivé asi na 96,5 %, neboli poruchovost zařízení je 3,475 %.

Úloha 4. Uvažujme tři paralelně zapojené součástky S_1, S_2 a S_3 (obr. 3). Jaká je pravděpodobnost, že „zařízení složené z paralelně zapojených součástek S_1, S_2 a S_3 bude funkční“ (jev A), jestliže pravděpodobnost poruchy součástky S_1 je 0,01, pravděpodobnost poruchy součástky S_2 je 0,025 a pravděpodobnost poruchy součástky S_3 je 0,03.



Obr. 3: Paralelní zapojení tří součástek S_1, S_2 a S_3

Řešení. V této úloze máme možnost postupovat jako v úloze 2, ale přímý výpočet vede k úvaze $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, kde A_i označuje jev, kdy součástka S_i neselže, tedy je funkční. Vhodnější je uvažovat doplňkové jevy a počítat ze vztahu $\overline{A} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$. Zařízení tedy bude funkční s pravděpodobností

$$\begin{aligned} P(A) = 1 - P(\overline{A}) &= 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot (1 - P(A_3)) = \\ &= 1 - (0{,}01 \cdot 0{,}075 \cdot 0{,}03) = 0{,}999\,977\,5. \end{aligned}$$

Pracnější, ale zajímavou alternativou řešení je využít modifikaci principu inkluze a exkluze (viz např. [5, s. 99–105]). Stručně připomeňme, že pro tři jevy platí

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - \\ - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Toto pravidlo můžeme vyslovit a dokázat s pravděpodobností jevu místo mohutnosti množiny ve formě:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - \\ - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Pravděpodobnosti průniků jevů pak dopočteme jako součiny díky nezávislosti jevů.

Úloha 5. Uvažujme tři sériově zapojené součástky S_1, S_2 a S_3 (obr. 4). Jaká je pravděpodobnost, že „zařízení složené ze sériově zapojených součástek S_1, S_2 a S_3 bude funkční“ (jev A), jestliže pravděpodobnost poruchy součástky S_1 je 0,01, pravděpodobnost poruchy součástky S_2 je 0,025 a pravděpodobnost poruchy součástky S_3 je 0,03.

Obr. 4: Sériové zapojení součástek S_1, S_2 a S_3

Řešení. Zařízení bude funkční, jestliže mezi místy X a Y budou v sériovém zapojení funkční všechny tři součástky. Označme A_1 (resp. A_2, A_3) náhodné jevy „součástka S_1 (resp. S_2, S_3) je funkční“. Pravděpodobnost jevu A je pravděpodobností průniku jevů A_1, A_2 a A_3. Jevy A_1, A_2 a A_3 jsou nezávislé, proto

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}99 \cdot 0{,}975 \cdot 0{,}97 \doteq 0{,}936.$$

Zařízení bude funkční s pravděpodobností přibližně 0,936, poruchovost zařízení je přibližně 0,064.

Úloha 6. Každé ze dvou sériově zapojených čerpadel (podobně jako na obr. 2) pracuje nezávisle na druhém bez závad s pravděpodobností 0,95. Jaký údaj smí výrobce uvést na etiketu o pravděpodobnosti bezproblémového chodu celé soustavy čerpadel? ([2, s. 127])

Řešení. Zařízení pracuje bez problémů, pokud obě čerpadla fungují, tedy s pravděpodobností $P = 0{,}95^2 = 0{,}902\,5$.

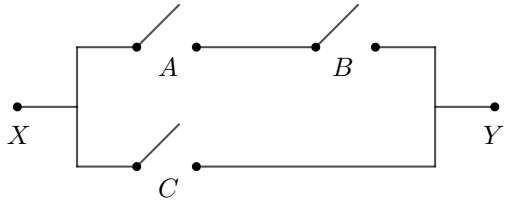
Úloha 7. Pumpa se skládá z šesti na sobě navzájem nezávislých součástí, z nichž každá přestane pracovat s pravděpodobností 0,05. Když přestane pracovat aspoň jedna součást, vypadne pumpa z provozu. Jak velká je pravděpodobnost, že „zůstane pumpa stát“ (jev A)? ([2, s. 136])

Řešení. Postupujeme úvahou jako v úloze 5. Sériové zapojení vyplývá ze zadání úlohy, že pro funkčnost celého zařízení musí být funkční všechny jeho součásti. Označme náhodný jev A_i „i-tá součást pumpy je funkční“, pak $P(A_i) = 0{,}95$. Hledaná pravděpodobnost jevu A je

$$P(A) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_6) = 1 - 0{,}95^6 \doteq 0{,}264\,9.$$

Pumpa zůstane stát s pravděpodobností přibližně 0,265, zatímco bude funkční s pravděpodobností přibližně 0,735.

