

Rozhledy matematicko-fyzikální

David Cichra

Implicitní funkce v rovině

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 2, 24–36

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153691>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2026

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Implicitní funkce v rovině

David Cichra

Abstrakt. Zabýváme se rovnicemi tvaru $F(x, y) = 0$, které v rovině popisují křivky. Taková rovnice nemusí určovat hodnotu y jednoznačně jako funkci proměnné x . Ukážeme však, že v okolí vhodně zvoleného bodu může lokálně vzniknout funkce $y = f(x)$. Na příkladu kružnice vysvětlíme rozdíl mezi globálním a lokálním pohledem, zavedeme pojem implicitní funkce a formulujeme větu o její existenci. Text je určen především středoškolským studentům se zájmem o rozšiřující matematiku a předpokládá znalost funkcí jedné proměnné, limit, spojitosti a základních pravidel pro derivování.

1. Explicitní a implicitní zadání vztahu v rovině

Vydeme ze známého explicitního zadání funkce a postupně přejdeme k rovnicím v rovině. U nich nás nebude zajímat jen křivka jako celek, ale také její chování v okolí konkrétního bodu. Ukáže se, že tatáž křivka může v okolí jednoho bodu určovat proměnnou y jednoznačně jako funkci proměnné x , zatímco v okolí jiného bodu nikoli. Právě v takové lokální situaci budeme mluvit o implicitní funkci. Struktura úvodní části je inspirována textem [1].

Funkci jedné reálné proměnné na množině $D \subset \mathbb{R}$ rozumíme předpis $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, který každému $x \in D$ přiřazuje právě jedno reálné číslo $f(x)$. Často takovou funkci zapisujeme jako

$$y = f(x). \quad (1)$$

Toto zadání nazýváme *explicitní*, protože proměnná y je přímo vyjádřena pomocí proměnné x . Např. rovnice $y = x^2 - 4$ přímo určuje hodnotu y pro každou hodnotu x .

Podstatná vlastnost explicitního zápisu tedy spočívá v tom, že každému přípustnému x přiřazuje právě jednu hodnotu y . Rovnice v rovině však mohou nejprve popisovat pouze podmínku, kterou mají dvojice $[x, y]$ splňovat. Teprve potom se ptáme, zda tato podmínka určuje y jednoznačně jako funkci proměnné x , alespoň v okolí některého bodu. Takový obecnější vztah budeme zapisovat rovnicí

$$F(x, y) = 0. \quad (2)$$

Takové zadání nazýváme *implicitní*. Proměnné x a y jsou v něm svázány společnou podmínkou, ale proměnná y nemusí být přímo vyjádřena pomocí proměnné x . Jestliže rovnice $F(x, y) = 0$ v okolí zvoleného bodu skutečně určuje y jako funkci x , budeme mluvit o implicitní funkci.

Abychom mohli rovnice tvaru (2) přesně popisovat, budeme pracovat s funkcemi dvou reálných proměnných.

Definice 1. Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$. Funkcí dvou reálných proměnných na množině D rozumíme předpis $F: D \rightarrow \mathbb{R}$, který každému bodu $[x, y] \in D$ přiřazuje právě jedno reálné číslo $F(x, y)$.

Množinu $\mathbb{R}^2$ budeme chápat jako souřadnicovou rovinu. Její body budeme zapisovat ve tvaru $[x, y]$. Rovnice $F(x, y) = 0$ potom popisuje množinu těch bodů roviny, ve kterých má funkce F hodnotu nula.

2. Implicitní zadání na příkladu kružnice

Uvažujme funkci

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1. \quad (3)$$

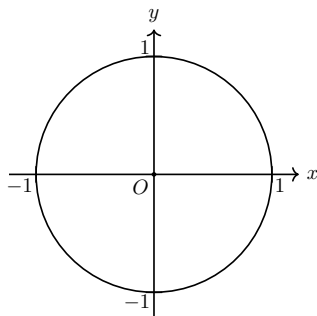
Rovnice $F(x, y) = 0$ má tedy tvar

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (4)$$

Množina jejích řešení je

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

Jde o jednotkovou kružnici se středem v počátku, znázorněnou na obr. 1.



