

Luděk Spíchal

Parabola jako most mezi průměry a funkcemi

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 2, 19–23

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153690>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2026

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Parabola jako most mezi průměry a funkcemi

Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov

V matematice není nijak neobvyklé, že se zdánlivě odlišné oblasti jako geometrie, algebra či teorie čísel často překvapivě prolínají. Jedním z příkladů je možnost konstruovat parabolu pomocí prostředků, které mají svůj původ v aritmetice, konkrétně ve studiu průměrů. Tento přístup otevírá prostor k hlubšímu porozumění nejen vlastnostem paraboly, ale i širším souvislostem mezi pythagorejskými průměry, kvadratickým průměrem a geometrickou konstrukcí křivek.

Parabola, jedna ze tří klasických kuželoseček, je geometrickým útvarem, který na sebe od starověku poutá pozornost matematiků i vědců mnoha dalších oborů. Její příběh se začíná psát ve starověkém Řecku, v době, kdy se geometrie rozvíjela spíše jako teoretická věda, než jako nástroj pro řešení praktických problémů. Právě tehdy, ve 3. století př. n. l., systematicky studoval kuželosečky řecký matematik Apollónios z Pergy (asi 240 p. n. l. – asi 190 p. n. l.). Ve svém osmisvazkovém díle *Kónika – Pojednání o kuželosečkách* nejenže definoval pojem paraboly, ale společně s elipsou a hyperbolou je odlišil pomocí řezů rotačního kužele různě orientovanou rovinou.¹⁾ Apollóniovo dílo představovalo vrchol řecké geometrie a ovlivnilo matematiku po následujících téměř dvacet století [1, 4].

I když byly paraboly původně popsány geometricky, jejich skutečný význam se začal projevovat až s příchodem analytické geometrie, kterou v 17. století rozvinul René Descartes (1596–1650). Ten převedl studium geometrických útvarů do podoby algebraických rovnic, čímž umožnil přesné vyjádření paraboly pomocí rovnice druhého stupně. Tento přístup otevřel cestu k dalšímu hlubokému propojení mezi geometrií a algebrou.

Mezitím však parabola sehrála klíčovou roli i ve fyzice. Galileo Galilei (1564–1642), otec moderní mechaniky, v 17. století experimentálně prokázal, že dráha tělesa vrženého šikmo v gravitačním poli Země (bez odporu vzduchu) má tvar paraboly. Tímto způsobem se geometrie paraboly poprvé přímo propojila s reálným světem a začala se uplatňovat v popisu pohybu.

¹⁾ Zachovalo se pouze 7 dílů, 4 díly v řeckém originálu, 3 v arabských překladech. Osmý díl je považován za ztracený.

V následujících staletích se parabola stala běžným nástrojem v celé řadě matematických disciplín, kde se uplatňuje ve stereometrii, lineární algebře, komplexních číslech i matematickém modelování.

Určité představy odpovídající aritmetickému či geometrickému průměru se objevily již v Mezopotámii a starověkém Egyptě. Mezopotámci při obchodování nebo astronomii používali prostřední hodnoty, které odpovídají aritmetickému nebo geometrickému průměru. Egypťané při praktických výpočtech (např. při odhadech ploch polí nebo objemů sýpek) nahrazovali nepravidelné tvary jednoduššími (obdélníky, lichoběžníky) a používali přibližné hodnoty rozměrů, což často odpovídá využití průměrných hodnot délek nebo průřezů.

Pythagoras (asi 570 př. n. l.–asi 510 př. n. l.) a jeho následovníci (pythagorejci) ve starém Řecku byli první, kdo průměry pojmenovali a systematizovali. Průměry tvořily důležitý prvek v rámci jejich učení o číslech a harmonii. Ve snaze vyjádřit rovnováhu a proporci definovali tři základní typy průměrů mezi dvěma kladnými čísly: aritmetický, geometrický a harmonický. Tyto průměry byly nejen matematickým nástrojem, ale i výrazem pythagorejské víry v uspořádaný a číselně vyjádřitelný vesmír [2, 3, 5].