Úloha 8. Každý ze spínačů A, B, C ve schématu na obr. 5 je zapnutý nebo vypnutý nezávisle na ostatních s pravděpodobností 0,5. Proud prochází obvodem, jestliže prochází aspoň jednou větví schématu. S jakou pravděpodobností prochází proud z X do Y?



Obr. 5: Schéma zapojení spínačů

Řešení. Pro jednoduchost označme sepnutí spínače A jevem A, analogicky sepnutí B a C jevy B a C, jevem D pak označme průchodnost obvodu. Řešme nejprve, zda je horní větev průchozí, tedy nastane A a zároveň B,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Dolní větví poteče proud s $P(C) = 0{,}5$. Jednodušší je spočítat pravděpodobnost neprůchodnosti obvodu, tedy neprůchodnosti obou větví

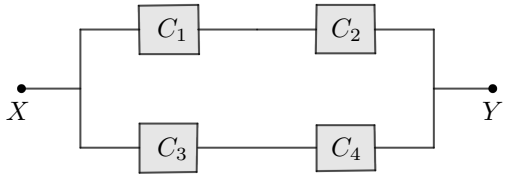
$$P(\overline{D}) = P(\overline{A \cap B}) \cdot P(\overline{C}) = (1 - 0{,}25) \cdot (1 - 0{,}5) = 0{,}375,$$

proto $P(D) = 1 - 0{,}375 = 0{,}625$. Alternativně můžeme $P(D)$ spočítat přímo ze vzorce pro sjednocení jevů, kterými je průchodnost jednotlivých větví:

$$P(D) = P((A \cap B) \cup C) = P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap B \cap C) = \\ = 0{,}25 + 0{,}5 - 0{,}125 = 0{,}625.$$

Z X do Y prochází proud s pravděpodobností 0,625.

Úloha 9. Každá část C_1, C_2, C_3 a C_4 přístroje ve schématu na obr. 6 má nezávisle na ostatních různou pravděpodobnost poruchy: část C_1 0,1, část C_2 0,15, část C_3 0,18 a část C_4 0,12. S jakou pravděpodobností zařízení nefunguje?



Obr. 6: Schéma zapojení

Řešení. Každá z větví funguje jen tehdy, když správně fungují současně obě její části (C_1 a C_2, resp. C_3 a C_4). Přístroj funguje, pokud funguje aspoň jedna z jeho paralelně zapojených větví. Označme A_1 (resp. A_2) náhodný jev, že „funguje větev s částmi C_1 a C_2“, a jev A_2, že „funguje větev s částmi C_3 a C_4“. Pak

$$P(A_1) = (1 - 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}15) = 0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}765.$$

Podobně pro druhou větev

$$P(A_2) = (1 - 0{,}18) \cdot (1 - 0{,}12) = 0{,}82 \cdot 0{,}88 = 0{,}721\,6.$$

Pak $P(\overline{A_1}) = 0{,}235$ a $P(\overline{A_2}) = 0{,}278\,4$. Celý přístroj nefunguje (jev C), pokud selžou obě větve: $P(C) = 0{,}235 \cdot 0{,}278\,4 \doteq 0{,}065\,4$. Přístroj nefunguje s pravděpodobností přibližně $0{,}065$.

Při výpočtu však můžeme postupovat také takto: Označme N_1 jev „nepracuje část C_1“, podobně jevy N_2, N_3, N_4 pro části po řadě C_2, C_3, C_4; dále označme $\overline{A_1}$ nefunkčnost horní větve, $\overline{A_2}$ nefunkčnost spodní větve a C nefunkčnost celého přístroje. $P(N_1) = 0{,}1$, $P(N_2) = 0{,}15$, $P(N_3) = 0{,}18$, $P(N_4) = 0{,}12$, dle pravidla pro pravděpodobnost sjednocení nastane selhání větví s pravděpodobností

$$\begin{aligned} P(A_1) = P(N_1 \cup N_2) &= P(N_1) + P(N_2) - P(N_1 \cap N_2) = \\ &= 0{,}1 + 0{,}15 - 0{,}015 = 0{,}235, \\ P(A_2) = P(N_3 \cup N_4) &= P(N_3) + P(N_4) - P(N_3 \cap N_4) = \\ &= 0{,}18 + 0{,}12 - 0{,}0216 = 0{,}2784. \end{aligned}$$

Stroj nepracuje, jestliže nepracují obě větve zároveň, tedy

$$P(C) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0{,}235 \cdot 0{,}2784 = 0{,}065\,424.$$

Hledaná pravděpodobnost je $P(C) \doteq 0{,}065$.