Obr. 1: Množina bodů daná rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$, tedy jednotková kružnice

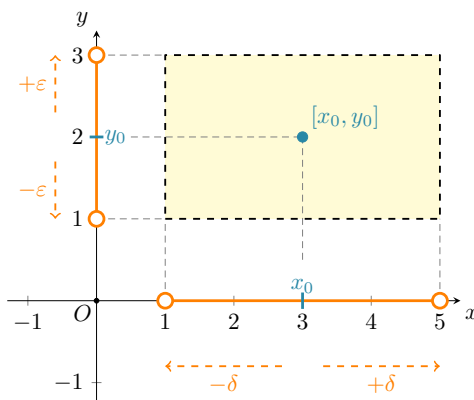
Je množina M grafem nějaké funkce $y = f(x)$? Globálně nikoli. Pro každé $x \in (-1, 1)$ totiž existují dvě různé hodnoty y , které rovnici (4) splňují. Jedna odpovídá horní půlkružnici a druhá dolní. Není tedy splněna podmínka jednoznačnosti, kterou u funkce požadujeme.

Přesto může být kružnice v okolí vhodně zvoleného bodu grafem funkce. Například v okolí bodu na horní půlkružnici vidíme pouze horní větev, zatímco v okolí bodu na dolní půlkružnici vidíme pouze dolní větev. Rozhodující tedy není jen celá křivka, ale také bod, v jehož okolí ji zkoumáme. Takový pohled nazýváme *lokální*.

Abychom tuto myšlenku mohli přesně formulovat, připomeňme nejprve pojem okolí bodu.

Definice 2. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$. *Okolím bodu* x_0 rozumíme otevřený interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Nechť $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ a nechť $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$. *Obdélníkovým okolím bodu* $[x_0, y_0]$ rozumíme množinu

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon).$$



Obr. 2: Obdélníkové okolí bodu $[x_0, y_0]$ v rovině

Nyní můžeme zavést pojem implicitní funkce.

Definice 3. Nechť $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná na množině $D \subset \mathbb{R}^2$ a bod $[x_0, y_0] \in D$ splňuje $F(x_0, y_0) = 0$. Řekneme, že rovnice $F(x, y) = 0$ určuje v okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitní funkci $y = f(x)$, jestliže existují kladná čísla δ a ε taková, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset D$, a pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existuje právě jedno $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ splňující $F(x, y) = 0$. Tím je určena funkce $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, pro niž platí $f(x_0) = y_0$ a $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Vraťme se ke kružnici dané rovnicí (4). Z této rovnice dostáváme

$$y^2 = 1 - x^2,$$

tedy

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{nebo} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

První předpis popisuje horní větev kružnice, druhý větev dolní. Nejprve budeme uvažovat body kružnice, pro které $x_0 \in (-1, 1)$. Krajní body $[-1, 0]$ a $[1, 0]$ pak probereme samostatně.

Začneme konkrétním bodem $A\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, který leží na horní větvi. Podle definice 3 chceme najít takové obdélníkové okolí bodu A , ve kterém bude pro každé uvažované x existovat právě jedna hodnota y splňující rovnici kružnice.

Zvolme $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\delta = \frac{1}{4}$. Pak dostáváme obdélníkové okolí

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

Druhá souřadnice všech bodů tohoto okolí je kladná. Dolní větev kružnice má naopak záporné hodnoty y . Průnik tohoto okolí s kružnicí tedy neobsahuje žádný bod dolní větve.

Zbývá ověřit, že příslušná část horní větve ve zvoleném obdélníkovém okolí skutečně leží. Pro každé $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ platí

$$\frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{7}}{4} < \sqrt{1 - x^2} < \frac{\sqrt{15}}{4} < \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

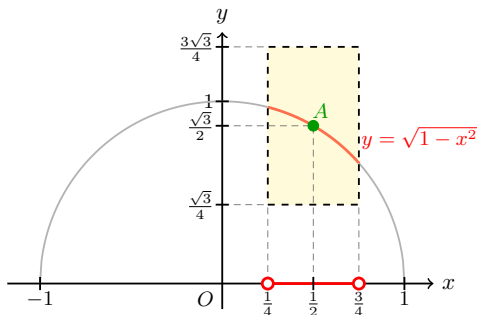
Ukázali jsme, že pro každé $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ existuje právě jedna hodnota $y \in \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ splňující rovnici kružnice. Touto hodnotou je $y = \sqrt{1 - x^2}$. Podle definice 3 tedy rovnice kružnice určuje v okolí bodu A implicitní funkci

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Situace je znázorněna na obr. 3.