Pro potřeby článku nyní připomeňme formulaci *aritmetického* ($\mathcal{A}$), *geometrického* ($\mathcal{G}$) a dále ještě *kvadratického* ($\mathcal{Q}$) průměru kladných reálných čísel a, b , které definujeme následujícím způsobem²⁾

$$\mathcal{A}(a, b) = \frac{a + b}{2}, \quad \mathcal{G}(a, b) = \sqrt{ab}, \quad \mathcal{Q}(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Na obr. 1 (vlevo) si můžeme všimnout, že $\mathcal{G} \leq \mathcal{A} \leq \mathcal{Q}$.

²⁾Pro *harmonický průměr* platí

$$\mathcal{H}(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a + b}.$$

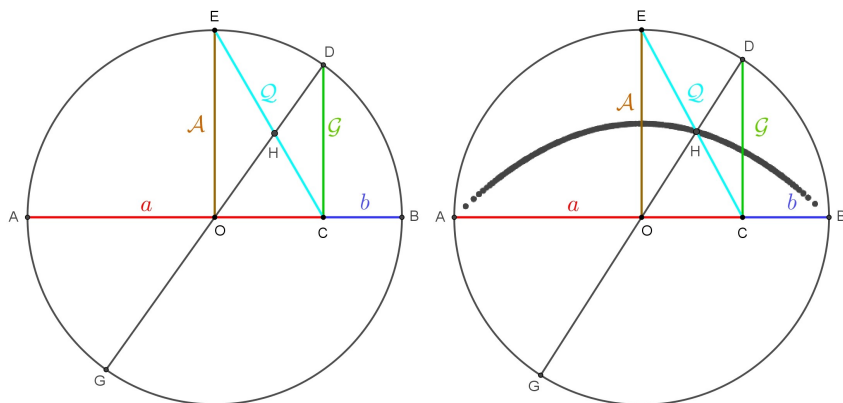
Řecký matematik Eudoxos z Knidu (asi 408 př. n. l.–asi 355 př. n. l.) doplnil základní typy průměrů o tzv. *kontraharmonický průměr*, pro který platí

$$\mathcal{C}(a, b) = \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

Snadno lze ukázat, že

$$\mathcal{H}(a, b) + \mathcal{C}(a, b) = a + b.$$

Kvadratický průměr je také označován jako „RMS“ (root mean square) a je běžně využíván v elektrotechnice pro výpočet efektivní hodnoty střídavého napětí.



Obr. 1: Konstrukce aritmetického ($\mathcal{A}$), geometrického ($\mathcal{G}$) a kvadratického ($\mathcal{Q}$) průměru kladných reálných čísel a, b (vlevo). Stopa, kterou opisuje bod H jako průsečík kvadratického ($\mathcal{Q}$) průměru a průměru kružnice DG (vpravo).

V další části článku budeme uvažovat kružnici s průměrem o délce $a + b$ (obr. 1, vlevo), ve které provedeme konstrukci aritmetického ($\mathcal{A}$), geometrického ($\mathcal{G}$) a kvadratického ($\mathcal{Q}$) průměru. Zaměříme se na rovnici a vlastnosti křivky, kterou získáme sledováním stopy bodu H (průsečík kvadratického průměru a průměru kružnice DG) v případě, že budeme pohybovat bodem C podél průměru kružnice (obr. 1, vpravo).

Odvození rovnice křivky

Při odvození rovnice křivky, kterou jsme získali výše uvedenou konstrukcí, budeme vycházet z obr. 2, kde kružnice c je určena rovnicí

$$x^2 + y^2 = \mathcal{A}^2.$$

Pokud dále zavedeme parametr $t = |OC|$, pak přímka OD má rovnici

$$y = \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}}{t}x, \quad (1)$$

a přímka EC rovnici

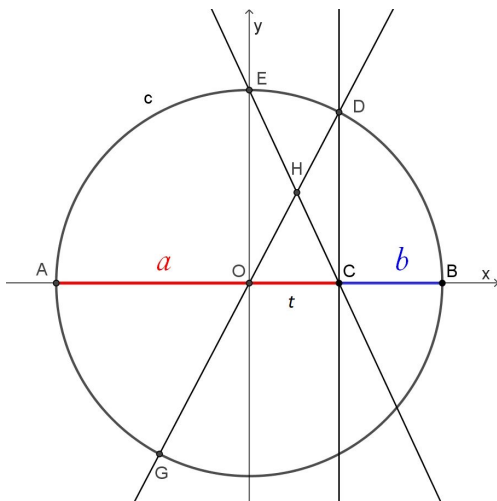
$$y = \frac{\sqrt{\mathcal{A}^2 - t^2}}{t}x. \quad (2)$$