3. Úlohy rozšiřujícího učiva z technické praxe

Nyní přejděme k pravděpodobnostním úlohám, které vyžadují hlubší znalosti či úvahy.

Úloha 10. Výrobní linka zpracovává dohromady dva polotovary: první polotovar dodává přístroj A a druhý polotovar jeden ze dvou přístrojů B. Linka se zastaví, pokud některý z polotovarů nebude dodán (pokud alespoň jeden z přístrojů B funguje, druhý polotovar je k dispozici). Pravděpodobnost zastavení A je 0,001, pravděpodobnost zastavení celé linky je 0,005. Spočítejte pravděpodobnost zastavení přístroje B za předpokladu, že oba přístroje B mají shodnou pravděpodobnost zastavení a tyto jevy i zastavení přístroje A jsou nezávislé.

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že k celkovému zastavení (jev C s pravděpodobností $P(C) = 0{,}005$), je třeba zastavení buď A (jev A s pravděpodobností $P(A) = 0{,}001$) nebo obou přístrojů B (jev X s pravděpodobností $P(X) = P(B)^2$, kde $P(B)$ je hledaná pravděpodobnost zastavení přístroje B). Tedy $C = A \cup X$, a proto

$$P(C) = P(A) + P(X) - P(A \cap X) = P(A) + P(X) - P(A) \cdot P(X).$$

Po dosazení dostaneme:

$$0{,}005 = 0{,}001 + P(B)^2 - (0{,}001 \cdot P(B)^2).$$

Z toho plyne $P(B) \doteq 0{,}0633$.

Můžeme využít také alternativní postup výpočtu pomocí doplňkového jevu

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A \cup X}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{X}),$$

tedy

$$1 - 0{,}005 = (1 - 0{,}001) \cdot (1 - P(B)^2),$$

odtud shodně dostáváme $P(B) \doteq 0{,}063$.

Úloha 11. Hlavní zdroj elektřiny vypadne během směny s pravděpodobností 0,005. Nouzový zdroj elektřiny se nepodaří spustit s pravděpodobností 0,02, ale lze připravit více takových zdrojů. Kolik nouzových zdrojů má být připraveno, aby pravděpodobnost výpadku všech zdrojů byla nižší než 10^{-k}? Parametr k je přirozené číslo, v závislosti na kterém počítáme (považujme výpadky zdrojů za nezávislé jevy).

Řešení. Při řešení úlohy je vhodné si uvědomit, že přidáním více náhradních zdrojů se celková pravděpodobnost selhání všech zdrojů najednou snižuje, proto pro parametr k spočítáme, kolik zdrojů je zapotřebí bez ohledu na neceločíselnost výsledku, a použijeme horní celou část. Systém selže (jev S), pokud vypadne nejen hlavní zdroj, ale zároveň x náhradních zdrojů, tedy $P(S) = 0{,}005 \cdot 0{,}02^x$, odtud $10^{-k} \geq 0{,}005 \cdot 0{,}02^x$,

$$x \geq \frac{-k - \log(0{,}005)}{\log(0{,}02)}.$$

Počet potřebných náhradních zdrojů je pak horní celá část z x, pokud vyjde nezáporná, jinak 0 (při nízkých nárocích stačí hlavní zdroj).

Úloha 12. Výrobek je vadný s pravděpodobností 0,02. Kontrolní tým prochází všechny výrobky a bezvadný produkt uzná za vadný s pravděpodobností 0,05, vadný produkt uzná za bezvadný s pravděpodobností 0,02. Jaký je podíl vadných výrobků mezi uznanými za bezvadné při práci jedné kontroly? Jaký je tento podíl při práci dvou nezávisle fungujících kontrol, jestliže k vyřazení stačí nesouhlas jedné kontroly? Jaký je podíl, pokud první kontrola projde vše, ale druhá kontrola prochází pouze výrobky vyhodnocené prvním týmem jako vadné a uznává do prodeje ty, které považuje za bezvadné?