Obecně postupujeme stejně. Pro bod $[x_0, y_0]$ na horní větvi s $x_0 \in (-1, 1)$ platí $y_0 > 0$. Volbou $\varepsilon = \frac{y_0}{2}$ dostáváme interval

$$(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) = \left(\frac{y_0}{2}, \frac{3y_0}{2}\right),$$



Obr. 3: Lokální existence implicitní funkce v okolí bodu $A \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

který obsahuje pouze kladné hodnoty y . Hodnoty y na dolní větvi jsou záporné, a proto v tomto intervalu neleží. Poté zvolíme $\delta > 0$ tak malé, aby pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zůstala hodnota $\sqrt{1 - x^2}$ v uvedeném intervalu pro y .¹⁾ Pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je pak ve zvoleném intervalu pro y právě jedno řešení rovnice kružnice, a to $y = \sqrt{1 - x^2}$. Podle definice 3 zde tedy rovnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ určuje implicitní funkci

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Případ bodu na dolní větvi se ověří obdobně. Interval pro hodnoty y zvolíme celý pod osou x , čímž vyloučíme horní větev. V okolí takového bodu vzniká funkce

$$g(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Podrobné ověření ponecháváme čtenáři jako cvičení.

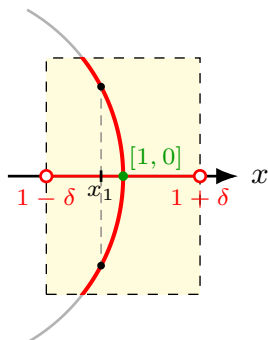
Zbývá posoudit krajní body $[-1, 0]$ a $[1, 0]$. Uvažujme například bod $[1, 0]$. Obr. 4 naznačuje, že v žádném obdélníkovém okolí tohoto bodu nelze dosáhnout jednoznačnosti hodnoty y . Pro hodnoty $x < 1$ dostatečně blízké jedničce totiž dostáváme dvě hodnoty y , jednu kladnou a

¹⁾Například lze vzít $\delta = \min \left\{ \frac{1 - |x_0|}{2}, \frac{y_0^2}{4} \right\}$. Pak z $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ plyne $x \in (-1, 1)$. Položíme-li $s = \sqrt{1 - x^2}$, pak $s + y_0 \geq y_0$ a zároveň $|x + x_0| < 2$. Proto

$$|s - y_0| = \frac{|x^2 - x_0^2|}{s + y_0} \leq \frac{|x - x_0| |x + x_0|}{y_0} < \frac{2\delta}{y_0} \leq \frac{y_0}{2}.$$

Odtud plyne $s \in \left(\frac{y_0}{2}, \frac{3y_0}{2} \right)$.

druhou zápornou, přičemž obě splňují rovnici kružnice.²⁾ Podmínka jednoznačnosti z definice 3 zde selhává. Rovnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ proto v okolí bodu $[1, 0]$ neurčuje implicitní funkci $y = f(x)$. Stejný závěr platí i v bodě $[-1, 0]$.



Obr. 4: Selhání implicitního zadání v okolí krajního bodu $[1, 0]$

Kružnici jsme mohli rozdělit na dvě větve díky tomu, že umíme rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$ vyřešit vzhledem k proměnné y . U obecné rovnice $F(x, y) = 0$ to však často možné není. Uvažujme například rovnici

$$xe^y + ye^x - 1 = 0. \quad (5)$$

Není zřejmé, jak z ní proměnnou y vyjádřit elementárními prostředky. Přesto bychom rádi rozhodli, zda v okolí daného bodu určuje nějakou funkci $y = f(x)$. K tomu budeme potřebovat větu o existenci implicitní funkce. Před její formulací zavedeme dva pojmy pro funkce dvou proměnných, a to parciální derivaci a spojitost.

3. Parciální derivace a spojitost funkcí dvou proměnných

U funkce jedné proměnné derivace popisuje, jak se mění hodnota funkce při malé změně vstupní hodnoty. U funkce dvou proměnných můžeme měnit buď proměnnou x , nebo proměnnou y . Tím dostáváme dvě parciální derivace.