Parametr t odstraníme tak, že z rovnice přímky (1) vyjádříme

$$t = \frac{\mathcal{A}x}{\mathcal{A} - y},$$

a dosadíme do rovnice (2)

$$y = \frac{\sqrt{\mathcal{A}^2 - \left(\frac{\mathcal{A}x}{\mathcal{A}-y}\right)^2}}{\frac{\mathcal{A}x}{\mathcal{A}-y}} x = \frac{1}{2\mathcal{A}}(\mathcal{A}^2 - x^2).$$



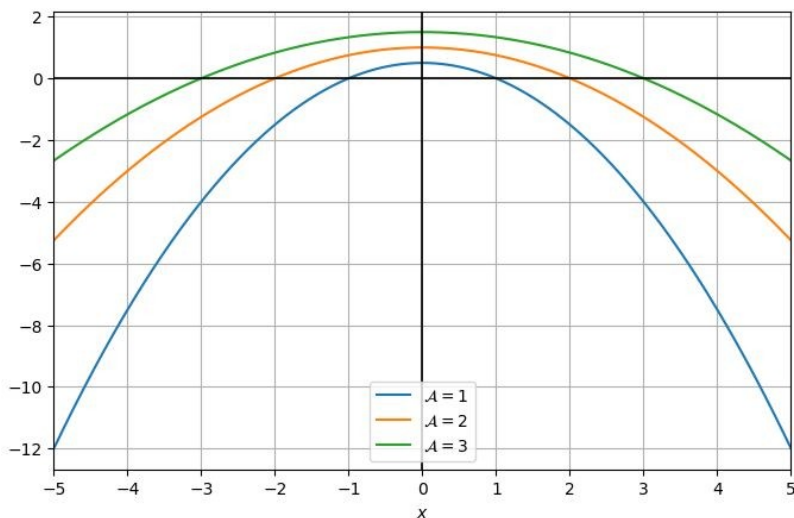
Obr. 2: Určení rovnice křivky, $t = |OC|$

Postupnými úpravami jsme získali rovnici křivky, která odpovídá parabole (obr. 3). Čtenář se může snadno přesvědčit, že ohnisko všech takových parabol leží v počátku soustavy souřadnic.

Závěr

Parabola je běžnou součástí středoškolské výuky, kde představuje jeden ze základních typů kvadratické funkce. Její grafické znázornění je výchozím bodem pro porozumění pojmům jako je vrchol, osa souměrnosti, diskriminant či průsečíky s osami soustavy souřadnic. Kromě toho slouží jako brána do světa aplikované matematiky, jelikož parabola je důležitá nejen teoreticky, ale i prakticky.

Ve fyzice a technice se parabola využívá například v návrhu parabolických zrcadel pro sběr světelných či zvukových paprsků (v teleskopech, reflektorech, mikrofonech), v balistice k popisu trajektorií střel, ve stavebnictví jako tvar oblouků u některých typů mostů nebo kleneb.



Obr. 3: Křivky reprezentující funkci určenou rovnicí $y = \frac{1}{2A}(\mathcal{A}^2 - x^2)$ pro $\mathcal{A} = 1, 2, 3$

V astronomii se parabola objevuje ve výpočtech drah některých kosmických těles a ve statistice i informatice je využívána při aproximacích a optimalizacích.

Parabola tak představuje dokonalý příklad matematického objektu, který propojuje starověkou geometrii, renesanční fyziku, moderní výpočty a technickou praxi. Její tvar je nejen esteticky působivý, ale zároveň matematicky bohatý a funkčně užitečný.

Literatura

- [1] Spíchal, L.: Jednotková parabola, zlatý řez a parabolické π . *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 96 (2021), č. 1, s. 8–17.
- [2] Spíchal, L.: The geometric constructions of the Greek means. *Symmetry: Culture and Science*, roč. 34 (2023), č. 4, s. 407–416.
- [3] Spíchal, L.: Pythagorejské průměry, kontraharmonický průměr a zlatý řez v pravoúhlém trojúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 99 (2024), č. 3, s. 1–12.
- [4] Wikipedia, The Free Encyclopedia. Parabola. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Parabola&oldid=1291646408>.
- [5] Wikipedia, The Free Encyclopedia. Pythagorean means. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pythagorean_means&oldid=1287732965.