Řešení. Tuto úlohu lze řešit pomocí takzvané Bayesovy věty (vize např. [4]), ale my ji budeme řešit úvahou. Označme P_1 pravděpodobnost výroby vadného výrobku a P_2 pravděpodobnost označení bezvadného za vadný a P_3 označení vadného za bezvadný. Z dávky výrobků (například o Q kusech, toto číslo nebude hrát roli) označíme po kontrolách části: počet bezvadných za bezvadné označené Q_1 a počet vadných považovaných za bezvadné Q_2. Pravděpodobnost, že vadný výrobek bude mezi označenými za bezvadné je poměr $P = Q_2/(Q_1 + Q_2)$.

Zbývající část řešení závisí na systému a počtu kontrol, nejprve uvažujme jedinou kontrolu. Bezvadné výrobky označené za bezvadné jsou v počtu $Q_1 = Q \cdot (1 - P_1) \cdot (1 - P_2)$, první násobení znamená, že nejsou vadné, druhé, že prošly kontrolou. Naopak vadné, uznané za bezvadné jsou v počtu $Q_2 = Q \cdot P_1 \cdot P_3$, kde první násobení znamená, že jsou vadné, násobení P_3 pak chybu kontroly. Q se ve zlomku zkrátí, tedy evidentně pravděpodobnost nezávisí na velikosti výrobní dávky. Po dosazení za Q_1 a Q_2 dostáváme

$$P = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \doteq 0{,}000\,429\,5.$$

Při dvou kontrolách se při výpočtu počtu kusů musí obě kontroly shodnout, proto se členem vyjadřujícím názor kontroly násobí dvakrát, tedy

$$Q_1 = Q \cdot (1 - P_1) \cdot (1 - P_2) \cdot (1 - P_2),$$

analogicky

$$Q_2 = Q \cdot P_1 \cdot P_3 \cdot P_3.$$

Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$P = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q \cdot P_1 \cdot P_3 \cdot P_3}{Q \cdot (1 - P_1) \cdot (1 - P_2) \cdot (1 - P_2) + Q \cdot P_1 \cdot P_3 \cdot P_3}.$$

Po zkrácení Q, dosazení hodnot za P_1, P_2, P_3 a zaokrouhlení dostáváme $P \doteq 0{,}000\,009\,05$.

Třetí otázka je složitější, Q_1 musíme počítat jinak, jde o součet dvou neslučitelných jevů, buď první kontrola bezvadný výrobek schválí a druhá ho již nekontroluje, nebo první kontrola výrobek vyřadí, ale druhá ho schválí, tedy

$$Q_1 = Q \cdot (1 - P_1) \cdot (1 - P_2 + P_2 \cdot (1 - P_2)).$$

Naopak Q_2 vychází ze dvou neslučitelných jevů: buď první kontrola označí vadný výrobek za bezvadný, nebo první kontrola vadný výrobek vyřadí, ale druhá jej považuje za bezvadný a zvrátí jeho vyřazení, tedy

$$Q_2 = Q \cdot P_1 \cdot (P_3 + (1 - P_3) \cdot P_3).$$

Po dosazení dostáváme

$$P = \frac{Q \cdot P_1 \cdot (P_3 + (1 - P_3) \cdot P_3)}{Q \cdot (1 - P_1) \cdot (1 - P_2 + (1 - P_2) \cdot P_2) + Q \cdot P_1 \cdot (P_3 + (1 - P_3) \cdot P_3)}$$

a po vyčíslení a zaokrouhlení $P \doteq 0{,}000\,81$.

V řešení si všimněme, že třetí strategie přináší výrazně větší chybu, ale firma ji může preferovat, protože objem práce druhé kontroly se oproti druhé variantě řádově sníží a protože nepočítáme počet vyřazených bezvadných výrobků, který je v prvním a zejména druhém případě vyšší. Jinými slovy, při snižování podílu zmetků, jako například v druhé strategii, provedeme obrovské množství kontrol a bude vyřazeno mnoho bezvadných výrobků, což samozřejmě přináší výrobci dodatečné náklady. Tyto aspekty lze přidat do příkladu, pokud bychom chtěli uvést problém ekonomicky a nikoli technicky.

Úloha 13. Starší vůz je třeba opravit. Mechanik může provést opravu originálními díly a snížit riziko poruchy v následujícím období na 0,005 za 17 000 Kč, nebo repasovanými díly sníží riziko poruchy na 0,02 za 2 000 Kč. Při jaké škodě vzniklé případnou poruchou se vyplatí která oprava (uvažujeme, že v případě poruchy vznikne shodná škoda nezávisle na dílech)?