²⁾Přesněji, nechť $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ jsou zvoleny libovolně. Dále zvolme $0 < h < \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon^2}{2}, 1 \right\}$ a položíme $x_1 = 1 - h$. Potom $x_1 \in (1 - \delta, 1 + \delta)$. Pro $y_1 = \sqrt{1 - x_1^2}$ platí

$$y_1^2 = 1 - (1 - h)^2 = 2h - h^2 < 2h < \varepsilon^2,$$

tedy $0 < y_1 < \varepsilon$. Hodnoty y_1 i $-y_1$ leží v intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ a obě splňují rovnici kružnice.

Definice 4. Nechť je funkce F definována v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Řekneme, že funkce F má v bodě $[x_0, y_0]$ *parciální derivaci podle proměnné x* , jestliže existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h}.$$

Tuto limitu značíme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Analogicky, funkce F má v bodě $[x_0, y_0]$ *parciální derivaci podle proměnné y* , jestliže existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y_0 + h) - F(x_0, y_0)}{h}.$$

Tuto limitu značíme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Při výpočtu parciální derivace podle jedné proměnné považujeme druhou proměnnou za konstantu a používáme stejná pravidla jako při derivování funkcí jedné reálné proměnné.

Příklad 1. Určete parciální derivace funkce

$$F(x, y) = 3x^4y^2 - e^{2x}.$$

Řešení. Při derivaci podle x považujeme y za konstantu. Dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 12x^3y^2 - 2e^{2x}.$$

Při derivaci podle y považujeme x za konstantu. Dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 6x^4y.$$

Pro formulaci věty o existenci implicitní funkce budeme potřebovat také spojitost funkcí dvou proměnných.

Definice 5. Nechť je funkce F definována v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Řekneme, že F je *spojitá v bodě $[x_0, y_0]$* , jestliže platí

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} F(x, y) = F(x_0, y_0).$$

Intuitivně to znamená totéž jako u funkce jedné proměnné. Malé změny vstupních hodnot x a y vedou k malým změnám hodnoty funkce. U funkcí dvou proměnných je však třeba mít na paměti, že k bodu $[x_0, y_0]$ se můžeme v rovině přibližovat různými směry.

V dalším textu budeme využívat základní pravidla pro spojitost. Součet, rozdíl a součin spojitých funkcí jsou spojité. Podíl spojitých funkcí je spojitý v těch bodech, v nichž jmenovatel není nulový, a složení spojitých funkcí je spojité všude tam, kde je definováno. Spolu se spojitostí běžných elementárních a souřadnicových funkcí tak můžeme snadno ověřovat spojitost mnoha funkcí dvou proměnných.

Například funkce

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 1$$

je spojitá na celé rovině $\mathbb{R}^2$. Podrobnější výklad spojitosti funkcí více proměnných lze najít například v [2].

4. Věta o existenci implicitní funkce

Vraťme se k rovnici (5). Neumíme z ní jednoduše vyjádřit proměnnou y , ale přesto můžeme za určitých podmínek zaručit, že v okolí daného bodu funkce $y = f(x)$ existuje. Tyto podmínky popisuje následující věta.

Věta 1 (o existenci implicitní funkce). *Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ obsahuje okolí bodu $[x_0, y_0]$ a nechť $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Dále předpokládejme, že*

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. *funkce F je spojitá v okolí bodu $[x_0, y_0]$,*
3. *parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial y}$ existuje a je spojitá v okolí bodu $[x_0, y_0]$,*
4. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, ve kterém rovnice $F(x, y) = 0$ určuje spojitou implicitní funkci $y = f(x)$ ve smyslu definice 3.

Větu lze číst takto: stačí ověřit čtyři relativně snadné podmínky – bod leží na křivce, funkce F je rozumně hladká, parciální derivace podle y existuje a je spojitá, a v daném bodě není nulová. Pokud to vše platí, máme jistotu, že se křivka v okolí tohoto bodu „chová jako graf funkce“ aniž bychom museli y explicitně vyjadřovat nebo ručně konstruovat okolí jako u kružnice.

Důkaz věty 1 zde neuvádíme, protože přesahuje rámec tohoto článku. Lze jej najít například v [3]. V následující poznámce projdeme jednotlivé předpoklady věty a na příkladech ukážeme, co se může stát, pokud některý z nich není splněn.