Řešení. Celkové náklady jsou v obou případech náklady na opravu sečtené s očekávanými škodami případné poruchy, což je škoda násobená pravděpodobností poruchy. Očekávané náklady při dražší opravě jsou tedy

$$C_1 = 17\,000 + 0{,}005 \cdot x,$$

kde x jsou škody. Obdobně pro levnější opravu

$$C_2 = 2\,000 + 0{,}02 \cdot x.$$

Ověřujeme, kdy se vyplatí dražší oprava, tedy

$$\begin{aligned} C_1 &< C_2, \\ 17\,000 + 0{,}005 \cdot x &< 2\,000 + 0{,}02 \cdot x, \\ 1\,000\,000 &< x. \end{aligned}$$

Pokud by porucha způsobila škodu přes 1 milion korun, vyplatí se nyní dražší oprava. Pokud by byla hrozící škoda nižší, vyplatí se levnější oprava. Nutno dodat, že finanční rozvahu opravář obvykle počítat nebude, ale způsob opravy bude zvažovat podle aktuální ceny vozu.

Úloha 14. Dodavatel chystá výrobu, při které garantuje pravděpodobnost zmetků menší než 0,02. Bohužel se ukáže, že linka je poškozena a vyrábí 0,05 vadných výrobků. Dodavatel má možnost nechat výrobky zkontrolovat (uvažujme, že kontrola určí vadnost spolehlivě), ale kontrola je nákladná. Jak velkou část vyrobené sady má nechat zkontrolovat, aby dosáhl cílového výskytu do 0,02 zmetků? Kolik by musel zkontrolovat, pokud by kontrola místo naprosté spolehlivosti dělala chybu u 0,005 kontrolovaných výrobků?

Řešení. Musíme snížit podíl zmetků mezi výrobky pod 0,02. Velikost celkové dodávky označme Q, podobně jako v úloze 12 by tato neměla hrát roli. Označme P_1 neznámou pravděpodobnost, že výrobek byl zkontrolován, $P_2 = 0{,}05$ pravděpodobnost, že nezkontrolovaný výrobek je zmetek. Zmetků zůstavších po kontrole je $Q \cdot P_2 \cdot (1 - P_1)$, počet výrobků násobíme

pravděpodobností, že jde o zmetek, a dále pravděpodobností, že nebyl kontrolován. Počet celkových výrobků je z Q snížen o počet zmetků, které byly kontrolovány $Q \cdot P_2 \cdot P_1$, tedy řešíme

$$0{,}02 > \frac{Q \cdot P_2 \cdot (1 - P_1)}{Q - Q \cdot P_2 \cdot P_1},$$

dopočítáme

$$P_1 > \frac{30}{49} \doteq 0{,}612\,2.$$

Je tedy třeba zkontrolovat přes 61,2 % výrobků z celkové várky.

Pokud uvažujeme chybovost kontroly, neodhalených zmetků je navíc $Q \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot 0{,}005$ – vadných, zkontrolovaných, ale nevyřazených díky chybě kontroly. Celkový počet nevyřazených výrobků bude zvýšen o tyto přidané zmetky, ale snížen o chybně vyřazené zkontrolované bezvadné výrobky, kterých je $Q \cdot (1 - P_2) \cdot P_1 \cdot 0{,}005$, tedy řešíme

$$0{,}02 > \frac{Q \cdot P_2 \cdot (1 - P_1) + Q \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot 0{,}005}{Q - Q \cdot P_2 \cdot P_1 + Q \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot 0{,}005 - Q \cdot (1 - P_2) \cdot P_1 \cdot 0{,}005},$$

dopočítáme

$$P_1 > \frac{125}{184} \doteq 0{,}679\,3.$$

Je tedy třeba zkontrolovat přes 67,93 % výrobků.

3.1. Úplná pravděpodobnost a Bayesova věta

Poslední úlohy využívají větu o úplné pravděpodobnosti a Bayesovu větu.

Věta o úplné pravděpodobnosti říká: *Mějme systém jevů* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *splňující* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pro všechna* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. *Pokud* $B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$, *pak platí* $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$. Idea věty je v rozdělení jevu B na situace, kdy musel nastat právě jeden z jevů A_i. Toto aplikujme v následující úloze.