Poznámka 1. Věta 1 je postačujícím kritériem pro existenci spojitě implicitní funkce. Splnění všech jejích předpokladů tuto existenci zaručuje. Pokud některý předpoklad splněn není, věta sama o sobě žádný závěr nedává a situaci je třeba posoudit jinak. V následujících bodech proto ukážeme, jaká potíž může nastat při vypuštění jednotlivých předpokladů.

1. ***Bod musí ležet na křivce.***

Podmínka

$$F(x_0, y_0) = 0$$

říká, že bod $[x_0, y_0]$ skutečně leží na křivce popsané rovnicí $F(x, y) = 0$. Jestliže $F(x_0, y_0) \neq 0$, pak tato křivka daným bodem neprochází a nemá smysl mluvit o implicitní funkci procházející bodem $[x_0, y_0]$.

2. ***Spojitosť funkce F .***

Předpoklad spojitosti funkce F souvisí se spojitostí výsledné implicitní funkce. Bez něj může rovnice $F(x, y) = 0$ sice lokálně určovat y jednoznačně jako funkci proměnné x , ale tato funkce nemusí být spojitá.

Uvažujme například bod $[0, 0]$ a funkci

$$F(x, y) = \begin{cases} y - x, & x \leq 0, \\ y - x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

Platí $F(0, 0) = 0$ a parciální derivace podle y existuje, přičemž

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0.$$

Funkce F však není spojitá v bodě $[0, 0]$. Rovnice $F(x, y) = 0$ v okolí bodu $[0, 0]$ určuje funkci

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x - 1, & x > 0, \end{cases}$$

ta ale není spojitá v bodě $x = 0$. Příklad ukazuje, že bez spojitosti funkce F nelze zaručit spojitost implicitně určené funkce.

3. *Existence parciální derivace podle y .*

Předpoklad existence parciální derivace podle y také nelze vypustit. Uvažujme funkci

$$F(x, y) = |y| - x.$$

V bodě $[0, 0]$ je tato funkce spojitá a platí $F(0, 0) = 0$. Podle definice by parciální derivace podle y v tomto bodě musela být dána limitou

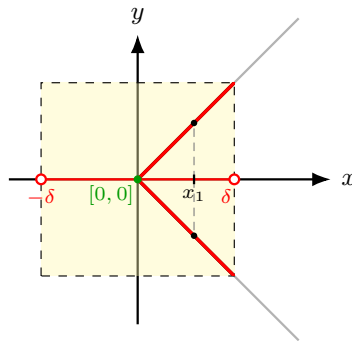
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0, h) - F(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Tato limita však neexistuje, protože pro $h > 0$ je podíl roven 1, zatímco pro $h < 0$ je roven -1 .

Z rovnice $F(x, y) = 0$ dostáváme vztah $|y| = x$. Pro každé kladné x dostatečně blízké nule existují dvě různé hodnoty

$$y = x \quad \text{a} \quad y = -x.$$

Proměnná y tedy v okolí bodu $[0, 0]$ není určena jednoznačně jako funkce proměnné x . Situace je znázorněna na obr. 5.



Obr. 5: Křivka $|y| = x$; v okolí bodu $[0, 0]$ vznikají pro kladná x dvě hodnoty y

4. *Nenulovost parciální derivace podle y .*

Navážeme na již dříve zkoumanou funkci

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Funkce F je spojitá v okolí bodu $[1, 0]$ a platí $F(1, 0) = 0$. Parciální derivace podle y existuje a je dána předpisem

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y,$$

tedy

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 0.$$

Selhává tedy podmínka nenulovosti parciální derivace. Jak jsme již odůvodnili při rozboru krajních bodů kružnice, v okolí bodu $[1, 0]$ rovnice $F(x, y) = 0$ implicitní funkci $y = f(x)$ neurčuje. Tato situace je znázorněna na obr. 4.

Předchozí poznámka ukazuje, proč nelze předpoklady věty při jejím použití jednoduše vypouštět. Zároveň je však důležité, že jde pouze o postačující kritérium. Nesplnění některého předpokladu tedy samo o sobě neznamená, že implicitní funkce neexistuje.

Následující poznámka to ukazuje na podmínce

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

která pro samotnou existenci implicitní funkce není nutná.

Poznámka 2. Uvažujme rovnici

$$y^3 - x = 0$$

a položme

$$F(x, y) = y^3 - x.$$

V bodě $[0, 0]$ platí $F(0, 0) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Podmínka nenulovosti parciální derivace podle y tedy splněna není. Přesto z rovnice přímo dostáváme funkci $y = \sqrt[3]{x}$, která je definována a spojitá na celé reálné ose. Implicitní funkce tedy existuje, i když ji věta 1 v tomto bodě nezaručuje.

V následujícím příkladu se vrátíme k rovnici (5). S užitím věty 1 ukážeme, že tato rovnice v okolí daného bodu určuje implicitní funkci.

Příklad 2. Ukažte, že rovnice

$$xe^y + ye^x - 1 = 0$$

v jistém okolí bodu $[1, 0]$ určuje spojitou implicitní funkci $y = f(x)$.

Řešení. Položme

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 1.$$

Ověříme předpoklady věty 1. Funkce F je spojitá, protože vzniká ze součtů, součinů a skládání spojitých funkcí. Dále platí

$$F(1, 0) = 1 \cdot e^0 + 0 \cdot e^1 - 1 = 0.$$

Bod $[1, 0]$ tedy leží na křivce $F(x, y) = 0$.

Parciální derivace podle y má tvar

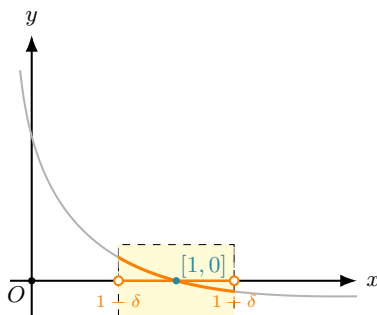
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = xe^y + e^x.$$

Tato parciální derivace je spojitá. V bodě $[1, 0]$ dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 1 + e \neq 0.$$

Všechny předpoklady věty 1 jsou splněny. Existuje proto okolí bodu $[1, 0]$, ve kterém daná rovnice určuje právě jednu spojitou implicitní funkci $y = f(x)$.

Situace z předchozího příkladu je znázorněna na obr. 6.



Obr. 6: Křivka $xe^y + ye^x - 1 = 0$ v okolí bodu $[1, 0]$; v tomto okolí ji lze chápat jako graf spojitě funkce $y = f(x)$

Následující úlohy slouží k samostatnému procvičení postupu z předchozího příkladu.

Příklad 3. Ukažte, že každá z následujících rovnic v jistém okolí uvedeného bodu určuje spojitou implicitní funkci $y = f(x)$.

- a) $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ v okolí bodu $[1, 1]$,
- b) $x^2 + \sin y - 1 = 0$ v okolí bodu $[1, 0]$,
- c) $\ln(1 + y^2) + y - x = 0$ v okolí bodu $[0, 0]$.

Závěr

V článku jsme se zabývali rovnicemi tvaru $F(x, y) = 0$, které v rovině popisují křivky. Na příkladu jednotkové kružnice jsme viděli, že taková křivka nemusí být globálně grafem funkce $y = f(x)$, ale v okolí vhodně zvoleného bodu může proměnnou y určovat jednoznačně jako funkci proměnné x .

Tento lokální pohled vedl k definici implicitní funkce a k větě o její existenci. Tato věta poskytuje postačující podmínky, za nichž rovnice $F(x, y) = 0$ v okolí daného bodu určuje spojitou funkci $y = f(x)$. Pokud některý předpoklad splněn není, je třeba situaci posoudit samostatně.

V navazujícím článku se budeme zabývat otázkou, jak určit derivaci implicitní funkce, aniž bychom proměnnou y museli z rovnice explicitně vyjádřit.

Literatura

- [1] Kreml, P., Vlček, J., Volný, P., Krček, J., Poláček, J.: *Matematika II*. VŠB – Technická univerzita, Ostrava, 2007.
- [2] Ghorpade, S. R., Limaye, B. V.: *A course in multivariable calculus and analysis*. Springer, New York, 2010.
- [3] Hájková, O., Johaniš, M., John, O., Kalenda, O., Zelený, M.: *Matematika*. Matfyzpress, Univerzita Karlova, Praha, 2012.