Úloha 15. Dva stroje vyrábí týž výrobek. První stroj vyrobí 60 % a druhý 40 % celkové produkce. Pravděpodobnost vyrobení zmetku u obou strojů je po řadě 0,05 a 0,03. Jaká je pravděpodobnost, že „náhodně vybraný výrobek z produkce je zmetek“ (jev A)? ([3, s. 64–65])

Řešení. Nechť A_1 (resp. A_2) je jev „náhodně vybraný výrobek pochází z prvního (resp. druhého) stroje“. Při nalezení poškozeného výrobku víme, že tento výrobek musel vyrobit některý z přístrojů, ale žádný výrobek nepochází o obou najednou, což splňuje podmínky věty o úplné pravděpodobnosti. Pak $P(A_1) = 0{,}4$, $P(A_2) = 0{,}6$, $P(A|A_1) = 0{,}05$, $P(A|A_2) = 0{,}03$. Z věty o úplné pravděpodobnosti dostáváme

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A|A_1) + P(A_2) \cdot P(A|A_2) = \\ = 0{,}6 \cdot 0{,}05 + 0{,}4 \cdot 0{,}03 = 0{,}042.$$

Bayesova věta či Bayesův vzorec je důsledek věty pro úplnou pravděpodobnost: *Mějme systém jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ splňující $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$. Pokud $B = \bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)$, pak platí*

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}.$$

Větu budeme aplikovat v následujícím příkladu.

Úloha 16. V dílně pracuje deset strojů, každý za směnu vyrobí stejný počet výrobků. Pět strojů ve skupině A vyrobí 95 % výrobků v požadované kvalitě, skupina B tří strojů 80 % kvalitních výrobků a skupina C dvou starších strojů jen 75 % výrobků. Ze všech výrobků uložených ve skladu jsme náhodně vybrali jeden výrobek, který měl požadovanou kvalitu. Jaká je pravděpodobnost, že ho vyrobil některý ze strojů ve skupině A?

Řešení. Označíme A náhodný jev, že „vybraný výrobek vyrobil některý ze strojů ve skupině A“, B náhodný jev „vybraný výrobek vyrobil stroj ze skupiny B“, C náhodný jev „vybraný výrobek vyrobil stroj ze skupiny C“ a N náhodný jev „vybraný výrobek je požadované kvality“. Pak $P(A) = \frac{5}{10} = 0{,}5$, $P(N|A) = 0{,}95$, $P(B) = \frac{3}{10} = 0{,}3$, $P(N|B) = 0{,}8$, $P(C) = \frac{2}{10} = 0{,}2$ a $P(N|C) = 0{,}75$. Dále dosazením do Bayesova vzorce vypočítáme:

$$P(A|N) = \frac{P(A) \cdot P(N|A)}{P(A) \cdot P(N|A) + P(B) \cdot P(N|B) + P(C) \cdot P(N|C)} = \\ = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}95}{0{,}5 \cdot 0{,}95 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}75} \doteq 0{,}549.$$

Závěr

Příspěvek na příkladu učiva pravděpodobnosti poukázal na mezipředmětové vztahy mezi matematikou a fyzikou a nabídl řešení úloh obsahově zaměřených na technickou praxi. Úlohy mohou učitelé matematiky a fyziky využít ve své výuce nebo je se žáky řešit v hodinách zájmové matematiky.

Poděkování

Autoři příspěvku děkují anonymní recenzentce a Pavlu Tlustému za řadu připomínek a oprav, které pomohly srozumitelnosti i faktické správnosti textu.

Literatura

[1] Anděl, J.: *Matematika náhody*. 3. upr. vyd., Matfyzpress, Praha, 2007.

[2] Baum, M., Brandt, D., Lind, D., Riemer, W., Zimmermann, P.: *Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien 5*. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 2007.

[3] Cihlář, J., Pelikán, Š.: *Pravděpodobnost – cvičení*. Pedagogická fakulta v Ústí nad Labem, Ústí nad Labem, 1984.

[4] Litschmannová, M.: *Vybrané kapitoly z pravděpodobnosti*. VŠB-TU, Ostrava, 2011. `https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/vybrane_kapitoly_pravdepodobnost.pdf`.

[5] Matoušek, J., Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 3. upr. a dopl. vyd., Karolinum, Praha, 2007.

[6] Odvárko, O.: *Booleova algebra*. Škola mladých matematiků, ÚV MO v nakl. Mladá fronta, Praha, 1973. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403763`.

[7] Płocki, A., Tlustý, P.: *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé*. Prometheus, Praha, 2007.

[8] Stewart, I.: *Hraje Bůh kostky? Nová matematika chaosu*. Dokořán, Praha, 2009.